

Е. С. БЕРЕЗАНСКАЯ

МЕТОДИКА
АРИФМЕТИКИ

ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ



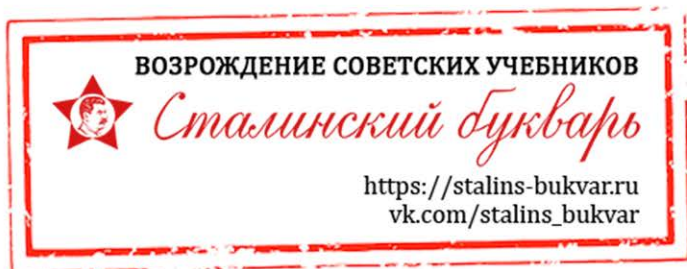
МОСКВА • 1955

Е. С. БЕРЕЗАНСКАЯ

МЕТОДИКА АРИФМЕТИКИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ



Москва — 1955

ОТ АВТОРА

Новое издание „Методики арифметики“ выходит в то время, когда перед общеобразовательной советской средней школой поставлены новые задачи, вытекающие из постановления XIX съезда КПСС о введении всеобщего среднего образования и осуществлении политехнического обучения. Школа должна готовить советскую молодежь не только для поступления в высшие и средние профессиональные учебные заведения, но и к практической деятельности.

Со времени последнего издания „Методики арифметики“ (1947 г.) частично изменилась программа по арифметике средней школы и изменились требования, предъявляемые к знаниям и умениям учащихся V и VI классов по курсу арифметики.

В связи с этим в новом издании „Методики“ несколько расширен раздел общедидактических вопросов (гл. I), поставлены вопросы политехнического обучения в связи с преподаванием арифметики, более подробно рассмотрено решение задач с геометрическим содержанием, внесены также некоторые уточнения в текст „Методики“, в соответствии с высказанными пожеланиями учителей.

Некоторые исторические сведения, приведенные в данном руководстве, и материал для внеклассной работы имеют целью помочь молодому учителю при выборе тем для бесед и кружковых занятий, но не снимают необходимости пользоваться рекомендуемыми литературными источниками.

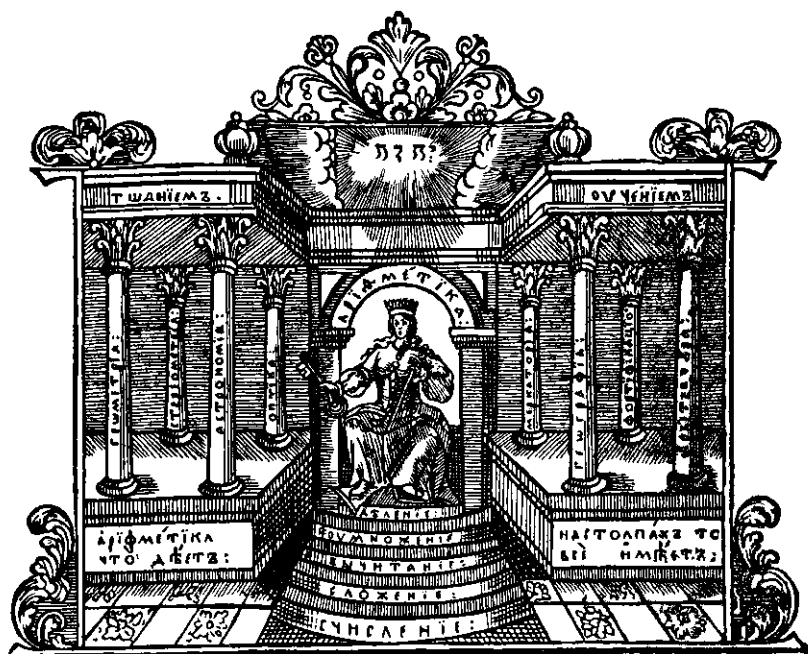
Как и в первых изданиях, в 5-м издании „Методика арифметики“ не включает курса теории арифметики, но по отдельным вопросам при обосновании соответствующих методических приемов дается более подробное изложение теории, чем это требуется программой V и VI классов средней школы (вопросы делимости чисел, теории дробей и некоторые другие).

Эта книга предназначена для учителя. В ней нет, как этого иногда ожидают, совершенно точных указаний к проведению уроков по всему курсу арифметики младших классов средней школы, так как сделать это может только сам учитель, учитывая конкретные условия своей работы и внося личное творчество в преподавание.

В течение последних лет автор вновь систематически изучал постановку преподавания арифметики в V и VI классах средней школы, вновь экспериментально проверил методические приемы, предлагаемые в настоящей „Методике“. Поэтому позволено думать, что молодой учитель расширит свой кругозор в вопросах преподавания арифметики и проверит свой опыт, ознакомившись с приемами и методами, предлагаемыми в настоящем руководстве.

Дополнения и исправления, внесенные в 5-е издание „Методики арифметики“, сделаны на основании ценных, принятых автором с благодарностью, указаний и пожеланий методистов и учителей средней школы.

Москва, май 1955 г.



Глава I

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРЕПОДАВАНИЮ АРИФМЕТИКИ

§ 1. Цели обучения арифметике

Цель обучения математике в советской средней школе с политехническим обучением — воспитать патриотов нашей великой родины, безгранично преданных идеям Коммунистической партии Советского Союза, владеющих основами математической науки и способных приложить приобретенные знания к великому делу коммунистического строительства и обороны нашей страны. Арифметика — наука о числах — первая составная часть математики; арифметические знания — основа, на которой строится дальнейшее обучение математике.

XIX съезд КПСС принял постановление, в котором дается директива приступить к осуществлению политехнического обучения в советской средней общеобразовательной школе, с тем, чтобы общее образование, даваемое в школе, готовило учащихся к жизни, вооружало их практическими умениями и навыками. Не малое значение в осуществлении поставленных задач имеет обучение основам математической науки. Изучение математики в средней школе начинается с изучения систематического курса арифметики в V классе.

В настоящее время в советской школе курс арифметики изучается в течение шести лет: в I—IV классах изучается начальный курс арифметики, в V и VI классах—систематический.

Содержанием начального курса арифметики является арифметика целых положительных чисел и именованных чисел¹. Этот курс строится концентрически: сначала изучаются числа и действия над числами в пределах первого десятка, затем второго десятка, затем изучаются круглые десятки, числа до 100, до 1000 и, наконец, любые натуральные числа и действия над ними.

При изучении начального курса арифметики учащиеся почти не знакомятся с вопросами теории, не пользуются учебником; при выработке представлений, при установлении новых понятий или правил в этом курсе широко используется наглядность и индукция. Преподавание начального курса арифметики находится в руках преподавателя начальной школы—не специалиста по математике.

В объяснительной записке к программе систематического курса по арифметике средней школы говорится: „Преподавание арифметики имеет целью научить учащихся сознательно, быстро, уверенно и наиболее рационально производить действия с целыми и дробными числами и применять знания к решению задач и выполнению простейших расчетов практического характера“. Надо добавить, что исто-

¹ Программа первых четырех классов по арифметике включает некоторые геометрические сведения и сведения о дробях, но не эти вопросы характеризуют начальный (или подготовительный) курс арифметики первых четырех классов.

рические постановления ЦК ВКП(б) от 5 сентября 1931 г. и 25 августа 1932 г. требуют от каждой школьной дисциплины усвоения „точно очерченного круга систематизированных знаний“. В этом основная задача систематического курса арифметики. Изучение систематического курса арифметики должно способствовать развитию умственных способностей учащихся, должно дать им необходимые осознанные арифметические знания и умения для использования их на практике, подготовить учащихся к дальнейшему усвоению математики и других наук.

Недостатком общего образования, получаемого оканчивающими нашу советскую среднюю школу, все еще является то, что они не в полной мере владеют курсом арифметики как в смысле теоретическом, так и практическом. Причина этого прежде всего в том, что курс арифметики, согласно действующим программам, изучается лишь в младших классах, и молодые люди, достигая зрелого возраста, остаются с теми арифметическими представлениями, которые они получили в детстве, и с теми же примитивными вычислительными навыками. Необходимо, как это делают отдельные учителя, на всем протяжении обучения в средней школе систематически и планомерно при изучении других отделов элементарной математики закреплять, углублять и расширять арифметические знания учащихся.

Много возможностей для этого в курсе алгебры, где расширяется понятие числа, вводятся новые числа и формулируются законы действий над ними; даются формулы, при помощи которых учащиеся получают возможность обосновать многие известные им из арифметики правила быстрых и рациональных приемов вычисления, а также имеют возможность постоянно совершенствовать имеющиеся у них вычислительные навыки. Желательно в выпускном классе в порядке систематизации и обобщения изложить с доступной для учащихся этого класса строгостью курс арифметики, но это требует выделения специального времени и не предусмотрено в настоящее время программой по математике средней школы.

Методика преподавания арифметики имеет своей целью разработать и обосновать систему методов и

приемов преподавания этого курса в советской средней школе с тем, чтобы достичь наилучшим способом решения тех задач, которые ставятся при обучении арифметике.

Научная основа методики арифметики, как и любой методики обучения,—марксистско-ленинская теория познания и павловское учение о высшей нервной деятельности, которое является естественнонаучной основой ленинской теории отражения. Методика строит свои выводы на основе общедидактических принципов советской школы.

Методика арифметики (в особенности методика начальной арифметики) имела много выдающихся представителей в дореволюционной России XIX в. и начала XX в., не говоря о более раннем периоде.

Учителю арифметики интересно и полезно познакомиться по указываемой нами литературе с идеями и трудами выдающихся методистов: П. С. Гурьева, одного из первых основателей методики арифметики в России; с идеями преподавания арифметики, основоположника русской педагогической науки К. Д. Ушинского; с деятельностью В. А. Латышева и А. И. Гольденберга; К. П. Арженикова и В. К. Беллюстина, В. А. Евтушевского, Ф. И. Егорова и С. И. Шохор-Троцкого (1853—1923 гг.), „Методика арифметики“ которого представляет значительный интерес и в настоящее время, и многих других¹.

В советское время в нашей стране методика арифметики имеет возможность широко развиваться на базе изучения опыта массы учителей школ и пользоваться методами экспериментирования. В данном руководстве, исходя из целей и особенностей преподавания арифметики, на основе принятой в школе систематической программы предлагается учителю система обоснованных, экспериментально проверенных на практике приемов, применение которых может способствовать поднятию качества обучения арифметике.

В излагаемом курсе „Методики арифметики“ учитель найдет определенную последовательность и

¹ См. „Список рекомендуемой литературы“ на стр. 537.

методику изложения различных отделов программы арифметики, которые он может учесть в своей практической работе.

Остановимся на некоторых общеметодических и дидактических вопросах преподавания арифметики, в то же время усиленно рекомендуя молодому учителю обратиться к специальным курсам по вопросам общей методики.

§ 2. Научные методы в преподавании арифметики

Изучение систематического курса арифметики (как и любой другой науки) в первую очередь связано с усвоением тех идей и понятий, которые встречаются в этом курсе. Новых понятий для ученика V—VI классов в курсе арифметики, в каждом разделе этого курса, очень много. Основным вопросом преподавания арифметики является вопрос о том, как подвести учащихся к освоению основных идей, понятий, законов арифметики.

Вопросы, связанные с усвоением основной идеи курса арифметики V и VI классов—развитием понятия числа, введением нуля и дробного числа, подробно разработаны в соответствующих параграфах данной „Методики“.

В процессе изучения курса арифметики средней школы учащиеся постепенно осваивают идею функциональной зависимости величин.

Известно, что понятие функции является одним из основных понятий современной математической науки; оно играет исключительную роль в познании реального мира, и перед преподавателем арифметики, как и каждой математической дисциплины, стоит задача формирования у учащихся навыков функционального мышления. В курсе арифметики V класса никаких определений или специальных терминов, связанных с понятием функции, не дается учащимся, но постоянно, систематически вводится понятие „соответствия“, лежащее в основе понятия функции. Так как в любом условии задачи имеется функциональная зависимость данных и искомых величин, то при решении задач учащиеся всегда имеют возможность говорить, например, о том, что числу мет-

ров купленного товара „соответствует“ его стоимость, и т. д. При изучении действий как с натуральными, так и с дробными числами, рассматриваются вопросы изменения результатов действий в „соответствии“ с изменением компонентов и т. д.

В курсе арифметики VI класса ставится тема „Пропорциональность величин“, как первое введение в изучение функций (подробно об этом см. в гл. XIII).

В данной „Методике арифметики“, в соответствующих главах подробно излагается методика введения новых понятий и показываются пути формирования этих понятий в мышлении учащихся. В главе VII „Свойства чисел. Делимость чисел“ нами вводятся некоторые понятия, обычно опускаемые в школьном учебнике арифметики, но без которых, как нам кажется, учащиеся не могут иметь вполне осознанных знаний (делитель, общий делитель, кратное, общее кратное, наименьший и наибольший делитель числа и некоторые другие).

Сделаем несколько общих замечаний.

Марксизм-ленинизм учит, что понятия являются продуктами переработки чувственно воспринимаемых образов реальной действительности (ощущений, восприятий и представлений) в мозгу человека. Естественно-научное обоснование связи между чувственным и рациональным познанием действительности дано в трудах академика И. П. Павлова. Ощущения, восприятия и представления, по Павлову, составляют первую сигнальную систему действительности, а понятия, речь—вторую. Но вторая сигнальная система, неоднократно подчеркивал И. П. Павлов, имеет значение через первую сигнальную систему и в связи с ней. Эти руководящие идеи мы стремимся осуществить в преподавании.

Обучение арифметике в V классе строится на основе того опыта, тех знаний, которые приобрели учащиеся в начальной школе; поэтому, приступая к занятиям по арифметике с учащимися V класса, надо прежде всего учесть знания и умения учащихся, вынесенные ими из курса начальной школы. Надо восстановить в их памяти, а затем уточнить, дополнить, систематизировать и обобщить имеющиеся у них представления и понятия, ввести новые с тем,

чтобы в результате изучения курса арифметики учащиеся усвоили основные арифметические понятия числа и величины, счета и измерения (частично известные из курса начальной школы), чтобы они усвоили понятие взаимной зависимости величин, прямой и обратной пропорциональности и др.

Создание ясных и правильных обобщений, усвоение новых понятий опирается на знание конкретных фактов, на наличие у учащихся представлений о тех объектах и процессах, которые отражает данное понятие. Одним из средств правильной постановки обучения арифметики в V классе является наглядность, понимаемая в широком смысле слова, но обязательно связанная с непосредственным восприятием, с использованием наглядного пособия.

Конкретным для учащегося V класса является все то, что ему известно, ранее понято им и усвоено. Конкретны для учащегося V класса слова учителя в том случае, когда они вызывают в его сознании яркие и полные наглядные образы описываемого процесса или операции. В V классе учитель по преимуществу при помощи слова или книги—учебника—ведет ученика от конкретного к абстрактному, знакомя с новыми понятиями на новом материале, переходя далее к обобщениям.

При обучении арифметике в систематическом курсе пользуются методами индукции и дедукции, методами анализа и синтеза. Нет необходимости учащимся V и VI классов сообщать эти термины, кроме одного — „анализ“, но учитель арифметики должен всегда знать, каким методом он доводит до сознания учащихся то или иное понятие, его определение, правило и т. д.

Сущность нового понятия или нового правила действий учащимися V класса выясняется по преимуществу индуктивным путем, исходя из рассмотрения конкретных частных примеров. Чем внимательней отнесется преподаватель к подбору исходных упражнений, тем конкретнее, реальнее представят себе и сознательнее усвоят ученики смысл выполняемых операций, тем осознаннее и прочнее приобретаемые ими знания и навыки, тем сознательнее будет сделан обобщающий вывод.

Слешить с сообщением формулировок и определений не следует. Надо заботиться о том, чтобы учащийся ясно представлял себе тот логический путь, которым пришли к выводу, весь ход рассуждений и смог повторить его вначале по вопросам, а затем самостоятельно.

При выводе правила выполнения той или иной операции подбирается фактический конкретный материал и числовые данные так, чтобы правило наиболее ярко выявилось, чтобы дана была наилучшая иллюстрация к нему, чтобы учащиеся могли распознать в ряде поставленных задач тот процесс, который по существу является для них общим и может быть сформулирован в виде правила (примеры даны в соответствующих главах методики).

Таким образом, правила не дают учащимся в готовом виде; вывод правила является как бы результатом их работы, и в то же время в дальнейшем правило становится орудием (навыком), которым пользуются при выполнении действий и преобразований почти автоматически, не восстанавливая каждый раз всего процесса рассуждений. Применение указанного приема при объяснении помогает учащимся осознать и запомнить правило. Вопросами „почему?“, „как ты рассуждал?“ воспитывают у учащихся обоснованность суждений и проверяют понимание. Новые термины также по возможности вводятся в связи с накопленным опытом учащихся. Так, например, определение дробного числа дается после того, как ученик несколько освоился с получением его; термины „числитель“ и „знаменатель“ даются тогда, когда ученик несколько освоился с получением числителя и знаменателя и т. д. Правильные и четкие определения и формулировки, так же как и постановка вопросов перед учащимися, должны быть тщательно продуманы учителем в процессе подготовки его к уроку.

Применять „метод неполной индукции“—способ рассуждения от частного к общему, от фактов к обобщению—надо с осторожностью; надо показать, что наблюдение определенного свойства в ряде случаев не служит гарантией наличия его в других аналогичных случаях. Вывод правила или признака в

курсе арифметики V класса не всегда основывается на анализе частных конкретных примеров, как, например, при выводе признаков делимости и др. Иногда, как, например, при выводе правила умножения дроби на целое число исходят из определения умножения на целое число, иногда только убеждаются в правильности применяемого приема на основании известной зависимости, например, на основании свойства взаимно обратных действий и т. д. Ко всем этим элементарным приемам рассуждений и обоснований постепенно приучается учащийся.

При изложении курса арифметики в V и VI классах средней школы не указывают учащимся имеющиеся в нем теоремы и обычно не употребляют термин „доказать“; учащимся предлагается „продумать“, „рассудить“, „умозаключить“, и надо считать, что эти термины достаточно полно характеризуют процесс умственной работы учащихся 11—12-летнего возраста при изучении курса арифметики, при установлении в этом курсе того или иного математического предложения: признака делимости, свойства суммы, произведения и т. д.

Широко используются при обучении арифметике методы анализа и синтеза. Применение аналитического и синтетического методов при решении составных арифметических задач подробно излагается в главе XII настоящей „Методики“, но значение аналитического метода при изучении курса арифметики этим не ограничивается, так как рассмотрение любого вопроса арифметики даже в младших классах начинается с его анализа. На этой работе учащийся учится самостоятельно мыслить, отыскивать приемы решения предложенной задачи, давать ответ на поставленный вопрос. Этим отличается методика изложения каждого раздела курса арифметики на уроке от синтетического изложения того же раздела в учебнике систематического курса арифметики.

После изучения каждого нового вопроса, вывода соответствующего закона или правила происходит закрепление знаний в большинстве случаев путем практического применения выведенного общего закона или правила к частным случаям (преобладает дедуктивный процесс мышления), к объяснению кон-

кретных фактов. При этом учащиеся знакомятся с новыми конкретными фактами и более глубоко и сознательно усваивают теорию.

Закрепление сопровождается запоминанием. Основой для успешного запоминания является полное понимание содержания изучаемого, т. е. осмысленное запоминание. Только при этом условии знания учащихся будут достаточно тверды и прочны, усвоенное не будет скоро забыто и не будет иметь места факты, когда учащегося легко заставить усомниться в правильности сделанного им вывода или полученного ответа.

Как известно, в основе арифметики, как всякой математической дисциплины, лежит несколько первичных понятий, не определяемых, для которых дается система аксиом, устанавливающая между ними формальные взаимоотношения. Для всякого вновь вводимого понятия обязательно точное определение. Впервые аксиомы арифметики были даны Грассманом (в 60-х годах XIX века), но задача обоснования арифметики не считается разрешенной и в настоящее время. Наиболее распространена система первичных понятий и аксиом арифметики натуральных чисел, данная итальянским математиком Пеано.

Первичные понятия:

1. Число (натуральное).
2. Единица.
3. Непосредственно следует за.

Аксиомы: 1. Единица есть число.

2. За каждым числом есть единственное следующее число.

3. Единица не следует ни за каким числом.

4. (Аксиома математической индукции.) Если какое-нибудь утверждение верно для единицы и если всякий раз, когда оно верно для какого-нибудь числа, оно верно и для следующего числа,—то это утверждение верно для любого числа.

В средней школе не излагаются аксиомы арифметики, хотя неявно учащиеся ими пользуются. В школьном курсе арифметики известная часть вводимых понятий дается учащимся без определений (см. гл. II, § 3 и др.).

§ 3. Воспитательная работа

В процессе обучения арифметике осуществляются общие задачи коммунистического воспитания учащихся, как во всяком учебно-воспитательном процессе, но при этом используются и некоторые специфические особенности арифметики как учебного предмета.

1. Учащийся воспитывается с сознанием, что его учебная работа есть подготовка к работе для родной страны. На практическом применении приобретаемых им знаний по арифметике, в частности при решении задач с конкретным содержанием, построенных на числовых данных нашего социалистического строительства, обороны нашей родины, воспитывается у учащихся любовь к родине, вера в ее могущество и стремление быть участником в достижении задач, поставленных для блага советского народа.

2. Чтобы „...воспитывать молодежь в духе беззаветной преданности советскому строю, в духе беззаветного служения интересам народа“¹, учителя арифметики должны познакомить наших учащихся с великими достижениями нашего народа в прошлом и настоящем. Учитель арифметики имеет возможность и в процессе изучения курса, и в особенности во внеклассной работе показать своим учащимся заслуги передовых деятелей науки нашей страны перед человечеством.

Имя Л. Ф. Магницкого и его „Арифметика“ должны быть знакомы учащимся средней школы (см. „Внеклассная работа“). Также должна быть известна им биография знаменитой русской женщины-математика Софьи Васильевны Ковалевской (январь 1950 г. — февраль 1891 г.), прославившей имя русской женщины. Беседы, проводимые ежегодно о Ковалевской, имеют воспитательное значение, несмотря на то, что труды С. В. Ковалевской не могут быть освещены учащимся V и VI классов².

Наша советская молодежь должна знать заслуги величайшего ученого своего времени М. В. Ломоносова (1711—1765), основателя Московского университета, активного борца за русскую науку, сделавшего так много плодотворных открытий и изобретений, как никакой другой ученый в мире.

Изучая вопросы делимости чисел, знакомясь с простыми числами, учащиеся уже в V классе должны

¹ А. А. Жданов, Доклад о журналах „Звезда“ и „Ленинград“, Госполитиздат, 1916, стр. 38.

² О жизни и деятельности С. В. Ковалевской смотри в книгах: С. Штрайх, С. Ковалевская, М., 1935; С. В. Ковалевская, Воспоминания, изд. Академии наук СССР, 1945.

услышать имя замечательного русского математика Пафнутия Львовича Чебышева (1821—1894), сделавшего многие открытия в различных областях математической науки; должны они также услышать имя советского математика, академика Ивана Матвеевича Виноградова, работающего в области теории чисел. Учащиеся средней школы должны знать, что наша страна занимает первое место в мире в области теории чисел и в некоторых других областях математических наук.

Решая с учащимися задачи с конкретным содержанием, учитель знакомит учащихся с грандиозными достижениями социалистического строительства в нашей стране, с выдающимися достижениями героев социалистического труда, рабочих-новаторов, передовиков колхозников.

3. При обучении арифметике формируется мышление учащегося, воспитывается и культивируется сознательность, последовательность и обоснованность суждений, развивается способность анализировать наблюдаемые явления, подмечать общее в отдельных частных фактах (обобщать) и применять общий закон или правило к частным случаям (индукция и дедукция).

При решении арифметических задач широко используются методы анализа и синтеза и постоянно рассматриваются величины в их изменении и взаимосвязи, что служит делу воспитания диалектического мышления учащихся.

4. Обучение арифметике надо ставить так, чтобы воспитывать у учащихся любознательность и интерес к знанию и культуре труда. Правильно поставленное обучение арифметике воспитывает навыки самостоятельной работы, настойчивость в выполнении, стремление довести работу до конца, разрешить трудную задачу, воспитывает чувство ответственности за правильность полученного результата, привычку проверять ответ и умение отыскать и исправить ошибку, если она имеет место.

5. При занятиях арифметикой, как и другими учебными предметами, развивается воля, память, внимание учащегося, создаются навыки регулярно

работать, последовательно, ясно и точно выражать свои мысли (устно и письменно) и т. д.

6. В V классе учащийся, пожалуй, впервые приучается читать книгу по арифметике: научить получать сведения из книги—это большая задача, стоящая перед учителем в деле воспитания умственно развитого гражданина нашей советской страны.

7. Тщательно продуманной работой учитель может достичь больших результатов в воспитании учащихся в процессе обучения арифметике.

§ 4. Политехническое обучение

В связи с постановлением XIX съезда КПСС о введении всеобщего среднего образования и осуществления политехнического обучения изменяется целевая установка общеобразовательной советской школы: школа должна готовить советскую молодежь не только к поступлению в высшие и средние профессиональные учебные заведения, но и к практической деятельности. Должно измениться содержание обучения, характер, стиль учебной работы.

Политехническое образование—это неотъемлемая часть обучения и коммунистического воспитания нашей молодежи, поэтому изучение основ науки, борьба за высокое качество математических знаний учащихся средней школы должны быть органически связаны с борьбой за то, чтобы эти знания учащихся были действенными, чтобы владение ими способствовало освоению промышленного и сельскохозяйственного производства, чтобы советская молодежь умела и могла применять свои знания в смежных науках и в практической деятельности. В достижении поставленных задач большое значение имеет повышение идейности преподавания, активизация внеклассной самостоятельной работы учащихся, их участие в труде и в общественной жизни коллектива.

Ознакомление с основами современной социальной промышленности и сельскохозяйственного производства должно строиться на базе „систе-

матического и прочного усвоения наук¹; без знания основ наук нельзя понять научные основы производства, поэтому политехническое обучение в первую очередь предполагает глубокие и прочные знания, в данном случае по изучаемому курсу арифметики.

Знание математики, которая имеет своим предметом количественные соотношения и пространственные формы реального мира, имеет огромное значение при изучении различных производственных процессов и механизмов, в основе своей базирующихся на математических положениях и выводах. Все содержание школьной арифметики, вся совокупность даваемых в этом курсе знаний и навыков служит делу политехнической подготовки учащихся, ибо вся производственная деятельность людей так же, как и изучение явлений окружающей действительности, связаны с измерениями, с вопросами их точности, с приближенными вычислениями, с применением вспомогательных средств—таблиц и счетных приборов при всевозможных расчетах.

Пути осуществления политехнического обучения в советской общеобразовательной школе в процессе изучения систематического курса арифметики в настоящее время таковы: повышение вычислительной и графической культуры учащихся, создание у них навыков измерения величины; решение задач, отражающих окружающую действительность, задач с геометрическим содержанием, с процентными расчетами; выполнение учащимися некоторых практических заданий по составлению таблиц, сметы или счета на покупку нужных предметов, на выполнение определенной работы; изготовление наглядных пособий к изучаемому курсу арифметики и геометрии, а также измерительных приборов для проведения простейших землемерных работ на местности и некоторые другие.

Усиление самостоятельной работы учащихся как в классной, так и во внеклассной обстановке, выполнение практических и лабораторных работ, в частности вычисление на конторских счетах, изме-

¹ Из постановления ЦК КПСС от 5 сентября 1931 г.

рительных работ на местности, участие в учебных экскурсиях—эти новые методы преподавания математики должны способствовать достижению целей, поставленных XIX съездом КПСС перед советской средней школой.

Вычисления. В объяснительной записке к программе по математике для средней школы сказано, что преподавание арифметики имеет целью научить учащихся сознательно, быстро, уверенно и наиболее рационально производить действия с целыми и дробными числами и применять полученные знания к решению задач и выполнению простейших расчетов практического характера.

В свете задач политехнического обучения к преподаванию арифметики предъявляются требования: возможно лучше обучать учащихся арифметике, привить им высокую культуру вычислений; выработать у них осознанные и прочные вычислительные умения и навыки с тем, чтобы они сумели в дальнейшем самостоятельно и творчески применять их в своей как учебной, так и практической деятельности.

Надо научить учащихся вычислять безошибочно, быстро, применяя наиболее рациональные приемы, соблюдая все требования к записи чисел и знаков действий. У учащихся должна выработаться потребность в самоконтроле, в проверке выполненных действий и умение это сделать, в частности умение путем округления данных приближенно оценить, правилен ли полученный ответ. Так, например, если при умножении $28 \cdot 2,5$ ученик получил в ответе 700, ему должно быть ясно, что ответ не верен, так как $28 \cdot 3$ дает только 84, а $28 \cdot 2,5 < 28 \cdot 3$; правильный ответ: 70.

Наряду с точными письменными и устными вычислениями новой программой по арифметике ставится, хотя и ограниченно, задача—дать учащимся навык в выполнении действий с приближенными числами (округлении результата), что необходимо при любых практических расчетах; научить их пользоваться счетами, по возможности ознакомить с работой на арифмометре (инструментальные вычисления); ставится задача научить пользоваться

таблицами и справочниками, дать учащимся некоторые графические навыки наглядного изображения результатов вычислений. Все указанные вопросы рассматриваются в соответствующих параграфах „Методики арифметики“.

Счетные приборы.

Большое значение в практических вычислениях на производстве, в конторе, в сельском хозяйстве имеет умение пользоваться простейшим счетным прибором — русскими (конторскими) счетами (рис. 1) и арифмометром¹ (рис. 2) простейшей системы. Обучение учащихся советской школы приемам вычисления на наиболее распространенном и простом по устройству счетном приборе — счетах — служит делу сближения школьных вычислений с приемами, употребляемыми в жизни. Счеты — это модель десятичной системы счисления. Учащиеся советской средней школы должны усвоить принципы устройства названных счетных приборов и приобрести достаточный навык в работе со счетами (по возможности и с арифмометром).

Примерное содержание работы со счетами

1. Устройство счетов. Счеты — наглядное пособие при выяснении принципа нумерации целых чисел и десятичных дробей². Откладывание на счетах многозначных чисел, составных именованных чисел, выраженных в килограммах и граммах, рублях и копейках и др.; откладывание десятичных дробей.

2. Сложение и вычитание многозначных чисел, составных именованных чисел и десятичных дробей. Практическая работа: суммирование ряда чисел (сметы, приходо-расходной ведомости).

3. Умножение на счетах и частично деление целых чисел и десятичных дробей (в простейших случаях): на однозначное число, на одну или несколько

¹ В курсе арифметики не говорится о логарифмической линейке и более сложных приборах.

² В тексте „Методики арифметики“ в соответствующих параграфах даны необходимые указания к проведению каждой из указанных работ.

разрядных единиц и др.

4. Вычисление нескольких процентов числа. Учащиеся должны быть приучены всегда, когда это целесообразно, при вычислениях пользоваться счетами, комбинируя работу на счетах с устными и письменными вычислениями. Вычисления на счетах и на арифмометре надо проводить и в старших классах, когда это уместно; в частности, при суммировании приближенных чисел, при обработке материалов

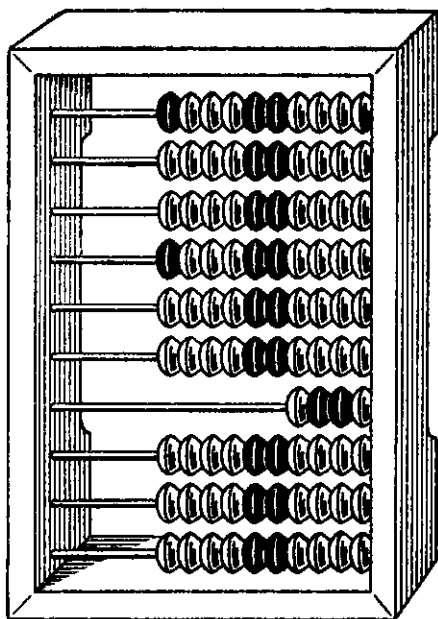


Рис. 1.

землемерных работ, при логарифмических вычислениях и в других случаях.

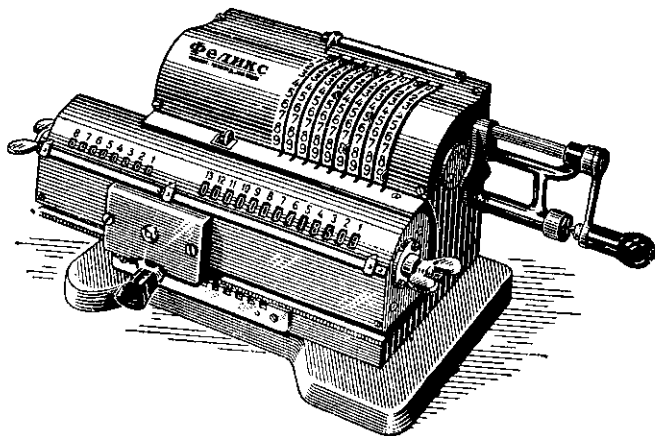


Рис. 2.

Указания к работе со счетами

1. Для облегчения работы на счетах окрашиваются в черный цвет две средние косточки и первые косточки, показывающие единицы разрядов тысяч, миллионов и т. д.

2. Перед началом вычислений все косточки сдвигаются к правой стороне счетов. При работе счеты лежат против правой руки вычислителя в таком же положении, как обычно лежит тетрадь, а именно: верхняя часть прибора несколько сдвинута влево.

3. Откладывание чисел, т. е. передвижение косточек справа налево, производится средним пальцем правой руки; сбрасывание косточек, т. е. их передвижение слева направо, удобно выполнять большим пальцем той же руки.

Полезно научить учащихся пользоваться арифметической счетной линейкой (рис. 3).

Пользуясь арифметической счетной линейкой, учащиеся глубже вникают в принципы составления таблицы умножения (и деления).

При помощи арифметической счетной линейки учащиеся выполняют следующие упражнения:

1) умножение любого двузначного числа на однозначное, 2) деление двузначного и трехзначного на двузначное, 3) умножение любого многозначного числа на двузначное с откладыванием промежуточных результатов на счетах.

Например, 584×76 или 76×584 . В прорезе счетной линейки (не передвигая движка) читают: $76 \times 5 = 380$ (откладывают 380 на счетах на две проволоки выше, чем обычно); $76 \times 8 = 608$ (откладывают на счетах на одну проволоку выше, чем обычно); $76 \times 4 = 304$ (откладывают на счетах); получают ответ: 44384.

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Умножит. x	23	Делится :	24	27	28	29	30	31	32	33	34
22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	2 =	46	= 2	52	54	56	58	60	62	64	66	68
33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	3 =	69	= 3	78	81	84	87	90	93	96	99	102
44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	4 =	92	= 4	104	108	112	116	120	124	128	132	136
55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	5 =	115	= 5	130	135	140	145	150	155	160	165	170
66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	6 =	138	= 6	156	162	168	174	180	186	192	198	204
77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	7 =	161	= 7	182	189	196	203	210	217	224	231	238
88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	8 =	184	= 8	208	216	224	232	240	248	256	264	272
99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	9 =	207	= 9	234	243	252	261	270	279	288	297	306
110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	10 =	230	= 10	260	270	280	290	300	310	320	330	340

Одобрена комиссия по учебникам Министерства

Рис. 3.

Приближенные вычисления.

Осуществляя политехническое обучение в школе, надо уделить серьезное внимание вопросу о приобретении учащимися навыков приближенных вычислений, так как в жизни, в науке, в производственной деятельности людей почти всегда приходится иметь дело с приближенными числами. В программе по арифметике поставлен только один вопрос—округление данных и результатов действий с недостатком и избытком. Но давая приближенный ответ при решении задачи, учащиеся, не зная правил действий с приближенными числами, не знают, с какой точностью они должны дать ответ, и нередко оставляют в ответе лишние десятичные знаки, предполагая, что тем самым увеличивают точность ответа, не понимая, что точность ответа определяется не количеством цифр, а их надежностью. Знание правил действий с приближенными числами сохранило бы много времени и труда у учащихся.

Уже в разделах „Нумерация чисел“, „Целые числа“ в соответствии с программой учащиеся V класса получают понятие о приближенных числах и их округлении, продолжают эту работу в разделе „Десятичные дроби“. Они встречаются с приближенными числами в результате счета, измерения (всегда) и вычисления, в случае деления. Теория приближенных вычислений не может быть дана ученикам V или VI класса, но необходимые правила могут быть выведены из рассмотрения конкретных числовых примеров. Методика доведения до учащихся этих вопросов изложена в соответствующих параграфах данного руководства при изучении целых и дробных чисел; в систематическом изложении эти вопросы рассмотрены в § 21 главы X настоящей „Методики“¹. Нельзя ограничивать работу по приобретению учащимися навыков приближенных вычислений только занятиями по арифметике; всегда и на уроках по другим дисциплинам (алгебре, геометрии, химии, физике), и при выполнении любой практической работы, связанной с вычисления-

¹ В § 22 не излагаются упрощенные приемы вычислений с приближенными числами, которые могут быть рассмотрены учениками старших классов во внеклассной работе.

ми, учитель должен заботиться о том, чтобы приобретенные навыки ученики применяли на деле¹.

Таблицы. При всевозможных технических расчетах и в сельском хозяйстве широко используются таблицы. Постепенно в процессе обучения математике учащиеся знакомятся с принципами составления простейших таблиц (по одному и двум входам), учатся пользоваться ими и частично самостоятельно их составлять. Таковы таблицы умножения (двузначных чисел на однозначные), таблицы простых чисел (например, до 200), таблицы квадратов чисел (n^2) (желательно, чтобы ученики наизусть знали числа от 1^2-20^2), таблицы чисел, обратных натуральным числам ($\frac{1}{n}$), таблицы для вычисления длины окружности (C) и площади круга (Q) по данному диаметру, таблицы процентов (см. гл. XI). При изучении темы „Пропорциональные величины“ учащиеся знакомятся с готовыми таблицами функциональных зависимостей различных величин и сами их составляют (гл. XIII).

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$D=n$ $C=\pi D$	$D=n$ $Q=\frac{\pi}{4} D^2$
1	1	1	1,00	3,14	0,785
2	4	8	0,50	6,28	3,141
3	9	27	0,33	9,42	7,07
4	16	64	0,25	12,57	12,57
5	25	125	0,20	15,71	19,63

В процессе ознакомления учащихся с какой-либо стороной производственного процесса (например, во время экскурсии) учащиеся знакомятся с простейшими таблицами, по которым ведутся практические

¹ В частности, учащиеся средней школы слабо владеют приближенными формулами, дающими достаточно точный результат:

$$\frac{1}{1 \pm \alpha} \approx 1 \mp \alpha; (1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha; (1 + \alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha$$

для случая, когда α мало по сравнению с 1; слабо ориентируются в точности, даваемой трех- и четырехзначными таблицами логарифмов, и т. д.

расчеты; например, имеются таблицы нормы выработки (в гектарах) за одну смену на трактор различной марки и в зависимости от характера работы: вспашки, боронования, посева (таблица составляется по двум входам); таблицы нормы смазочных материалов, нормы горючего; таблицы скоростей резания и скоростей подачи резца при обработке различных металлов на станках и др.

Измерения. Одним из основных требований к преподаванию арифметики в советской общеобразовательной школе с политехническим обучением является требование дать ученикам конкретные и осознанные знания общеупотребительных мер и прочные навыки в измерении величин и в пользовании системой мер.

Измерительные навыки требуются в любой отрасли производства, и в сельском хозяйстве, и в обыденной жизни, и при дальнейших занятиях наукой.

Учащийся V класса должен твердо знать меры метрической системы, их единичные отношения и уметь переводить меры одного в меры другого наименования (раздроблять и превращать).

Для этого: а) Надо давать учащимся конкретное представление о мерах: они должны уметь показать (и оценить) длину в 20 см, 40 см, 1 м и т. д.; 1 кв. см, 1 кв. дм, 1 кв. м. и т. д.

б) Учить определять на глаз, приближенно, размеры комнаты, окна, доски, стола, забора и т. п., различного сорта гвоздей и т. д., для чего оценку размеров, данных учащимся на глаз, проверять непосредственным измерением.

в) Проводить устные упражнения, например: сколько метров в $\frac{3}{8}$ км? в $\frac{2}{5}$ км? Какую часть километра составляют 50 м? 300 м? и т. п. Сколько квадратных метров в 1 аре? в 1 га? Во сколько раз 1 т больше 1 ц? Какую часть центнера (или тонны) составляет 1 кг? Что измеряют литрами? Что означают приставки „кило“, „деци“, „гекто“ и т. д.

Так как запоминание единичных отношений квадратных и кубических мер затрудняет учащихся, то целесообразно пользоваться следующими записями:

1 куб. м = $(1 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100)$ куб. см = 1 000 000 куб. см;
130 кв. см = $(130 : 100 : 100)$ кв. м = 0,013 кв. м и т. п.

г) Знать некоторые размеры, например: длину своего шага, размеры некоторых помещений, расстояния до дома, до леса, до поля и др. Знать, сколько груза можно положить на телегу, на грузовик, в вагон; знать, сколько семян требуется на 1 кв. м при посеве и др.; знать некоторые простейшие соотношения, легко запоминаемые, хотя не точные, но полезные в тех случаях, когда надо быстро приближенно сказать, сколько составляет тот или иной размер или вес, например: 1 ведро \approx 12 л воды; в 1 ведре помещается приблизительно 8 кг картофеля; 1 куб. м кирпича весит приблизительно 1,6 т, сырой песок приблизительно в 2 раза тяжелее воды, взятой в том же объеме, и т. д.

Иногда собранный урожай (или иное) дается в пудах, надо выразить его в килограммах: 1 пуд \approx 16 кг, 61 пуд \approx 1 т, 1 кг \approx 2,5 фунта.

д) Уметь пользоваться числовым или линейным масштабом (гл. IX, § 16): наносить на план в определенном масштабе отрезки, соответствующие действительным длинам предметов и действительным расстояниям; определять действительные расстояния по их изображениям на плане.

е) Непосредственно измерять длины отрезков прямых линий, начерченные в тетради и на доске, при помощи масштабной линейки (или циркуля с последующим перенесением на масштабную линейку); измерять длины предметов и расстояния на местности при помощи сантиметровой ленты, рулетки, мерной ленты¹.

Конкретные задачи.

Большое воспитательное значение имеют задачи конкретного содержания. Задачу можно считать действительно конкретной, если она решает вопросы, актуальные для учащихся, такие, с которыми они встречаются в окружающей их действительности. В задаче конкретной не только сюжет и числовые данные должны быть реальны, но и постановка вопроса не должна быть искусственной. Подросток охотно и созна-

¹ Подробнее см. „Практические работы“, стр. 31.

тельно выполнит вычисление, если перед ним поставить актуальный вопрос: „Нам поручено убрать $3\frac{1}{2}$ га, а на сегодняшний день мы убрали 28 000 кв. м.

Какой процент работы еще не выполнен? Сколько времени мы будем работать, если попрежнему в день будем убирать . . . кв. м? На сколько процентов (или на сколько квадратных метров) надо увеличить производительность труда, чтобы сократить время уборки в $1\frac{1}{2}$ раза?“ и т. д. Но живого отклика не найдет учитель у учащихся, если поставит вопрос таким образом: „Нам поручено убрать $3\frac{1}{2}$ га; мы выполнили 80% задания. Сколько гектаров мы уже убрали?“ Ведь ответ уже знали, когда давали число 80%.

При составлении задач конкретного содержания необходимо соблюдение определенных требований: в этих задачах должны отражаться вопросы современности, содержание задач и числовые данные должны быть взяты из окружающей действительности, они должны способствовать коммунистическому воспитанию учащихся. В задачах конкретного содержания рассматриваются вопросы, понятные ученикам данного возраста, близкие их интересам; содержание задачи должно быть либо знакомо, либо легко пояснено ученикам, чтобы не отвлекать их внимание и время на значительные дополнительные разъяснения. В конкретных задачах даются реальные числа, не противоречащие жизненной практике; числа в задаче должны соответствовать рассматриваемым в условии величинам, не допускать замены одной величины другой¹. Кроме этого, условие задачи не должно быть многословным (нередко условие конкретной задачи в задачнике занимает до $\frac{1}{2}$ страницы), не следует загромождать условие задачи

¹ Но в отдельных случаях, когда большая точность в ответе не имеет практического значения, целесообразно округлять многозначные числа для более яркого показа существа вопроса.

большим количеством числовых данных, не используемых при ее решении (например, датами, не имеющими существенного значения), в то же время желательно в отдельных случаях в условии задачи не указывать все числовые данные, необходимые для ее решения, с той целью, чтобы учащиеся самостоятельно установили эти данные (путем ли измерения, вычисления, использования справочников или беседы со специалистами).

Все задачи, даже иногда имеющие сюжетом выполнение плана на заводе, сбор урожая в колхозе и т. п., но построенные на данных, не взятых из действительности, являются по существу задачами, хотя и нужными, но отвлеченными, не служащими достижению вышеуказанных образовательных целей.

Эти задачи по преимуществу и даются в задачниках, издаваемых на много лет.

Замечания. 1. Число конкретных задач, которые можно решить в течение года, невелико; учитель должен тщательно подготовить каждую задачу и проверить решение у каждого ученика.

2. При решении конкретной задачи, в большинстве случаев не имеющей ответа в задачнике, учащийся особенно сознает ответственность за правильность выполняемых им вычислений. На решении этих задач, как и всяких задач, воспитывается у учащихся навык тщательно производить арифметические расчеты, привычка предварительно прикинуть ответ в уме для того, чтобы ясно представить себе величину ожидаемого результата. На этих задачах уясняется значение приближенных вычислений.

3. Задачи, в условие которых входят понятия из других дисциплин, даются на уроках арифметики лишь в том случае, если учащиеся предварительно ознакомились с этими понятиями на уроках по соответствующим дисциплинам, например: градусы Реомюра и Цельсия, долгота и широта места, передача движений и т. п.

Методический математический журнал должен помочь учителю, помещая тексты отдельных конкретных задач, сообщая соответствующие числовые данные; на методических объединениях учителей

должны обсуждаться тексты задач, предлагаемые учителями.

Задачи на числах социалистического строительства. Большое воспитательное значение имеет яркий и убедительный показ на числах социалистического строительства тех огромных задач, которые ставятся ежегодно государственным планом СССР и перевыполняются советскими людьми. Числовые данные, публикуемые в центральной и местной печати, дают возможность учителю математики вместе с учащимися составлять арифметические задачи по всем разделам курса и показывать на числах образцы героического труда советских людей на производстве и в сельском хозяйстве, их новаторство и инициативу. Развитие и любознательные учащиеся советской школы сами живо интересуются достижениями родной страны, они часто знают не только данные выполнения плана на том производстве, на котором работают их родители, но и месячные и годовые отчеты по различным отраслям нашего народного хозяйства, которые публикуются в печати. Учителю надо только предложить своим ученикам записывать некоторые числовые данные, заинтересовать их самостоятельным составлением задач, и он получит богатый материал, который может использовать и для работы в классе. Показательны также данные социалистического строительства в странах народной демократии. В то же время числовые данные, характеризующие жизнь трудящихся в капиталистических странах, сопоставление их с нашей действительностью убедительно покажут учащимся преимущества социалистического строя и социалистической культуры над капиталистическими. Эта работа воспитывает у учащихся чувство национальной гордости за достижения своей родной страны и желание самим участвовать в строительстве коммунистического общества.

Задачи технического содержания. Политехническое обучение учащихся предполагает знакомство в теории и на практике с главными отраслями производства и тесную связь обучения с общественно-производительным трудом. В любом промышленном и сельскохозяйственном производстве выпускникам

средней школы придется иметь дело с машинами. Некоторые первоначальные сведения о действии частей машин могут получить учащиеся уже на занятиях по арифметике в V и VI классах при решении задач с практическим производственным или техническим содержанием, известным учащимся. Так, в арифметических задачниках, предназначенных для учащихся V и VI классов, имеются задачи на вычисление скорости движения различных механизмов, станков, на вычисление работы, выполняемой машинами, как, например, трактором, сенокосилкой, экскаватором и другими, задачи, связанные с железнодорожным делом, задачи по расчету размеров диаметров шкивов, делающих определенное число оборотов в минуту, и обратные об определении числа оборотов зубчатых колес, о передаче заданного числа оборотов системой шкивов и т. д., эти последние задачи с успехом могут решать учащиеся VI класса в теме „Отношение. Пропорции“.

Решение конкретных практического характера задач способствует более глубокому усвоению теоретического курса арифметики, но в то же время это внесение элементов политехнизации в занятия по арифметике не должно нарушать систему изложения курса.

Задачи геометрического содержания. Решение задач геометрического содержания в курсе арифметики дает учащимся некоторый запас геометрических образов и понятий, на основе которого они в дальнейшем приступают к изучению систематического курса геометрии. С геометрическими формами учащиеся V класса знакомятся наглядно, путем конкретного использования для этой цели предметов окружающей обстановки, моделей, чертежей.

При решении задач с геометрическим содержанием учащиеся приобретают определенные практические умения по расчету площади, объема, веса, учатся вести вычисления с приближенными числами, которые всегда имеют место при решении практических вопросов, приучаются в этих случаях округлять получаемый результат.

Задачи с геометрическим содержанием следует решать одновременно с другими задачами. Сначала

на целых числах повторяются вопросы, известные ученикам из курса начальной школы, а именно: расчет площади квадрата, прямоугольника, объема куба и параллелепипеда; затем решение аналогичных задач продолжается в действиях с обыкновенными дробями и, в особенности, в действиях с десятичными дробями, где дополнительно решаются задачи на вычисление поверхности параллелепипеда и куба, длины окружности и площади круга, поверхности и объема цилиндра (см. гл. XIV).

Практические работы. В связи с требованием поднять качество всей учебной работы в общеобразовательной школе и обратить должное внимание на трудовую подготовку учащихся стоит вопрос об активизации методов обучения, о том, чтобы изучение систематических курсов школьных дисциплин сопровождалось практическими и лабораторными работами учащихся. По арифметике эти работы могут проводиться и в классной обстановке, и во внеурочное время как в порядке выполнения домашних заданий, так и при проведении специальных заданий, в частности землемерных работ.

Примерные практические и лабораторные работы

В классе. 1. Непосредственное измерение отрезков прямой линии, начерченных на доске, в тетради, расстояний между предметами на столе; измерение длины стола и других предметов.

Инструменты: масштабная линейка, циркуль для переноса измеряемой длины, сантиметровая лента.

2. Вычисления на счетах.

3. Составление таблиц, диаграмм и графиков.

4. Работы по развитию глазомера при определении небольших расстояний и размеров.

5. Выполнение необходимых измерений (с точностью до 1 мм) и вычисление периметров и площадей фигур (моделей), изготовленных из картона или толстой бумаги.

6. Выполнение необходимых измерений и вычисление площади поверхности и объема куба и прямоугольного параллелепипеда (на моделях).

7. Определение действительных расстояний и площадей на местности, по карте и плану, выполненных в определенном масштабе.

8. Решение задач с предварительным измерением некоторых величин, например: определение объема коробки, веса кирпича, чугунной плиты, емкости сосуда и т. п.

9. Ознакомление с землемерными инструментами, необходимыми для проведения практических работ на местности (при помощи настольного набора землемерных инструментов, высотой 20—30 см).

Домашние задания. 1. Измерить длину, ширину и высоту своей комнаты, а также узнать размеры окон и дверей. Сделать расчет: а) необходимого количества обоев для оклейки этой комнаты (клеить обои надо на расстоянии 0,35 м от потолка, т. е. оставить карниз) и б) необходимого количества кусков узкого бордюра. На обрезки и другие потери прибавлять по 4%. Составить смету расходов на материалы. Недостающие данные узнать.

2. Узнать размеры классной комнаты, в которой происходят занятия, и определить: а) достаточно ли света в классе и б) достаточно ли воздуха.

Указание. Световая площадь должна составлять $8 \frac{1}{2}\%$ от площади пола; на каждого учащегося полагается не менее $4 \frac{1}{2}$ куб. м воздуха.

3. Измерять температуру воздуха ежечасно в течение одного дня или в течение нескольких дней в одни и те же часы, заполнить таблицу:

Число и месяц	Время в часах	Температура воздуха

Построить график изменения температуры соответственно изменению времени¹.

¹Считаем возможным пояснить и указать учащимся, как откладывают „единицы холода“.

4. Составить таблицу, например, такую, как вышеуказанная, или таблицу изменения веса от возраста детей 9—13 лет (использовав справочник) и др.

5. Заполнить таблицу распределения своего времени в течение дня; показать на круговой диаграмме.

Вид занятия Время в часах и минутах	Уроки в школе	Самостоятельное живание	Занятия физкультурой	Отдых, чтение	Помощь семье	Общественная работа	Подготовка уроков	Сон

6. Составить диаграмму, вычертить график по условию задачи, в частности составить график движения поезда.

7. Познакомиться с тем, как в магазине оформляют счет, например, на покупку необходимых канцелярских принадлежностей для школы, конторы.

8. Изготовить наглядное пособие к решению задачи с геометрическим содержанием (см. гл. XIV)¹.

9. Изготовить из картона или толстой бумаги модели изучаемых фигур, разверток и выкроек, объемных тел с тем, чтобы использовать их в качестве раздаточного материала на уроке для проведения лабораторной работы.

10. Провести практическую работу по вычислению отношения длины окружности к ее диаметру $\frac{C}{D}$.

11. Собрать числовые данные по заданию учителя на производстве, где работают родители ученика, в колхозе.

Работа на местности. Работы на местности, связанные с курсом арифметики V класса, проводятся в I и IV четвертях. В VI классе землемерные работы проводятся в связи с занятиями по геометрии.

Примерные работы (подробные указания даны в „Приложении“, стр. 531).

¹ Более сложные наглядные пособия изготавливаются учащимися в школьных мастерских под руководством инструктора.

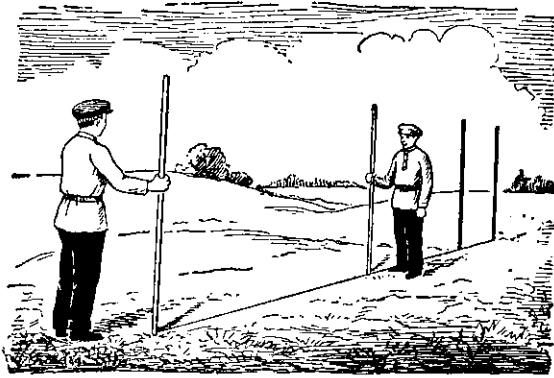


Рис. 4а.



Рис. 4б.

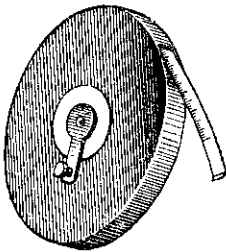


Рис. 5а.

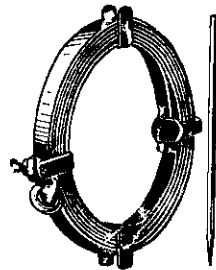


Рис. 5б.

1. Провешивание прямой (рис. 4а) при помощи вех (рис. 4б) и измерение расстояния между двумя пунктами на местности.

Расстояние измеряется рулеткой (рис. 5а) или мерной лентой (рис. 5б); на поле для измерения расстояния употребляется полевой циркуль (рис. 6), расстояние между ножками которого $1\frac{1}{2}$ — 2 м, высота соответствует росту человека.

2. Измерение шага учащегося.

Подсчет шагов производится парами, причем считают шаги только правой ноги (начинают движе-

ние с левой ноги). Имеется специальный прибор— шагомер, отмечающий число пройденных шагов (рис. 7).

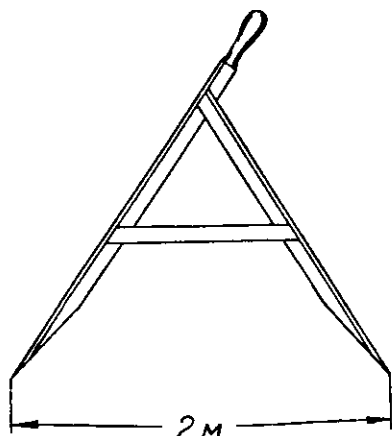


Рис. 6.

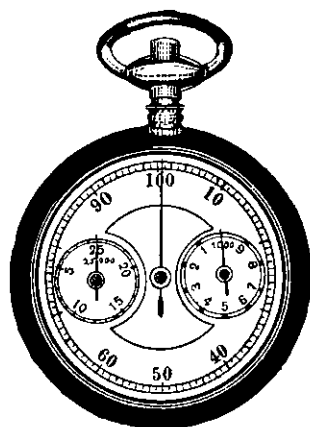


Рис. 7.

Пример. Заполняют две таблицы; по 2-й таблице ученик всегда может вычислить пройденное им расстояние, зная число сделанных шагов.

№ измерения	Расстояние в метрах	Число шагов	Размер шага	Средний размер шага
1	100	150	0,67	1 шаг—63 см
2	"	170	0,59	
3	"	160	0,62	
Среднее	100	160	0,63	

Таблица перевода шагов в метры

Число шагов	10	20	40	60	80	100	200
Метров	6,3	12,6	25,2	37,8	50,4	63	126

3. Вычисление расстояния (в метрах), измеренного шагами (например, 274 шага).

200 шагов	—	126 м
60 "	—	37,8 м
10 "	—	6,3 м
4 шага	—	2,5 м
274 шага	—	172,6 м \approx 173 м.

4. Определение расстояний на глаз, с последующей проверкой измерением (рулеткой, мерной лентой). Вычисление допущенной ошибки.

5. Построение на местности прямого угла при помощи веревки длиной 12 м, разделенной в отношении 3, 4, 5.

6. Построение на местности прямого угла (рис. 8) при помощи эккера.

Инструменты: эккер (рис. 9а и 9б), вехи (высотой 1,5 м); колышки (высотой 0,4 м); 4) мерная лента или рулетка.

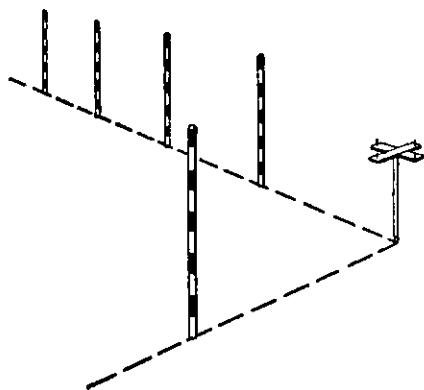


Рис. 8.

7. Построение на местности ара и гектара в форме квадрата и прямоугольника: (20×5) кв. м; (25×4) кв. м.

8. Работа с эккером¹. Построение при помощи эккера углов в 45°, 30°, 135°; провешивание прямой; построение перпендикуляров к прямой.

9. Съёмка плана школьного здания при помощи эккера. Вычерчивание плана (например, в масштабе 200 м, 300 м в 1 см) и вычисление площади земельного участка, занятого зданием.

10. Маршрутная (глазомерная) съёмка местности применяется в тех случаях, когда не требуется большая точность, когда план местности нужен

¹ См. „Приложение“ в конце книги, стр. 531.

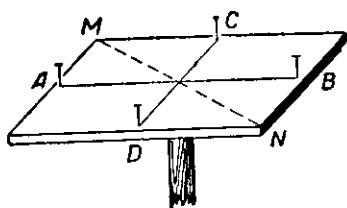


Рис. 9а.

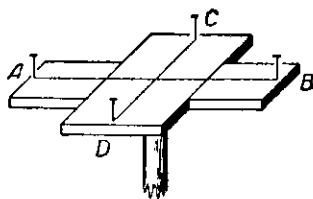


Рис. 9б.

только для общей ориентировки. Желательно, чтобы учащиеся, совершая экскурсии, проводили глазомерную съемку дороги, по которой они идут, и близлежащих к ней пунктов. Эту съемку по маршруту называют также маршрутной; получаемый при этом план называется „кроки“¹. Пособия, применяемые при глазомерной съемке, крайне просты: планшет—доска размером (30×40) кв. см или картон; масштабная линейка (трехгранная), которая употребляется и для визирования на объекты, и для прочерчивания направлений, и откладывания соответствующих размеров (в масштабе); надо иметь также компас и, конечно, карандаш. Расстояние между пунктами при глазомерной съемке измеряется шагами и выражается в метрах по таблице перевода шагов в метры. Масштаб съемки обычно берут крупный, например 100 м в 1 см (1:10000).

Планшет (рис. 10) ориентируют по компасу. Выбирают начальный пункт, соответствующие направления наносят (чертят) на планшет; повороты пути также отмечают на планшете; положение отдельных объектов определяют способом засечек, причем для контроля положение объекта определяется пересечением трех и более направлений².

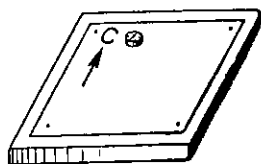


Рис. 10.

11. Задача. Выделить на пришкольном дворе площадку раз-

¹ От французского слова „набросок“.

² См. „Приложение“, стр. 531.

мером (33×63) кв. м. На ней наметить площадку для волейбола (9×18) кв. м и для баскетбола (12×22) кв. м, причем каждая из этих площадок со всех сторон должна иметь свободные дорожки шириной 2 м.

Экскурсии. Участие школьников в экскурсиях, в частности в производственных экскурсиях в городе и деревне, имеет большое значение для политехнической подготовки учащихся и для всей учебно-воспитательной работы школы. Во время экскурсии учащиеся видят связь изучаемых ими основ науки с жизнью, достижения советского народного хозяйства. Это воспитывает у молодежи чувство национальной гордости за свою родину, пробуждает интерес к технике, промышленности и сельскому хозяйству, стремление быть участником социалистического строительства.

1. Учащимся предлагается во время экскурсии, организуемой по какому-либо другому предмету (географии, биологии), выполнить определенное математическое задание:

- а) провести маршрутную съемку по ходу экскурсии;
- б) определить размеры (длину, ширину) пруда, озера, у которого остановилась экскурсия;
- в) составить план небольшого участка.

2. Во время экскурсии в поле узнать, как вычисляют (приближенно) объем стога сена, скирды, силосной ямы, и сделать соответствующие расчеты объема и веса запасенного сена или силоса, числа грузовых машин, нужных для вывоза этого сена, и др. В простейшем случае, когда стог имеет круглую вершину, для практического выполнения работы надо иметь в качестве инструмента только одну мерную веревку. Эта веревка перекидывается через верх стога, и отсчет показывает приблизительно двойную высоту стога; окружность основания (обхват) также измеряется мерной веревкой. Учащиеся знакомятся с таблицами, в которых дан сравнительный вес 1 м³ клевера (60 кг), бурьяна (25 кг) и др., и сами составляют несложные задачи-расчеты.

3. Во время экскурсии в поле учащиеся могут познакомиться с тем, как учетчики колхозных полей измеряют полевым циркулем ширину загона (рабочее место трактора) и при определенной длине его быстро вычисляют площадь обработанной земли (в гектарах), при этом учащиеся увидят, что вычисления площади выполняются так, как их учат в школе,—это имеет большое воспитательное значение. И снова учащиеся выполняют практические расчеты, сравнивая в гектарах площади, вспаханные за смену трактористами на тракторах различных марок, при одной и той же длине участка (например, 1250 м) и измеренной учетчиком ширине загона (135 м, 180 м и т. д.)

4. Во время экскурсии на стройку дома учащиеся могут узнать размеры одной из самых крупных деталей здания—железобетонной панели и рассчитать, сколько надо иметь таких панелей для того, чтобы соорудить пол и потолок на каком-либо участке строящегося дома.

5. При посещении любого производства, строительства учащиеся V—VI классов могут собрать числовые данные о производительности труда, о выполнении задания и др. Так, во время одной экскурсии ученики увидели, как подается на стройку кирпич шахтоподъемниками и кранами (до 200 кг за один раз), и что каменщик за смену укладывает до 12 000 кирпичей; они узнали, что еще 20—25 лет назад кирпич переносили на плечах при помощи „козы“, поднимали вверх к месту работы (100—120 кг), и каменщик за смену мог уложить всего 300—500 штук кирпича. Конкретные задачи учащиеся составляют по собранным числовым данным.

6. Работая на пришкольном или приусадебном участке, учащиеся V—VI классов, умея вычислять площади простейших геометрических фигур, применяют свои знания для подсчета выполненной работы, числа трудодней, полагающихся за эту работу, знакомятся с соответствующими таблицами.

В соответствии с местными условиями учитель организует с учащимися экскурсии на различные темы.

§ 5. Самостоятельная работа на уроке

В историческом постановлении ЦК ВКП(б) о школе от 25 августа 1932 года дано указание о необходимости систематически приучать детей к самостоятельной работе.

Одной из задач преподавания математики в школе является воспитание у учащихся творческой инициативы и навыков самостоятельного мышления с тем, чтобы воспитанник советской школы умел применить эти качества в дальнейшей самостоятельной работе по повышению своего научно-теоретического уровня и в дальнейшей своей деятельности на пользу Советского государства. Знания и умения при обучении получают в результате определенных целеустремленных усилий и упражнений; в частности, умение выполнять операции над числами и решать арифметические задачи нельзя приобрести без самостоятельности, без настойчивой самостоятельной умственной работы. Под руководством учителя учащиеся учатся самостоятельно мыслить и работать. Надо воспитывать у учащихся интерес к самостоятельной работе, желание самостоятельно отыскать решение задачи, обоснование сделанного вывода. Надо учить самостоятельно работать дома, читать текст учебника, поэтому, задавая урок на дом, следует уделять несколько минут для необходимых указаний как по существу работы, так и по ее организации. Необходимо создавать у учащихся привычку контролировать самим свою работу, проверять, удовлетворяет ли полученный ими ответ поставленным условиям, и настойчиво, в случае ошибки, добиваться верного результата.

В каждой самостоятельной работе должна иметь место новая для учащихся трудность, которую они должны самостоятельно преодолеть. Трудность должна быть посильной для преодоления учащимися, иначе явная невозможность преодолеть ее может привести к нежеланию браться за работу и сейчас и впредь.

Когда учащийся выполняет работу у доски, у него не вырабатывается уверенности в собственных

силах, он рассчитывает не на себя, а на поддержку со стороны учителя. Поэтому полезно часто проводить короткие полусамостоятельные и самостоятельные работы в классе.

Большой и очень благодарный материал для самостоятельной работы дает решение задач. В главе XII „Задачи“ указаны приемы, способствующие воспитанию самостоятельного творческого мышления учащихся. Полусамостоятельная работа служит подготовительной ступенью к самостоятельной работе. Если предлагаемая для решения задача трудна (по мнению учителя) для самостоятельного решения значительной части класса, то учитель частично оказывает помощь в ее решении—работа будет полусамостоятельной. Эта помощь оказывается до того, как учащиеся приступают к самостоятельному решению; размер и содержание ее различны: учитель может обсудить с учащимися и план решения задачи, и действия, которыми она решается; может обсудить только план решения, может сделать только некоторые указания.

Так как самостоятельная работа, о которой здесь говорится, имеет своей главной целью—учить самостоятельно мыслить, то в процессе работы учитель оказывает дополнительно помощь более слабым учащимся, наблюдая за их работой, давая необходимые указания, обучая их рассуждать.

Надо приучать учащихся проверять ответ, который они должны получить в результате самостоятельной работы, и вообще следует приучать их не сразу пользоваться ответом задачника, вначале самим проверить получающийся результат; иногда только прикинуть, возможен ли он, не слишком ли мал или велик, иногда сделать приближенно оценку, округлив числа, над которыми произведена операция.

В главе „Задачи“ даются конкретные примеры выполнения сказанного. Надо отметить, что проверка правильности полученного результата и связанный с этим анализ задачи служит одним из средств обучения сознательному и самостоятельному обдумыванию и решению задач.

§ 6. Чтение. Речь учащихся

1. Одна из важнейших задач при обучении математике—привить вкус к чтению математической книги (к занятиям математикой) и научить читать математическую книгу. На занятиях по арифметике в V классе учитель должен заботиться о том же. В главе „Задачи“ подробно изложены приемы, которыми обучают учащихся сознательно читать текст задач по задачнику; те же приемы применяются при обучении чтению учебника: или, объяснив вопрос, учитель предлагает ученику прочесть вслух соответствующий текст по учебнику и дает необходимые разъяснения, или предлагает читать предварительно необъясненный текст, или проверяет, как поняли учащиеся текст по учебнику при чтении „про себя“, и т. п.

Не следует ограничивать чтение учащихся учебником и задачником, надо рекомендовать им популярные книги по арифметике и организовать внеклассное чтение их.

Примечание. Учитель арифметики должен знать учебник и задачник по арифметике, которыми пользуются учащиеся, во всех деталях.

2. В работе „Марксизм и вопросы языкознания“ И. В. Сталин указывал на неразрывную связь мышления и языка. Результат работы мышления облекается в слова, речь; правильная, четкая, логически стройная математическая речь способствует ясности понимания, развитию мышления учащихся, достижению осознанных, глубоких и прочных знаний.

Развитие речи, в данном случае математической речи учащихся, является одной из задач математического образования. Учащихся надо приучать (это достигается не сразу) к правильной и точной речи (сказать то, что нужно, и ничего лишнего). В этом, как и во всех других случаях, учитель должен быть примером для учащихся и тщательно следить за своей речью и речью учащихся: не допускать неправильные и неполные формулировки, стилистически неправильно построенные предложения (в частности, в постановке вопросов при решении задач), неправильные выражения („сзади нули“, „ум-

ножить на скобку"), неправильное употребление терминов („простое число"—вместо „целое", „сократить"—вместо „разделить" и т. п.).

Учитель должен постоянно внимательно следить за речью учащегося, всегда исправлять допускаемые им неправильные и неточные выражения, привлекая к исправлению ошибок и недочетов остальных учащихся. Надо требовать от учеников правильного согласования слов в падежах, в частности в именах числительных, правильного употребления союзов („если", „так как", „или") и предлогов (вычесть „из", отнять „от") и т. д.

Учитель развивает и обогащает речь учащихся, если в своей речи дает образцы четких, точных и правильных формулировок, выражений и последовательных рассуждений.

§ 7. Наглядность. Диаграммы. Графики

Применение наглядности является одним из действительных средств в преподавании, так как исходным моментом в познании всегда является живое созерцание. „От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике—таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности"¹. Применение наглядности—одно из средств, обеспечивающих правильные чувственные восприятия; но чувственное восприятие учащихся надо организовать, правильно и в меру используя наглядные пособия.

1. В начальной школе или в младших классах средней школы при обучении арифметике широко используется наглядность. Это понятно, так как там создаются у учащихся первые представления о математических понятиях, и чем ярче, нагляднее впечатления, получаемые детьми (используется не только слуховая, но и зрительная и моторная память), тем прочнее вырабатываемые представления; поэтому в младших классах широко используются счетные и измерительные пособия и приборы при изучении арифметики, как при выяснении вновь

¹ В. И. Ленин, Философские тетради, 1947, стр. 146.

вводимых понятий, правил, так и при повторении, при выявлении сознательности усвоения.

В „Методике арифметики“ указываются в соответствующих главах рекомендуемые наглядные пособия: абак, линейки, счеты, отрезки прямой (в частности, при решении задач) (гл. XII) и при изучении дробей, выяснении понятия дроби, при сравнении дробей, рассмотрении главного свойства дроби и т. д. При изучении геометрических фигур рекомендуются модели.

2. Разнообразные графические методы широко применяются в различных областях научной и общественной деятельности людей, и в школе необходимо для развития образного мышления учащихся изображать наглядно, графически изучаемые величины и их соотношения. В начальной школе учащимся дают наглядное представление об определенном числовом значении величины и о сравнении величин при помощи диаграмм, в виде отрезков, прямоугольных полос или секторов круга.

В V и VI классах следует продолжить работу по чтению диаграмм и по изображению численных значений сравниваемых величин диаграммами, выполненными в определенном масштабе, на конкретном материале, актуальном и интересующем учащихся (11—12-летнего возраста) нашей советской школы.

Графики. Учащихся V класса можно познакомить и с идеей наглядного способа изучения какого-нибудь процесса—графического способа. График показывает наглядно изменение одной величины в зависимости от другой (функциональную зависимость). При построении графика учащимися V класса нет необходимости вводить термины: „координаты“, „система координат“ и т. п. Достаточно научить читать, исследовать и строить график по отрезкам, отложенным в определенном масштабе, на разграфленной бумаге. Ломаная линия, соединяющая верхние концы вертикальных отрезков, показывает ход изменения рассматриваемой величины. Вертикальные отрезки можно не вычерчивать, а только отмечать их верхние концы, через которые проводится график. На горизонтальной оси откладываются следующие друг за другом значения

одной величины, на вертикальной оси—числа, соответствующие числовым значениям исследуемой величины.

Замечания. 1. Масштаб по горизонтальному и вертикальному направлению можно брать различный, так как рассматриваемые величины не одного и того же рода.

2. Если по горизонтальной оси в определенном масштабе брать меньшие промежутки (более близкие значения данной величины), то линия-график будет более приближаться к кривой линии. Например, если измерять через час температуру воздуха и наносить на миллиметровую (или клетчатую) бумагу показания термометра, то получим график в виде резко ломаной линии, если измерять температуру через каждые $\frac{1}{2}$ часа, то начерченный в том же масштабе график будет представлять собой ломанную линию менее резкую. Самопишущий же прибор, отмечающий непрерывно температуру воздуха, вычерчивает более или менее плавную кривую.

3. График не только дает наглядное изображение изменения исследуемой величины, в отдельных случаях он позволяет вычислять (с достаточной степенью точности) некоторые неизвестные значения исследуемой величины, заключающиеся между двумя известными значениями той же величины (интерполировать).

4. Полезно рассмотреть (или построить по расписанию) график движения поездов на некотором участке пути (например, от города *A*, где живет учащийся, на 100 км до города *B*, и обратно) и установить по графику, какие поезда встречаются и на каком расстоянии от *A*; в котором часу определенный поезд проходит через определенную станцию, и т. д. Примерный график движения поезда см. на рисунке 11.

5. При изложении методики преподавания отдельных вопросов нами указывается тот дидактический материал, который полезно использовать при объяснении теории. Все пособия, которыми можно оборудовать педагогический процесс по арифметике (абак, счетные линейки, палочки Непера и т. д.), крайне просты и могут быть изготовлены силами учеников во внеклассной работе. Также нетрудно изготовить необходимые таблицы, диаграммы, процентный круг, записи решений интересных задач. Все эти пособия должны, по возможности, быть на виду у учащихся для того, чтобы учащийся мог рассмотреть их во внеурочной обстановке и, заинтересовавшись, предложить и свою собственную конструкцию и им самим составленную диаграмму и т. д.

Учитель математики должен заботиться о том, чтобы в школе были наглядные пособия, измерительные и счетные приборы, набор тел и деталей для практических работ (по измерению), образцы таблиц и табличных наглядных пособий, а также полуфабрикаты для самостоятельного изготовления моделей, таблиц и диаграмм.

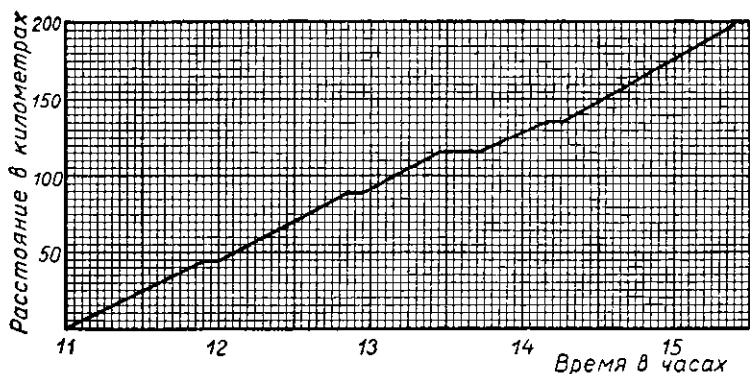


Рис. 11.

Пассажирский №			
Прибытие	Отправление	Расстояние в километрах	Город
—	11.00	0	Москва-Каз.
11.54	12.01	44	Раменское
12.50	12.56	88	Воскресенск
13.27	13.43	116	Голутвин
14.10	14.16	135	Луховицы
15.23	—	198	Рязань II

§ 8. Содержание и план занятий по арифметике

В соответствии с учебным планом, установленным для занятий по арифметике в V и VI классах, учитель имеет:

Чет-верть	Сроки	Число недель	Число уроков	
			V класс	VI класс
I	1. IX — 6. XI	8,5	52	20
II	9. IX — 31. XII	7,5	45	14
III	12. I — 25. III	10	60	21
IV	5. IV — 30. V	7	41	11
ИТОГО:		35,0	198	66

1. Первым разделом программы арифметики V класса является повторение и систематизация пройденного в первых четырех классах школы. Для этого отводится весь первый месяц занятий по арифметике, в течение которого рассматриваются: „Нумерация чисел“ (устная и письменная), „Метрическая система мер“ и „Четыре действия с натуральными числами“ (включая решение соответствующих задач).

Далее, перед тем как перейти к изучению дробных чисел, ставится тема „Делимость чисел“. Это позволяет достаточно обоснованно рассматривать вопросы преобразования обыкновенных дробей. Основное внимание в курсе арифметики V класса обращается на изучение тем „Обыкновенные дроби“ и „Десятичные дроби“, на что отводится 140 часов, т. е. две трети всего времени занятий по арифметике в V классе. При изучении действий умножения и деления дробей, в частности при нахождении части числа и числа по известной величине его части, а также при вычислении отношения двух чисел, учащиеся решают три простые задачи на проценты, в систематическом плане тема „Проценты“ изучается в VI классе. Приобретению прочных навыков в процентных расчетах придается в настоящее время в связи с требованием политехнического обучения большое значение, как практически важному навыку, и изучению этого вопроса уделяется значительное время и в V и в VI классах. Обучение процентным расчетам должно быть тесно связано с решением практических задач. Программа курса арифметики завершается в VI классе темой „Пропорции. Пропорциональность величин“. Это первая тема, в которой учащиеся приводят в систему имеющиеся у них сведения об изменении одной величины в зависимости от изменения другой. В V классе учащиеся устанавливали изменение результатов четырех действий от изменения компонентов, изменение величины дроби в зависимости от изменения ее членов и т. д.; кроме того, учащиеся VI класса знают некоторые конкретные зависимости величин, встречающиеся в условиях задач, соответствующие их жизненному опыту: изменение стоимости покупки от изменения ее размеров и т. п. Специальное

изучение в VI классе двух видов зависимостей — прямой и обратной пропорциональности величин — оправдано тем большим значением, которое эти два вида имеют в практической деятельности людей; большинство арифметических задач построено на рассмотрении величин, находящихся в прямой или обратной пропорциональной зависимости.

2. Перед тем как учитель приступает к занятиям по арифметике с учащимися, он планирует свою работу на год, а затем более детально разрабатывает план занятий на I, II, III и IV четверти.

Приводим образцы годового и четвертного планов.

Примерное распределение времени на год.

Чет- верть	Т е м а	Число часов
V класс (6 часов в неделю)		
I	1. Повторение и систематизация пройденного в начальной школе. Решение задач	20
	2. Практические работы (часть)	2
	3. Делимость чисел	20
	4. Обыкновенные дроби (до главного свойства дробей)	10
II	1. Обыкновенные дроби (включая начало деления)	45
III	1. Обыкновенные дроби (окончание)	35
	2. Десятичные дроби (до деления)	28
IV	1. Десятичные дроби (окончание)	22
	2. Практические работы на местности (остальные)	4
	3. Повторение и решение задач на все разделы пройденного курса	12
VI класс (2 часа в неделю)		
I	1. Проценты	20
II	1. Пропорции	10
	2. Прямая и обратная пропорциональность величин (до обратной пропорциональности)	4
III	1. Прямая и обратная пропорциональность (окончание)	18
	2. Повторение. Решение задач по всему курсу	3
IV	1. Повторение. Решение задач по всему курсу	11

Образец календарного плана по арифметике для V класса на I четверть (работа планируется на 1—2 часа).

Номер и название темы	Содержание		Число часов	Календарные сроки	Примечания по выполнению
	Новый материал	Повторение			
4. Обыкновенные дроби	Образование дробей	Решение задач на все действия с целыми числами	1	с 25 по 30 октября	
	Исключение из неправильной дроби целого числа	Решение задач на нахождение двух чисел по их сумме и разности или отношению	1		
	Обращение смешанного числа в неправильную дробь	Решение задач с геометрическим содержанием	1		
	Сравнение дробей по величине	Повторение 1-й и 2-й тем программы	2	с 1 по 6 ноября	
	Изменение величины дроби с изменением ее членов		2		
	Подготовка к контрольной работе за четверть		2		
	Контрольная работа и ее анализ		2		
Итоговый опрос	2				

К каждому уроку учитель составляет детальный план его проведения. В плане урока должны быть указаны тема урока, параграфы учебника, которые будут рассмотрены, номера примеров и задач из задачника, которые будут решены учащимися в классе и дома. Там же могут быть указаны, дополнительно к задачнику, задачи прикладного характера и иные, которые учитель найдет нужным решить с учащимися. В плане могут быть даны конкретные указания, как будет проработан тот или иной вопрос; например, какие наглядные пособия будут при данной работе использованы или когда будет проведено самостоятельное упражнение учащихся в решении задач под наблюдением преподавателя и т. п. Основное требова-

ние: план работы учителя должен быть руководством в преподавании, отражающим реальные условия работы, обеспечивающим возможность выполнения; составленный план никоим образом не должен представлять собой формально заполненные графы (запись в графах вообще не обязательна). По окончании работы следует записать изменения, внесенные в процессе выполнения плана, если они были: изменения во времени, или в методике проведения занятия, или в количестве решенных упражнений с тем, чтобы учесть это в своей последующей работе.

§ 9. Подготовка к уроку

Наличие хорошо разработанного плана облегчает подготовку учителя к уроку, имеющую часто решающее значение для качества его проведения. Готовясь к уроку, учитель учитывает, что и как проработано на предыдущем занятии, какие затруднения оказались в работе, какие наблюдения сделаны им по отношению к отдельным учащимся и классу в целом. Он намечает по принятому в школе учебнику материал для следующего занятия, отбирает и подготавливает практические упражнения. Желательно, чтобы учитель, готовясь к занятию, просмотрел, как излагается данный вопрос и по другим источникам, кроме учебника, и, в частности, прочитал соответствующую главу из „Методики арифметики“. (Предполагается, что со всей системой изложения изучаемого вопроса программы в курсе методики арифметики учитель познакомился ранее.)

Чрезвычайно важно учителю самому перерешать те упражнения и задачи, которые намечены им для занятия с учащимися. Лишь при этом условии он сможет отобрать только самые необходимые упражнения, в соответствии с целью урока расположить их по степени трудности, иметь необходимые ответы для отдельных этапов вычислений, уточнить время, необходимое для их решения, и т. п.

Учителю следует наметить заранее (если они нужны будут) учебные пособия, таблицы, которые будут использованы им при проведении урока. В результате подготовки учитель должен себе ясно пред-

ставлять содержание, организацию и примерную продолжительность каждого этапа работы на уроке; основные вопросы, которые будут рассмотрены с учащимися; исходный момент и процесс обсуждения или изложения; выводы, которые будут сделаны; упражнения, которые будут решены учащимися у доски или самостоятельно; расположение записей на доске, а также задание, которое будет дано учащимся для выполнения дома.

Заранее следует наметить план проверки выполнения домашнего задания; должно быть также намечено, какие учащиеся при этом будут спрошены, на кого из учащихся следует в данное время обратить особое внимание.

В качестве пособия для начинающего учителя изданы „Планы уроков по арифметике в V классе“ Н. Я. Зайцевой, А. И. Зыкус, А. И. Эрастовой, Учпедгиз, 1954, которыми может воспользоваться учитель, в частности, в начале своей работы с тем, чтобы в дальнейшем приступить к самостоятельной разработке планов уроков с учетом конкретных условий своей работы.

Упражнения и задачи как для классной, так и для домашней работы учащихся учитель дает по принятому в школе „Сборнику задач и упражнений по арифметике“ С. А. Пономарева и Н. И. Сырнева, составленному в соответствии с принятой с 1954 года программой по арифметике для V и VI классов средней школы.

§ 10. Урок

Урок есть основная форма занятий в школе, и от качества его зависят результат обучения, успеваемость учащихся. Хорошая подготовка к уроку по содержанию еще не всегда обеспечивает полноценное его проведение.

1. Необходимым условием для усвоения курса арифметики, как и всякого учебного предмета, является заинтересованность учащихся занятиями; достичь этого можно прежде всего тем, что ученикам будут ясны цель и значение изучаемого, его практическое применение, его связь с прежде усвоенным.

Поэтому для того чтобы учащиеся могли сознательно относиться к работе, они всегда должны твердо знать, какой вопрос они изучают в данное время. Приступая к рассмотрению нового вопроса, учитель должен четко пояснить учащимся, какой вопрос будет ими изучаться; по возможности выяснить, какова его связь с предыдущим, указать, где примерно они применяют полученные знания на практике.

2. При подготовке к уроку учитель исходит из возрастных особенностей учащихся 11—12-летнего возраста, из особенностей их мышления—преобладания конкретного мышления и недостаточного развитого отвлеченного мышления, а также небольшого запаса знаний. Учитывая это, при проведении урока учитель пользуется разнообразными вышеуказанными методами и приемами работы, в зависимости от содержания урока. Обычно схема урока, содержанием которого является рассмотрение нового вопроса, такова: выяснение усвоенного на предыдущем уроке и просмотр домашнего задания (минут 5—10), затем центральная часть урока—изложение теории нового вопроса и выполнение примерных упражнений (минут 30); подытоживание и задание работы на дом (минут 5 или 10, если сопровождается указанием или предварительным разбором текста, задаваемого на дом). Если содержанием урока является закрепление навыка путем упражнений, то центральной частью урока будет решение учащимися примеров и задач у доски и самостоятельно под наблюдением учителя.

Проведение некоторых уроков по арифметике сопровождается рассмотрением дидактического материала (наглядных пособий), выполнением графических иллюстраций, таблиц. Примерные наглядные пособия и иллюстрации в курсе арифметики указаны нами в соответствующих главах.

3. Одной из главных забот учителя арифметики является забота о том, чтобы его ученики усвоили курс арифметики не формально, чтобы они не давали формулировок, определений и правил без достаточного глубокого понимания их сущности, чтобы они умели самостоятельно привести пример к формулируемому правилу и использовать это правило

при решении практического вопроса; понимание должно всегда предшествовать запоминанию.

Методика проведения урока должна обеспечить активное участие учащихся в работе. В школьной практике особенное распространение имеет урок, проводимый эвристическим вопросо-ответным методом. Он применяется при выводе нового правила, доказательстве, при повторении и углублении проработанного, при разборе задач.

Активность детского мышления достигается в результате правильной и продуманной последовательности вопросов, приводящей к выводу. Учителю надо тщательно подготовить вопросы, которыми он будет выяснять содержание рассматриваемой темы, чтобы ничего не осталось без объяснения, чтобы было обращено внимание учащихся на каждую деталь, которую им нужно знать.

На практике иногда вопросы ставятся неудачно, так что учащемуся не приходится думать, а лишь заканчивать последним словом фразу, сказанную учителем. Надо учесть также, что иногда при слишком быстром чередовании вопросов некоторые учащиеся не успевают продумать результат или ответ, даже высказанный их товарищами, и механически списывают его с доски.

В зависимости от содержания вопроса и состава учащихся вопросы могут быть более или менее детализированы и предназначены для ответа определенному учащемуся.

Лекция не может часто применяться при прохождении курса арифметики с учащимися младших классов средней школы. Но учащимся полезно прослушать иногда недлительный (5—7-минутный) связный рассказ учителя, в котором учитель сообщает учащимся различные сведения, в частности исторические, например, о системах нумерации, о введении метрической системы мер или сообщает учащимся биографии ученых-математиков и др.

Большую пользу приносит учитель своим учащимся, когда в связном последовательном изложении дает им образец рассуждений при решении задачи или образец доказательства, например, признаков делимости и др.

4. Процесс рассуждений и объяснений обычно сопровождается записью на доске. Наличие доски, достаточные ее размеры (желательно 4 м × 1 м) и хорошее качество являются необходимым условием для работы по арифметике. Успех урока зависит также от правильного использования классной доски. В отдельных случаях полезно, чтобы учитель сам вел запись на доске, давая пример правильного ее расположения. Учитель должен следить за тем, чтобы все записываемое на доске было видно классу в процессе выполнения записи, а не после записи. На доске записи должны вестись достаточно крупно, четко и аккуратно; начертания цифр должны быть правильные. Запись законченной работы должна стираться с доски, если в ней нет больше необходимости, но в то же время не следует спешить с этим, надо дать возможность отдельным учащимся, не успевшим закончить работу, довести ее до конца.

5. Вызов учащихся к доске имеет место при учете их знаний, при выяснении и закреплении процесса рассуждений и при закреплении навыка в решении упражнений. Учащийся у доски должен подробно объяснить все записи и все получаемые им результаты. Класс следит за работой товарища у доски с тем, чтобы каждый был готов продолжить объяснение (в задаче—поставить и решить следующий вопрос, в упражнениях—выполнить следующий этап работы).

Особое внимание учителю надо обратить на свою речь, которая служит примером для учащихся в смысле логически и стилистически правильного построения ее и необходимой выразительности при объяснении. Учащихся надо приучать связно рассказывать условие задачи, давать полный ответ на поставленный вопрос, приводить четкие и правильные формулировки определений и правил.

§ 11. Письменные упражнения. Записи

1. Наилучшие приемы при постановке вопросов и выяснений теории, а также последовательность в подборе упражнений различной трудности указаны нами во всех главах данной «Методики арифмети-

ки“, и здесь мы не останавливаемся на этих вопросах. Обучению решению задач посвящена отдельная глава „Методики“. Большое количество решаемых упражнений и постоянное повторение играют важную роль в создании навыков и закреплении знаний учащихся по каждому разделу арифметики.

Решение упражнений при обучении арифметике применяется, как сказано выше в § 2, в процессе изучения вопроса программы; затем решение упражнений проводится в целях закрепления пройденного и в целях искоренения недочетов и затруднений учащихся—в порядке повторения. Хотя такое разделение условно, так как в большинстве случаев упражнения, решаемые с одной целью, косвенно влияют и на достижение остальных, но в зависимости от основной поставленной цели делается качественный подбор упражнений и ставятся сроки их выполнения.

В каждой главе „Сборника задач и упражнений по арифметике“ имеются, согласно темам программы, упражнения, служащие как для выяснения, так и для закрепления материала в процессе его изучения. Но из этого общего числа упражнений учитель может отобрать несколько номеров примеров и задач, решение которых содержит определенные трудности (например, в целых числах: умножение чисел, в записях которых встречаются нули, деление чисел, когда в записи частного получится нуль, в дробях—нахождение дроби числа и числа по известной величине его дроби и т. д.) и незнание, неуверенность в решении которых замечены у отдельных учащихся. Эти упражнения учитель может предлагать учащимся и в порядке дополнительной работы при оказании помощи отстающим. Также следует наперед подобрать ряд упражнений с определенными числовыми комбинациями с тем, чтобы время от времени, уже после того как данный отдел курса арифметики закончен, предлагать их учащимся для решения устно и письменно в порядке повторения и закрепления пройденного. Для таких повторительных упражнений из законченных отделов курса можно систематически уделять, как сказано выше, 5—10 минут времени каждого урока.

2. Письменное решение сложных примеров имеет также большое значение при обучении арифметике, так как связывает теорию и практику, облегчает понимание вопросов теории, дает необходимые навыки, развивает способность последовательно мыслить, приучает обоснованно, последовательно и четко давать пояснения выполняемых операций. Нередко, выполняя удовлетворительно отдельные операции, учащиеся при решении сложного примера не доводят вычислений до конца из-за неумения сосредоточить внимание на более длительный срок: ошибки по невниманию—частое явление; при решении сложных примеров вырабатывается сосредоточенность внимания, ответственность за правильность выполнения всей работы и каждой ее части (учащийся, получив неверный ответ, нередко оправдывает свою работу тем, что „ход решения верен“). Иногда решение сложного примера не доводится до конца из-за беспорядочных, неряшливых записей, в которых сам учащийся не может разобраться.

Учитель должен на доске давать образцы записей, схему (систему) расположения действий при решении задач или сложных примеров и требовать от учащихся, чтобы они в основном придерживались данных им указаний. Упорядоченные записи вообще делают легко обозримым весь ход решения задачи или примера, способствуют усвоению приема решения, так как помогают памяти и воображению своей наглядностью.

Упорядоченные записи облегчают работу учителя по проверке тетрадей и в то же время воспитывают ученика, приучая его к системе и порядку. Четкие, последовательные записи, отражающие ход рассуждений, имеют немаловажное значение и для более глубокого и для более сознательного восприятия изучаемого и для развития логического мышления учащихся; наоборот, беспорядочные записи часто служат признаком нечеткости мысли, источником ошибок.

Во всех главах данной „Методики арифметики“ при рассмотрении соответствующих преобразований и действий даются образцы записей. Здесь сделаем несколько отдельных замечаний: учителю следует

требовать от учащихся правильного начертания цифр; надо приучить учеников следить за правильностью пользования знаком „=“ и проверить в сомнительных случаях, равны ли числа, соединенные этим знаком; надо показать ученикам, что при переносе из строки в строку незаконченного выражения делать это можно лишь в случаях переноса знаков „=“, „—“ и „+“, причем следует рекомендовать возможно реже делать переносы на знаках „+“ и „—“ для того, чтобы на каждой строке была выражена законченная мысль; с этой же целью при решении примеров и задач каждый вопрос целесообразно писать с новой строки, а не рядом в строку, отделяя, если можно, вертикальной чертой один столбец от другого. Ответ следует выделять или подчеркиванием, или заключением его в рамочку. Надо избегать громоздких записей. Всякое переписывание, не связанное с фиксированием нового этапа работы, излишне, поэтому излишни и черновики. Учащегося следует приучать сначала тщательно обдумать то, что он хочет записать, тогда ему не придется вносить много исправлений и делать помарки, перечеркивая неверно написанное в тетради.

Пример.

$$\frac{25,2 \cdot 0,15 \cdot 0,28}{1 - 0,172 : 0,2} : 21 + \frac{3,7 \cdot 2,53}{37 \cdot 0,253} + \frac{15 : 1,2 - 0,468 : 0,04}{0,048 : 0,015} = 1,61$$

Замечания. 1. Диктуя пример для записи на доске и в тетради, учитель должен давать образец чтения (диктовки) числовых формул, что послужит основой для дальнейшей работы с буквенными формулами.

2. Прежде чем приступить к вычислениям, надо:

а) устно установить последовательность выполнения действий;
 б) всмотреться в данные числа—не обнаружится ли своеобразие, которое даст возможность наиболее рационально их использовать.

1-е слагаемое. Прежде всего полезно вычислить знаменатель: может быть, получится сократимая дробь.

1) полуписьменно: $0,172 : 0,2 = 1,72 : 2 = 0,86$;

2) полуписьменно: $1 - 0,86 = 0,14$, которое сокращается с 0,28;

3) $25,2 \cdot 0,15 \cdot 2 = 25,2 \cdot 0,3 = 7,56$;

4) $7,56 : 21 = 0,36$ (в строчку).

2-е слагаемое. Учащийся должен сразу сообразить, что результат равен 1.

3-е слагаемое. Все действия можно выполнить в строчку.

5) $15 : 1,2 = 150 : 12 = 12,5$;

6) $0,468 : 0,04 = 46,8 : 4 = 11,7$;

7) $12,5 - 11,7 = 0,8$;

8) $0,048 : 0,015 = 48 : 15 = 3,2$;

9) $0,8 : 3,2 = 8 : 32 = 0,25$ (сразу ясно, что 8 составляет $\frac{1}{4}$ от 32).

Окончательно:

10) $0,36 + 1 + 0,25 = 1,61$.

Случаи, требующие записи в столбец, рассмотрены в соответствующих действиях с многозначными числами.

Обращается внимание учащихся на то, что при выполнении нескольких подряд записанных действий одной ступени целесообразно их выполнять одним действием, например:

$$3 \frac{3}{4} \cdot 0,3 \cdot 1,25 : 1 \frac{1}{8} = \frac{15 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 9} = 1 \frac{1}{4}.$$

Все выполняемые преобразования и вычисления учащийся должен сопровождать словесными правильными объяснениями. Этим достигается ясное понимание изучаемого, воспитывается последовательность мышления и развивается математическая речь учащегося.

Надо поставить себе задачей упражнять учащихся в устной речи как в ответах на вопросы, так и в кратком связанном изложении, для того чтобы выработать у них умение содержательно, логично, четко и кратко излагать свои мысли.

Иногда учащиеся произносят и пишут безграмотно наименования действий и их компонентов. Учитель должен выписывать на доске все вводимые термины. Полезно вывесить в классе таблицу правильно написанных математических терминов и трудных слов. Эту таблицу „Пиши правильно“ следует постепенно дополнять:

арифметика	правило	слагаемое
число	увеличить	вычитаемое
единица	составляет	частное и т. д.

§ 12. Устные упражнения

1. Общеизвестно, что устные вычисления при обучении математике имеют очень большое практическое и общеобразовательное значение как для выработки рациональных вычислительных навыков, необходимых в жизни и при дальнейших занятиях, так и для развития сообразительности, комбинаторных способностей учащихся. Упражнения в устном счете развивают быстроту ориентировки и память учеников, приучают к постоянному вниманию при выполнении работы, дают учащимся возможность проявить свою инициативу.

В начальной школе устному счету уделяют довольно много внимания, практически знакомя учеников на каждом уроке арифметики с приемами устных вычислений. Основным недочетом в этой работе (также и в V классе) является то, что устный счет проводится формально, становится как бы „самоцелью“ в отведенные для этого 5—7 минут на уроке, и далеко не часто рассмотренные приемы устных вычислений применяются в дальнейшей работе по арифметике и еще меньше в занятиях по другим дисциплинам и на практике при различных расчетах. Так, например, только что на уроке учащиеся устно выражали проценты в обыкновенных и десятичных дробях: находили 20%, 25%, 5%, 4% и т. д.; затем приступили к решению задачи, в которой надо найти 25% от 36,8. Вместо того чтобы быстро $36,8 : 4 = 9,2$, начинают письменно умножать $36,8 \cdot 0,25$ и т. п.

Необходимо, чтобы усвоенные приемы устного счета применялись при вычислениях, где только это возможно.

Надо воспитать у учащихся „зоркость глаза“, умение подмечать в данных числовых комбинациях возможность применить упрощенные, сокращенные, остроумные приемы счета. Для этого учитель арифметики должен настойчиво и систематически проводить соответствующую работу в процессе обучения арифметике. Составной частью каждого урока должен быть устный счет; устные и рациональные приемы вычислений должны сопровождать любые вычисления в примере или задаче, так как какая-то часть работы всегда может быть выполнена упрощенным приемом или устно.

Но все же в результате работы в V и VI классах приемы вычислений, которыми овладеют учащиеся, будут несколько примитивны и наивны; для того чтобы учащиеся, оканчивающие среднюю школу, в полной мере владели рациональными приемами вычисления, необходимо практику рациональных и, в частности, устных вычислений, расширять и углубляя, проводить всегда, где это возможно, во всех классах средней школы на занятиях по другим математическим дисциплинам.

В данной „Методике“ в каждом разделе вычислений с целыми числами, дробными, при процентных расчетах и других приводятся образцы устных упражнений по рассматриваемой теме. Следует указать, что среди рекомендуемых нами приемов устных вычислений нет сложных искусственных приемов (применяемых специалистами-вычислителями), с которыми при желании учащихся их можно ознакомить во внеклассной работе.

В действиях с целыми числами в основном рассматриваются те же приемы вычислений, которые известны учащимся из курса начальной школы, но в начальной школе эти приемы даются обычно без обоснования, правильность получаемых результатов подтверждается непосредственным вычислением (письменным или устным). В V классе учащиеся знакомятся с законами сложения и умножения, с правилами прибавления суммы и разности, умножения и деления на произведения, с зависимостью между данными и результатом действий и др.

Этими свойствами обоснованы все приводимые приемы устных и рациональных вычислений. В процессе осознания приемов рациональных вычислений (в основном с небольшими числами) наглядным становится для учащихся сущность, смысл математических зависимостей и операций.

В V классе (по сравнению с начальной школой) расширяется область числовых комбинаций, с которыми могут оперировать учащиеся: в действиях с обыкновенными и десятичными дробями, с процентными вычислениями, при нахождении делителей и кратного чисел. При изучении этих отделов, где возможно, следует показывать и объяснять учащимся применение устных и упрощенных приемов (см. соответствующие параграфы „Методики“). Осложнение упражнений, даваемых в V классе, выражается еще в том, что при решении одного примера приходится применять иногда не один, а два или более приема, например: и перестановку слагаемых, и группировку их, и округление данных, и разложение на слагаемые и др.

Учитель V класса должен обратить достаточно внимания на рационализацию вычисленных навы-

ков учащихся в действиях с целыми числами, так как в действиях с дробными числами в основном применяются те же приемы.

Различие устных вычислений от письменных иногда понимается только как выполнение первых без записи. Различие не только в этом: основное различие в том, что при устном вычислении не пользуются правилами письменных вычислений, правилами, которые обусловлены десятичной системой нумерации и поместным значением цифр. Иногда, предположив учащимся устно отнять 170 от 325, можно видеть, как они вычисляют на „воображаемой бумаге“, даже водят

325

пальцем по ней: $\begin{array}{r} 325 \\ - 170 \\ \hline 155 \end{array}$ Хотя этой записи и не было,

но в этом случае вычисления выполнены письменным приемом. Устный прием: $325 - 100 - 70$, или $325 - 200 + 30$.

Большое воспитательное значение устных вычислений состоит в том, что в этом случае учащийся имеет дело с „числом“, а не с „цифрой“; он должен вдуматься в состав данных чисел, в их своеобразии и затем применить наиболее рациональный в данном случае прием вычислений. Надо комбинировать на уроках письменные упражнения с устными. Иногда случается, что выполнение устных упражнений затрудняет учащихся, но если записать данные числа и зрительным восприятием облегчить им работу, то промежуточные вычисления легко выполняются устно; результат также может быть записан. Эти вычисления обычно называют „полуписьменными“ (термин введен Гольденбергом).

2. Включение вопросов теоретического характера в устные упражнения на уроках арифметики и, в частности, требование иллюстрировать свой ответ самостоятельно подобранными примерами имеет большое значение для более осознанного и глубокого усвоения курса.

Например, по теме „Делимость чисел“:

- 1) Назвать наименьшее простое число.
- 2) Может ли четное число быть простым? Простое или составное число 2? Объяснить ответ.

3) Почему 1 не считают ни простым, ни составным числом?

4) Какое число делится на все числа без остатка?

5) Какое число не может быть делителем?

6) Назвать два взаимно простые числа в том случае, когда эти числа не простые.

7) Как надо понимать выражения: разложить данное число на множители? На слагаемые? Привести примеры.

8) Какие числа делятся на 3? на 9? Привести пример числа, делящегося на 3, но не делящегося на 9. Может ли быть число, делящееся на 9, но не делящееся на 3? Почему? и т. д.

Крайне полезно проводить устное решение задач с небольшими числовыми данными для выработки четких представлений о функциональной зависимости между величинами, входящими в условие задачи, для развития смекалки учащихся (см. главу „Задачи“).

В последнее время некоторые учителя проводят, примерно, один раз в четверть так называемую устную контрольную работу, в которую включают вопросы теории (определения, правила), упражнения и задачи для устного решения¹.

§ 13. Повторение

Общеизвестно значение повторения для успешности обучения, для закрепления приобретенных знаний, без чего невозможно понимание и усвоение новых вопросов.

Одной из важнейших забот учителя должно быть—не допустить учащихся забывать то, что они усваивают; поэтому в течение всего учебного года, изучая новый вопрос программы (при этом всегда приходится опираться на знания, приобретенные ранее), надо припоминать, повторять с учащимися определенные факты из прошлого курса, связанные с новыми, с которыми они знакомятся. Так, например,

¹ А. И. Зыку с, Пути повышения успеваемости по математике в V—VII классах, Учпедгиз, 1952, и в журнале „Математика в школе“, 1954, № 5.

расширяются знания учащихся о действиях с числами: переходя к действиям с обыкновенными дробями, повторяют все известное о действиях с целыми числами; при изучении действий с десятичными дробями снова ставятся те же вопросы—о законах действий, зависимости между данными и результатом действия, о порядке действий, и далее, в VI классе, при изучении отрицательных чисел и действий с ними снова ставятся те же вопросы. Это повторение не должно быть простым воспроизведением однажды воспринятого; оно должно вносить каждый раз нечто новое в знания, которые были получены ранее, дополняя их, углубляя, систематизируя, требуя от учащихся определенных умственных усилий.

1. В начале I четверти в V классе ставится задача восстановить в памяти учащихся, перешедших из начальной школы, знания, которые у них были, привести их в систему, восполнить имеющиеся пробелы. Для этого выделяется специальное время. Эти первые уроки повторения по арифметике в V классе (после выяснения знаний учащихся) надо провести так, чтобы не задержать продвижения учащихся, чтобы не породить скуки повторением известного и подвести возможный обобщающий теоретический фундамент под знания учащихся. Например, в начальной школе учащиеся познакомились с чтением и записью многозначных чисел; в V классе целесообразно ставить вопрос о натуральном ряде чисел, о десятичной нумерации, о поместном значении цифр и т. д.

Указания к урокам даны в главе II; там же указано, что при повторении полезно давать учащимся краткие исторические сведения, и приведены примерные темы¹.

Кроме того, и в дальнейшем следует неоднократно возвращаться к вопросам, обычно затрудня-

¹ В данной „Методике арифметики“ много внимания уделено повторению раздела „Целые числа“. Учитель отбирает те вопросы, которые соответствуют и требуются конкретными условиями его работы. Кроме того, методика изложения всех вопросов раздела „Целые числа“ не повторяет методики изложения этих вопросов в начальной школе.

ющим учащимся; в частности, давать упражнения, требующие выполнения преобразований и действий с мерами различных наименований, умножения и деления многозначных чисел, в записях которых имеются нули, случаи умножения на 0 и 1 и деления нуля на число и т. п.

При изучении дробных чисел снова предлагается ученикам повторить соответствующие определения, термины и правила действий с натуральными числами; приступая к изучению действий с десятичными дробями, учащиеся основываются на знании действий с многозначными числами и обыкновенными дробями и т. д.

Изучение курса арифметики в VI классе целиком строится на основе тех знаний, которые приобрели учащиеся в предыдущие годы о действиях с дробными числами, о вычислении процентов, о взаимной связи величин.

План систематического повторения надо составить заранее, в начале года, при планировании всей работы; надо наметить даже номера упражнений и задач, которые будут решены в порядке повторения в течение учебного года. Этого плана следует придерживаться в процессе работы.

2. Большое внимание в плане повторения должно быть уделено решению задач. Умение решать задачи учащимися нельзя еще считать удовлетворительным. Наблюдения за методикой обучения решению задач в V и VI классах, анализ контрольных работ показывают, что в большинстве случаев учащиеся, имеющие оценку „3“, решают только „приведенные задачи“ (в которых условие подсказывает порядок действий) с очень ограниченным кругом рассматриваемых зависимостей. Одной из причин такого положения, судя по просмотренным тетрадям, является крайне ничтожное число задач сравнительно с числом примеров, решаемых в течение года и в особенности ничтожно число решенных „более трудных“, задач, требующих математической смекалки и в то же время развивающих умственные способности детей.

Иногда в классе имеется часть учащихся, не умеющих решать задачи, и, к сожалению, учителя

строят работу по решению задач, ориентируясь на них, тем самым задерживая часть класса в его развитии и оставляя весь класс на более низком уровне, чем это могло быть при иной постановке дела, а именно—выравнивании класса путем индивидуальной работы с менее подготовленными учащимися.

Необходимо значительно увеличить число решаемых задач и тщательно обдумывать методические приемы обучения решению задач. С этой целью в плане повторения, составленном в начале учебного года (параллельно плану изучения новых вопросов), намечается для решения определенное число задач, примерно такое, чтобы на 1 час классных занятий приходилась одна задача из прошлого курса для решения дома или в классе.

а) В начале учебного года в V классе у учителя нет для решения с учащимися сложных арифметических или типовых задач (здесь говорится именно о таких задачах, а не о задачах-примерах) по изучаемому курсу. Просмотр тетрадей учеников V класса многих школ показывает, что все это длительное время до окончания изучения всех действий с обыкновенными дробями решаются почти исключительно задачи-примеры. За это время (да еще после летнего перерыва) ученики отвыкают решать задачи, поэтому на этот промежуток времени следует поместить в план повторения решение задач по отделу „Целые числа“ из главы I „Сборника задач и упражнений“.

Решать подряд много задач одинаковой структуры нецелесообразно, так как в этом случае вместо развития способности рассуждать получается натаскивание, заучивание определенного „типа“, поэтому следует предпочесть чередование задач, решаемых различными методами, и решение задач, осложненных по отношению к основному методу дополнительными условиями.

б) Решение задач на все действия с целыми числами можно закончить к тому времени, когда учащиеся закончат изучение четырех действий с обыкновенными дробями и приступят к решению задач на четыре действия с обыкновенными дробями (гл. III „Сборника задач“).

В результате проведенного повторения они будут подготовлены к этой работе.

в) В период изучения десятичных дробей задачи (и примеры) на действия с обыкновенными дробями служат для повторения и закрепления приобретенных знаний и умений по этому разделу. Затем, решая задачи на четыре действия с десятичными дробями (гл. IV „Сборника задач“), учащиеся в третий раз повторяют разнообразные методы решения арифметических задач.

г) Аналогичные задачи с дробными числами (как с обыкновенными, так и десятичными) решают учащиеся и в VI классе.

Систематическое плановое повторение в течение всего времени обучения арифметике обеспечит успех работе.

§ 14. Домашняя работа. Тетрадь

Прочные знания и твердые навыки по математике не могут быть достигнуты учащимися только в процессе классной работы,—необходимо закрепить их домашней самостоятельной работой. Домашняя работа дополняет классную.

Для письменной домашней работы обычно дается решение задач и примеров с целью закрепления изученного в классе. Для того чтобы домашняя работа была плодотворной, необходимо руководить ею: давая задание, делать краткие пояснения, например, о чем говорится в задаваемых параграфах учебника, какая задача предложена или из какого отдела дается повторение и т. п. Когда это необходимо, могут быть даны указания по существу решения задаваемой на дом задачи; задавая упражнения, содержащие те случаи вычислений, которые обычно затрудняют учащихся, в которых часты ошибки, полезно предварительно напомнить правильное решение этих примеров или аналогичных. Ошибки эти обычно известны практику-учителю и указаны в соответствующих главах данной „Методики“. Только после тщательного проведения предварительной работы может быть дан учащимся тот или другой вид упражнения для самостоятельной

работы (и дома, и в классе). В качестве домашней работы могут быть даны учащимся также следующие задания: составление таблиц, например таблицы действий прямых и обратных, таблицы простых чисел, таблицы умножения двузначных чисел, чисел, обратных данным, и др.; вычерчивание диаграмм по определенным данным; подбор данных для задачи, например: определение размеров для вычисления какой-либо площади, выяснение численного состава учащихся в классе, в школе; решение какой-либо интересной задачи и т. д. Только при условии, что преподаватель на каждом занятии проверяет выполнение домашней работы, учащиеся будут систематически ее выполнять, держать тетрадь в порядке, и преподаватель сможет, учитывая ошибки, своевременно принять меры для их исправления.

Проверка домашнего задания обычно проводится в начале урока, причем на нее не следует затрачивать более 10—15 минут. Учащийся, выходящий к доске для ответа, обязан представить учителю для просмотра свою тетрадь.

2. При проверке решения задачи, заданной на дом, не следует довольствоваться тем, что учащийся по тетради рассказывает решение задачи. Учащийся должен устно рассказать содержание и план решения задачи (если он не запомнил числовые данные, он может воспользоваться задачником). Каждый учащийся, зная это требование учителя, если даже решил задачу не самостоятельно, постарается в ней разобраться, повторить ее условие и решение, тем самым он постепенно учится решать задачи. В случае, когда решение задачи не выполнено или неверно и учащемуся даны необходимые пояснения, он обязан представить к следующему уроку решение этой задачи. Это же требование следует предъявлять учащимся при исправлении недочетов контрольной работы (по решению задач и примеров).

3. При проверке решения примера предлагается учащимся по тетради кратко рассказать последовательность выполненных вычислений и дать ответ.

Учитель ставит и отвечающему учащемуся и всему классу дополнительные вопросы как для того, чтобы уточнить некоторые вопросы, так и для того,

чтобы выяснить глубину понимания и самостоятельность мысли учащихся. Все ученики должны следить за ответом товарища и всегда быть готовыми, если нужно, его дополнить или исправить. Проходя по классу, учитель проверяет по тетрадям факт выполнения задания учащимися и в случае обнаружения при этом беглом просмотре неверных или нерациональных записей немедленно делает соответствующие указания. На доске должны быть решены примеры и задачи, представившие затруднения для большинства учащихся при самостоятельном их решении. В случае значительных недочетов в домашней работе отдельных учащихся дополнительные разъяснения организуются в порядке работы с отстающими. Надо указывать учащимся и допущенные ими орфографические ошибки. Вводя новые термины или трудные в орфографическом смысле слова, преподаватель должен выписывать их на доске.

4. Тетрадь каждого учащегося по арифметике должна быть тщательно просмотрена учителем не реже одного-двух раз в неделю, причем перечеркиваются все неверно выполненные вычисления или неверно написанные формулировки и слова; последние учитель заменяет верными. Учащемуся должны быть указаны все недочеты в его работе, которые затем исправляются им в тетради, в выполнении чего учитель обязательно должен убедиться. Настойчивое требование аккуратной, четкой, последовательной, математически правильной записи в тетрадях учащихся является мерой борьбы учителя за качество работы по арифметике.

§ 15. Учет. Работа с отстающими

1. Заканчивая отдел программы, преподаватель должен подытожить материал, провести обзор пройденного, сосредоточить внимание учащихся на важнейших пунктах изученного и тщательно проверить степень усвоения учащимися данного раздела курса устным опросом и письменной контрольной работой. Полезно при этом дать учащимся для самостоятельного повторения список вопросов с указа-

нием параграфов учебника, на основании которых они могут дать на них ответы. Примерные контрольные работы, охватывающие основные вопросы курса, приведены нами в данной „Методике“ в конце каждого рассмотренного раздела программы арифметики. Они не являются обязательными. Проанализировав, какие основные знания и умения проверяет каждый вопрос предложенной нами контрольной работы, учитель должен внести изменения и дополнения, в зависимости от конкретных условий работы в классе, в котором он ведет занятия.

Устный ответ ученика не должен быть только средством контроля его работы, он должен служить и для более глубокого понимания вопроса и отвечающим, и всем классом, следящим за его ответом, так как при этом отвечающему ставятся дополнительные вопросы для выяснения всех деталей работы, исправляются допущенные неточности в рассуждениях или в речи и т. п.

При письменном и устном учете результатов работы учитываются не только достижения, но и те виды затруднений, которые встречаются у учащихся при изучении какого-либо раздела курса.

Особо внимательное отношение должно быть со стороны учителя к ошибкам учащихся, так как ошибка, сделавшаяся привычной в арифметике, часто отражается и на занятиях по алгебре и тригонометрии; таковы ошибки в операциях с 0 и 1, в делении одного из слагаемых числителя дроби $\frac{a+b}{a}$ на a , причем ответ дается в виде $1+b$, и т. п.

В „Методике арифметики“ при рассмотрении каждого раздела курса приводятся типичные, обычно известные опытному педагогу, арифметические ошибки учащихся. Молодой учитель, анализируя работы учащихся, скоро приобретет опыт в этом деле.

Зная обычные ошибки учащихся, учитель должен предотвратить, не допустить ошибки правильной методикой преподавания; а если ошибка появилась, надо вести борьбу с момента ее появления, так как чем позже, тем труднее ее искоренить.

Допущенные ошибки искореняются путем показа правильного решения соответствующих примеров и разъяснений сущности рассматриваемого вопроса.

2. В дореволюционной средней школе лишь констатировали факт неуспеваемости учащегося. Обязанность ликвидации недочетов возлагалась преимущественно на родителей.

В практике нашей советской школы вопрос об отстающих ставится совершенно иначе. Постановления руководящих органов по народному образованию четко и определенно выдвигают требование ответственности школы за качество работы, требование организации активной помощи отстающим.

Когда выясняется, что отдельный учащийся или часть учащихся класса имеет пробелы, требующие дополнительной работы по их ликвидации, то в школе в таком случае организуются консультации или дополнительные занятия во внеклассное время. В большинстве случаев занятия с отстающими ведет сам преподаватель. Проводить их надо по тщательно составленному индивидуальному плану. Преподаватель сможет своевременно ликвидировать отмеченные недочеты учащихся лишь в том случае, если четко будет знать ошибки каждого нуждающегося в дополнительных занятиях. Учитель должен организовать работу учащихся, выяснить непонятное, не усвоенное ими, внимательно подобрать соответствующие упражнения для тренировки в навыках и учитывать продвижение каждого отдельного учащегося, имеющего пробелы в знаниях.

Менее продуктивно проходят дополнительные занятия тогда, когда работу ведет не сам преподаватель класса. В этих случаях преподаватель математики должен составить план занятий с конкретным учетом пробелов отдельных учащихся, указать материал для работы (упражнения, задачи и т. д.) и постоянно оказывать методическую помощь и руководство лицу, ведущему занятия с одним или несколькими учащимися.

Во время классных занятий учителю следует обращать внимание на менее подготовленных учащихся. Надо предлагать им отвечать на задаваемый всему классу вопрос, систематически наблюдать за

выполнением ими самостоятельных работ в классе и чаще, чем у других, проверять их домашние работы.

3. Перечислим основные мероприятия, которые могут служить делу предупреждения и ликвидации в школе неуспеваемости по арифметике.

1) Строгая последовательность в изложении курса, конкретность и обоснованность делаемых выводов, неторопливость при выяснении новых понятий, проверка степени усвоения его всеми учащимися класса, обзор изученного отдела.

2) Решение большого числа систематически подобранных разнообразных по методам решений и по содержанию примеров и задач по каждому разделу курса; решение задач практического характера.

3) Воспитание у учащихся способности к отвлечению, к анализу и синтезу, к обобщению; развитие комбинаторных способностей учащихся, сознательности, самостоятельности и активности, вдумчивого отношения к работе, уверенности в своих силах, краткости и точности речи, правильности оформления работы.

4) Создание у учащихся навыков самостоятельной работы и, в частности, работы с книгой. Плановость и постепенность в этой работе.

5) Правильная организация домашних заданий (по объему, содержанию); тщательная подготовка домашнего задания учителем; систематическая и тщательная проверка выполнения домашнего задания и тетрадей учащихся.

6) Использование наглядных пособий в работе по арифметике: таблиц, отрезков прямой, измерительных приборов и др.

7) Систематическое и плановое повторение пройденного; разнообразие приемов повторения; повторение курса прошлого года: неоднократное возвращение к повторенным разделам курса; внимание более сложным разделам курса.

8) Систематический и плановый контроль и учет устных и письменных ответов учащихся. Разнообразные приемы письменных работ и анализ результатов. Своевременное выявление и индивидуальный подход к тем учащимся, которые пропустили одно

или несколько занятий, у кого пробелы в знаниях по прошлому курсу, у кого обнаружены отдельные недочеты в устном ответе, в тетради, в контрольной работе.

§ 16. Внеклассная работа

1. Внеклассная работа по математике в свете задач, поставленных перед советской школой XIX съездом КПСС, приобретает новую целевую установку — расширение политехнического кругозора учащихся. Вместе с тем не снимаются те образовательные и воспитательные цели, которые всегда ставились при проведении внеклассной работы с учащимися средней школы: повышение интереса учащихся к занятиям наукой, повышение их математической культуры (в данном случае в области арифметики), углубление и дополнение имеющихся знаний, воспитание навыков самостоятельной и коллективной работы, развитие конструктивных и творческих способностей и др.

Формы внеклассной работы по арифметике разнообразны: проведение занятий кружка (или тематического пионерского сбора), выпуск газеты или журнала, проведение соревнования на звание лучшего математика класса, викторины, устройство утренняя.

Основная форма внеклассной работы — занятия в кружках, на которых заслушиваются доклады, проводятся беседы, решаются интересные задачи. Большое значение имеет проведение тематических пионерских сборов, так как подготовка к ним носит массовый характер: каждый учащийся-пионер привлекается к увлекательной, соответствующей его интересам, им самим выбранной и выполненной работе по арифметике; этим воспитывается у учащегося уверенность в его силах и возможностях, возникает заинтересованность учебным предметом и стремление испробовать свои силы и в дальнейшем.

В связи с задачей политехнической подготовки учащихся в школах организуются кружки по изготовлению наглядных пособий. Эти кружки способ-

ствуют развитию конструктивных навыков учащихся и в то же время ставят практическую задачу — оказать помощь в оборудовании школы математическими пособиями, в частности для проведения землемерных работ на местности; на этой работе учащиеся видят связь теории и практики, учатся применять свои знания на деле. Члены кружка организуют экскурсии, проводят работы на местности дополнительно к тем, которые указаны программой по арифметике, выполняют практически нужные работы по разбивке участка на грядки, по измерению площади, вспаханной или прополотой за день, и т. д.

Во многих школах проводятся внеклассные занятия учащихся V и VI классов на темы: „Как люди научились считать“, „Меры и счет в древности“, „Славянская письменная и устная нумерация“, „Различные системы счисления“, „Арифметика у народов Средней Азии“, „Магницкий и его „Арифметика“, „Простые числа“, „Числа-великаны“, „Приемы быстрого счета“, „Приближенные вычисления“, „Число 9 и проверка девяткой“, „Палочки Непера“ и др.¹ Особый интерес представляют доклады на тему „Математика на службе человека“ — на строительстве, на транспорте, в промышленности, сельском хозяйстве, в морском деле и др. Обычно на занятии арифметического кружка, наряду с кратким сообщением одной из вышеуказанных тем, члены кружка решают занимательные задачи или вообще тренируются в решении арифметических задач, в самостоятельном составлении задач, упражняются в работе на счетах, знакомятся с работой на арифмометре и т. д. В отдельных школах ученики ставят небольшие инсценировки: „Репетитор“ А. П. Чехова, сцену из „Недоросля“ Фонвизина или сцену-шутку „Ошибка в делении“ ($40 : 8 = 41$) и некоторые другие.

Большой интерес проявляют учащиеся к вопросам истории арифметики, в частности истории отечественной науки о числах. На этих беседах уча-

¹ В соответствующих главах „Методики“ кратко изложены сведения по указанным темам. Подробное изложение см. „Список рекомендованной литературы“ в конце книги.



Софья Васильевна Ковалевская
(1850—1891)

щиеся узнают, как считали, как измеряли и как выполняли действия наши предки, видят, как возникла математика из практических нужд человека и с начала своего возникновения служила человеку, помогала ему разрешать многие вопросы его практической деятельности и тем самым побуждала человека прилагать усилия для дальнейшего развития самой математической науки. Здесь же учащиеся знакомятся с биографиями знаменитых русских и советских математиков—С. В. Ковалевской, П. Л. Чебышева, И. М. Виноградова и других.

Решая задачи исторического характера, учащиеся знакомятся с народным творчеством древнейших народов. Они видят те же задачи на нахождение дроби числа и числа по величине его дроби у египтян, у греков (известная задача Метродора или надгробная надпись на могиле Диофанта)¹, знакомятся с интересными задачами индусских авторов, встречаются у различных народов в различные времена задачи, которые иногда их затрудняют на уроках арифметики: „на пропорциональное деление“, „на тройное правило“, „на

¹ Г. Н. Попов, Сборник исторических задач по элементарной математике, ГТТИ, 1932.

бассейны“, на применение интереснейшего „метода инверсий“ и т. д.

На одном-двух занятиях кружка можно познакомить учащихся с деятельностью первого русского педагога-математика—методиста Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739 гг.), автора учебника „Арифметика сиречь наука числительная“, изданного в 1703 году.

Магницким он стал называться по повелению Петра I, который, беседуя с ним, был восхищен его познаниями в области математических наук и прозвал его „магнитом“. Магницкий был преподавателем, а затем до конца жизни руководителем школы математических и навигационных наук, созданной Петром I в Москве в Сухаревой башне.

До „Арифметики“ Магницкого в России были преимущественно рукописные книги, и Магницкий пользовался терминологией рукописной славяно-русской математической литературы: язык своего руководства он старался приблизить к разговорному русскому языку. Велико значение „Арифметики“ Магницкого, в которой как бы подытожены математические знания в России к началу XVIII века.

О своей книге он говорит:

„Разум весь собрал и чин—

Природно русский, а не немчин“,

этими словами он хотел сказать, что „природно русский“ разум идет своими путями, отличными от западноевропейских¹.

Магницкий в области математики был самоучка и в своей „Арифметике“ очень заботился о том, как ученик воспримет излагаемое: вначале он дает определение действия, затем на примерах выясняет, как оно выполняется, затем предлагает для решения несколько примеров, причем примеры подобраны в восходящей трудности, так что читатель в результате работы уяснит себе способ выполнения действия и приобретет навык. Магницкий пользовался различными методическими приемами: и указаниями в предисловии, и стихотворной формой, и двумя цветами (заголовки, первые буквы выделены красным цветом), и т. п.

Можно показать учащимся картину, помещенную в „Арифметике“ Магницкого. На картине изображен храм мудрости, на престоле сидит сама мудрость с ключом, которым отпирается истинное познание мира (число). Ступенями к храму служат арифметические действия. Магницкий отвечает на вопрос, что есть арифметика, так: „Арифметика, или числительница, есть художество², честное, независимое и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохваленнейшее“.

Из „Арифметики“ Магницкого (324 стр., 100 рисунков) можно познакомить учащихся с главой о нумерации чисел, одновременно выясняя вопрос о бесконечности числового ряда, можно показать применявшиеся приемы умножения и деления; особенно интересно рассмотреть решение задач и сопоставить приемы, которые применяли во время Магницкого, с современными; в частности, интересен прием применения „правил фальшивого или гадательного“.

¹ Д. Д. Г а л а н и н, Л. Ф. Магницкий и его „Арифметика“, М. 1914; Д. Д. Г а л а н и н, „История методических идей в России XVIII века“, „Наука“, М. 1915; „Математика в школе“, 1940, № 5.

² В смысле „искусство“.

Глава II

НУМЕРАЦИЯ

§ 1. Введение

„Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже способностью отвлекаться при рассмотрении этих предметов от всех прочих их свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития¹.

Несомненно, что к понятию числа привели наблюдения над различными совокупностями конкретных объектов, имеющих в основе практическую деятельность человека. Человечество настолько свыклось с основными понятиями и положениями, к которым относится и понятие числа, что давно уже не вспоминает те простейшие и повседневные факты, при помощи которых оно когда-то их составило. Возможны различные процессы, при помощи которых человек пришел к открытию числа; но в силу той роли, какую играет процесс счета в самых элементарных хозяйственных отношениях, по всей вероятности, из процесса счета возникло понятие натурального числа, отражающего материальную действительность с количественной стороны. „Чистая математика имеет своим

¹ Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1953, стр. 37.

объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира¹.

Число выступает одновременно как количественное и как порядковое. Число количественное—кардинальное—отвечает на вопрос сколько?, а число порядковое—ординальное—отвечает на вопрос какой? Эти две стороны одного и того же понятия числа настолько связаны между собой, что часто в процессе обучения их невозможно отделить друг от друга.

§ 2. Исторические сведения о числе и счете

Как в педагогической практике расширить кругозор учащегося, систематизируя его знания о числе, о действиях с ним? Как поставить перед учащимся основные вопросы арифметики: вопрос о числе и процессе счета и вычисления, вопрос о величине и о процессе измерения? Как дать учащемуся представление о совокупности (множестве), о понятии „равно“, „больше“ и „меньше“? Как на этих вопросах заинтересовать учащегося содержанием курса арифметики?

Одним из средств для этого является ознакомление учащихся с историческим процессом развития понятия числа и счисления. Учитель может провести краткую беседу на уроке в разрезе, указываемом нами, с тем, чтобы в дальнейшем развить сообщенные факты в порядке кружковой работы. Пособия для учителя по истории математики указаны в прилагаемом списке литературы.

Первое понятие числа неразрывно связано с понятием множества. Сначала человек непосредственно воспринимал множество объектов, причем он лучше воспринимал их тогда, когда объекты были наделены одинаковыми признаками, как, например, шишки с деревьев, собранные им в кучу, стадо согнанных им овец или коров, свора собак или собрание каких-либо других, похожих друг на друга предметов.

В своей непосредственной практической деятельности человек постепенно усваивал понятия „равно“, „больше“ и „меньше“; он видел как „прибавляется“ к множеству объект и как от множества отделяются объекты, как оно „убавляется“. Медленно, длительно развивалось понятие числа, потеряны следы начала этого процесса. Первые числовые понятия были „один“ и „много“; затем создавалось новое числовое представление—„два“. В большинстве случаев понятие „два“ связывалось с конкретной парой предметов: у китайцев слово „два“ то же, что уши; у тибетцев—то же, что два крыла птицы; у индусов „два“ созвучно со словом „глаза“ и т. д.; все числительные свыше трех выражались одним словом „куча“.

Надо подчеркнуть для учащихся ту мысль, что первобытные народы не имеют понятия о так называемом нами отвлеченном числе. С представлением числа связываются у них представления о каких-либо определенных объектах. Так, путешественники рассказывают, что эскимосы узнавали о потере какой-нибудь собаки не сравнением числа собак до потери с числом оставшихся собак

¹ Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1953, стр. 37.

после потери,—они узнавали о потере собаки лишь потому, что осматривая по порядку оставшуюся свору, они не замечали знакомой фигуры—собаки с определенными приметами. Дележ и обмен у первобытного человека сводился к установлению однозначного соответствия; так, путешественники, наблюдавшие меновую торговлю, рассказывают об одном племени, представитель которого крайне смущался, если ему клали сразу 4 пачки табаку за 2 овцы (при меновой цене за овцу—две пачки табаку); при обмене ему надо было положить 2 пачки и увести одну овцу, затем снова положить две пачки табаку и увести другую овцу. У этого же племени наблюдался обмен телки на 10 пачек табаку, причем пачки клались по одной на каждый из 10 растопыренных пальцев туземца.

Для того чтобы показать учащимся возможные первые приемы счета в отдаленнейшее время, можно привести соответствующие примеры из употребившихся приемов счета. Наиболее удобными, естественными наглядными пособиями для счета были пальцы рук человека, а также пальцы ног. И первобытный человек широко использовал эти инструменты. Указываемые нами авторы приводят примеры счета малокультурных народов, которые вместо слова „один“ говорят „палец“, и при этом обязательно протягивают палец, затем, два пальца руки и т. д. и переходят к пальцам ног. Корень слова „пять“ (pente) языковеды связывают иногда с санскритскими и персидскими словами, равнозначными нашему слову „пятерня“.

Исследования филологов позволяют судить и о следующей ступени развития процесса счета. Так, вместо того чтобы сказать „шесть“, говорят: „один с другой руки“¹; когда сосчитают 10, то говорят: „обе руки кончены“; 20—„ноги кончены“ или „человек“.

Наблюдались факты, когда в счете принимало участие несколько человек: один на пальцах своих рук набирал единицы, а другой на пальцах своих рук отсчитывал десятки, набранные из единиц первого, и т. д.

После многократного использования пальцев рук и ног как счетного инструмента люди создали у себя привычку группировать предметы по пяткам, десяткам, двадцаткам, что отразилось на создании соответствующих систем счисления.

Следы двадцатеричной системы сохранились в языке многих народов: так, по-французски число 20 имеет особое название „vingt“, число 93 читается „quatre-vingt-treize“, что означает „четырежды двадцать плюс тринадцать“. Вообще, основания группировок были различны; была, например, троичная система, очевидно связанная с числом суставов на пальцах; более распространенной была двенадцатеричная система, следы которой сохранились в счете дюжинами и дюжинами дюжин: „гросс“—пистонов, карандашей, пуговиц и др. Особое распространение двенадцатеричная система имела у римлян, повидимому в связи со счетом месяцев в году. Двенадцатеричные доли единицы римляне называли унциями, и это название унций (латинское) сохранялось долго в мерах аптекарского веса. Эти 12-е доли напоминали скорее именованные числа, чем обыкновенные

дроби: $\frac{2}{12}$ равны 2 унциям; $\frac{3}{12}$ равны 3 унциям.

¹ Л. Леви-Брюль, Первобытное мышление, перев. с франц., 1930, стр. 128.

У вавилонян наряду с десятичной системой была шестидесятиричная система счета, следы которой до сих пор сохранились в измерении времени (1 час=60 мин., 1 мин.=60 сек.). Вавилоняне считали группами по 60. Число 60 имело особое название „soos“, число $60 \cdot 60=3600$ называлось „sar“.

Счетные приборы.

„Наша арифметика — дитя инструментальной арифметики“ (проф. Н. М. Бубнов). Первыми инструментами для счета были упомянутые выше пальцы рук и ног самого счетчика. Впоследствии перешли к другим наглядным пособиям: раковинам, узлам, зарубкам, мешочкам зерен и камешкам, большим—для обозначения единиц большего разряда и меньшим—для обозначения простых единиц и т. п.

Камешки у римлян (по-латыни *calculus*; отсюда слово „калькуляция“) стали постоянным орудием счета. Длительен был процесс перехода через опускание слова „камешки“ или других слов в процессе счета к абстрагированию понятия числа.

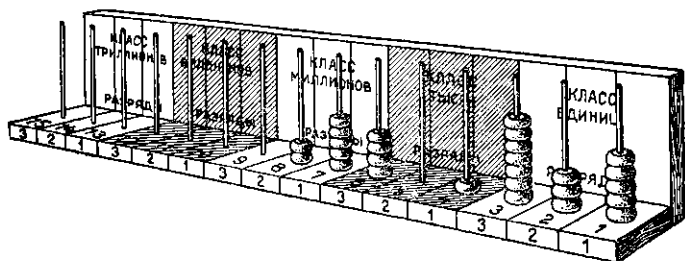


Рис. 12.

Применяя при обучении десятичной системе счисления пособие абак¹ (рис. 12), учитель может рассказать учащимся на занятиях в математическом кружке о давности изобретения этого прибора для счета, о видоизменениях его (применение апексов для обозначения на нем чисел, введение абака с мечеными марками и т. д.). Этот простой и легкоподвижный счетный инструмент в эпоху развития торговли, мореплавания, изобретений в XV веке широко применялся на практике купцами для всевозможных расчетов, причем абак ставился на скамью (*bank*—по-немецки) для удобства пользования им „банкиром“. Несмотря на то, что в IX веке в Европе уже появились цифры для записи чисел, и в XV и XVI веках счет велся в Западной Европе преимущественно на абак.

Следует указать учащимся, что известный им прибор—русские конторские счеты, которыми они научатся пользоваться, имеет также большую давность и путем постепенных улучшений достиг настоящего своего вида².

В указываемых нами книгах по истории математики учитель найдет и сможет использовать в кружковых занятиях с учащимися много разнообразных оригинальных практических приемов, которые

¹ Слово „абак“ греческого происхождения: „доска“, „стол“.

² Современные счеты бывают различных образцов.

применяли все народы в различные периоды при использовании наглядных пособий для счета. Раньше других народов освободились индусы от помощи предметов во время счета, и чисто умственный счет у них получил широкое распространение.

Например, на занятиях в математическом кружке, в порядке интересного примера пальцевого счета, как счета при помощи инструмента, полезно указать учащимся следующий известный прием умножения. Пусть надо $6 \cdot 8$; на одной руке протягиваем один палец, т. е. столько, на сколько первый множитель больше 5, на второй руке протягиваем 3 пальца из того же расчета: число десятков в произведении равно $1+3=4$ десятка, т. е. числу протянутых пальцев на обеих руках. Число единиц произведения составляет $4 \cdot 2=8$, где 4 и 2—числа согнутых пальцев на руках. Таким же путем произведение 7 9 содержит $2+4=6$ дес. и 3 $1=3$ ед., т. е. $7 \cdot 9=63$.

Учитель может предложить учащимся старших классов проверить справедливость сказанного правила при помощи тождества:

$$[(x-5)+(y-5)] \cdot 10 + [5-(x-5)] \cdot [5-(y-5)] = xy,$$

где x и y —сомножители, $(x-5)$ и $(y-5)$ —числа протянутых пальцев на каждой руке; $5-(x-5)$ и $5-(y-5)$ —числа согнутых пальцев на каждой руке ($x > 5$ и $y > 5$).

К вопросу развития счетных приборов можно возвратиться на занятиях в математическом кружке позже и тогда поставить вопрос о дальнейшем развитии счетных приборов вплоть до наших дней. Надо подчеркнуть ту мысль, что главным назначением и значением приборов, в частности наших русских счетов, является почти механическое осуществление представления 10 единиц одного разряда в виде одной единицы высшего разряда; путем конструирования счетчиков того или иного рода решается задача сделать этот основной момент вычисления более автоматическим, менее зависящим от внимания вычислителя.

Указанные выше приспособления—счеты и счетчики—в первую очередь применяются для действий сложения и вычитания; умножение и деление, как последовательное сложение и вычитание, требуют на этих приборах большей затраты времени; они выполняются более сложными приборами. Но есть один простой прибор для механизации умножения, описанный Непером (1550—1617 гг.), изобретателем логарифмов, в его „Счислении на палочках“. Принцип палочек Непера взят из индусского приема умножения и положен в основу устройства счетной машины умножения.

Учащимся V класса интересно в кружковой работе познакомиться и с индусским приемом умножения и с палочка и Непера для умножения многозначных чисел и десятичных дробей с большим числом десятичных знаков (см. гл. V).

Следует указать учащимся устройство машин для суммирования, которыми пользуются кассиры у нас в магазинах, и более сложные машины для умножения и деления—это распространенные у нас арифмометры, с которыми желательно ознакомить учащихся на практике¹.

¹ СССР принадлежит первенство в изобретении арифмометра. Эта счетная машина была создана русским инженером В. Т. Однером в 1874 году в б. Петербурге и в дальнейшем получила массовое распространение.

Техника счетных машин знает значительно большие достижения, вплоть до полных автоматов, где работа вычислителя заключается только в том, чтобы выставить множимое, множитель, делимое и делитель, а затем вся дальнейшая работа выполняется машиной.


Запись чисел. Основания позиционной системы (поместного значения цифр), которая давно уже имела в счетных приборах (абаке, счетах), не сразу легли в основу письменного изображения числа. С древнейших времен употреблялись разные знаки для изображения чисел, начиная с черточек, с кружочков (как у китайцев еще за $2\frac{1}{2}$ тысячи лет до нашей эры) и т. п. Полностью написанные имена числительные, а затем начальные буквы этих числительных обозначали числа у различных народов. Особенно распространено было употребление букв азбуки в порядке их расположения у греков, у евреев, у славян, так что у них буквы алфавита служили вместе с тем и цифрами. При этом, конечно, приходилось придумывать дополнительные знаки, чтобы не сделать ошибки в смысле того, что означает буква в данной комбинации букв.

До настоящего времени для обозначения небольших чисел на циферблате часов, на страницах книги, в оглавлениях и т. п. употребляют римские цифры. Следует указать учащимся, что в начертании римских цифр имеются следы пальцевого счета и что римскими цифрами записывают не по позиционной системе, а в виде суммы чисел (или разности), выраженных каждой цифрой в отдельности:


$$\text{MDXVII} = 1000 + 500 + 10 + 5 + 2 = 1517.$$

Пользоваться римской нумерацией при письменном выполнении действий очень неудобно.

В славянской нумерации над буквами славянского алфавита, которые должны были изображать числа, ставился особый знак — „титло“

. Если число записывалось двумя, тремя буква-

ми, то титло ставилось только над одной из букв. Числа второго десятка, например тринадцать, писались, как произносились „тринадесять“¹, — раньше ставилась буква, обозначающая число три, по-

том — десять: , круглые десятки и сотни обозначались особыми

буквами. Всего в славянской письменной нумерации было 27 знаков; этого было достаточно для того времени, когда славяне (примерно 1000 лет тому назад) не знали больших чисел. В дальнейшем на Руси была разработана система счисления, дававшая возможность записывать и называть огромные числа, с которой полезно познакомиться учащимся во время внеклассных занятий².

¹ Число „один“ называлось „един“, и до сих пор в нашем словаре есть слово „единный“.

² См. литературу, указанную для чтения учащихся.

Употребляемые нами цифры неправильно называются арабскими; большинство исследователей считает авторами современных цифр—индусов.

В связи с практикой начертание цифр постепенно менялось, пока приобрело современный вид.

Европейские народы познакомились с индусским способом счисления по латинскому переводу учебника арифметики знаменитого хорезмского математика Мухаммеда ибн Мусы ал-Хорезми¹.

Надо сказать, что не без борьбы счетные приборы уступили свое место письменной записи. До XVI века пользовались в европейских школах счетными приборами и римской и буквенной нумерацией. С XVI века для малограмотных попрежнему преподавалось счисление при помощи абака, но для более подготовленных вводилась письменная нумерация по десятичной позиционной системе.

В России в математических рукописях XVII века уже встречаются современные цифры, которые постепенно стали заменять славянские обозначения цифр (буквы).

Замечания. 1. Вышеизложенные исторические указания учителю следует использовать для того, чтобы показать учащимся, что математические понятия уточняются в связи с потребностями практики, в связи со все развивающимися производственными процессами, с развитием техники, естествознания.

2. В настоящем руководстве мы не даем подробных исторических сведений о развитии счисления; не указываем, когда и кем были сформулированы законы действий и т. п. Отсылая к указываемым нами источникам по истории математики, мы ставим себе только методическую задачу—показать преподавателю, в каком направлении он может использовать исторические сведения в непосредственной работе с учащимися, сообщая некоторые исторические сведения на уроке, относя дальнейшую работу с историческими пособиями, со счетными приборами на занятия в математическом кружке.

§ 3. Указания к проведению урока: счет, число, нумерация (устная и письменная)

В § 2, 3, 4 дается материал для проведения этого повторительного урока; из этого материала учитель отбирает то, что находит нужным для своего класса.

Урок может быть проведен в виде вводного слова учителя с привлечением учащихся для ответа на отдельные поставленные им вопросы. Эта работа отнимает немного времени и, как показывает многократно повторенный опыт, заинтересовывает учащихся занятиями арифметикой. Недооценка этого эмоционального момента в преподавании нередко

¹ Мухаммед сын Мусы из Хорезма (ныне Узбекистан) родился во второй половине VIII века, умер между 830 и 840 годами.

приводит к тому, что в V классе учащиеся, особенно хорошо усвоившие курс арифметики начальной школы, неохотно занимаются тем, что, им кажется, они уже знают.

Арифметика¹—наука о числах, их свойствах и действиях над ними. Знание арифметики необходимо в жизни, в любой практической специальности, в любой науке (даются примеры).

1. Цель урока—уточнить и систематизировать знания учащихся: а) о получении натурального ряда чисел при счете отдельных (дискретных) объектов установлением однозначного соответствия между множеством данных предметов и множеством натуральных чисел и б) о принципах десятичной системы нумерации.

Учащиеся в большинстве случаев понимают значение счета и умеют считать; надо кратко восстановить в их памяти сущность процесса счета, при помощи которого отвечают на вопрос, сколько предметов в рассмотренной совокупности элементов (в данном множестве).

Устанавливают: сколько бы раз и в каком бы порядке ни повторили счет предметов одной совокупности, каждый раз, в результате счета, получится одно и то же число—натуральное число, которому присвоен определенный термин.

2. Основные понятия, с которыми учащиеся имеют дело при изучении чисел—„равно“, „больше“, „меньше“,—им знакомы, но небесполезно затратить некоторое время для того, чтобы создать у них впечатление о самом процессе сравнения численности двух конечных множеств (совокупностей), об установлении взаимно однозначного соответствия между элементами заданных множеств (карандашей, книг), и перейти к сравнению характеризующих их чисел (натуральных чисел).

Два натуральных числа равны, если каждой единице одного числа можно указать одну соответствующую единицу другого числа и обратно. Одно число считается большим или меньшим другого,

¹ Название „арифметика“ произошло от греческих слов „аритмос“ — число и „техне“ — искусство.

смотря по тому, предшествует ли оно этому последнему числу или следует за ним в той последовательности слов, которая установлена для счета: „один, два“ и т. д.

Надо обратить внимание учащихся на то, что сравнивают числа, отвлекаясь (абстрагируя) от того, что одно число характеризует совокупность, состоящую, например, из книг (предметов), другое — характеризует совокупность, например, карандашей. Характеризуя совокупность из двух, трех и т. д. предметов, отвлекаясь от особенностей каждого объекта (элемента, совокупности множества), говорят об отвлеченных (абстрактных) числах, дают ответ на вопрос сколько?, независимо от того, каких предметов (количественная характеристика множества).

3. После того как повторили, что в результате счета отдельных объектов приходят к понятию натурального ряда чисел: 1, 2, 3, ..., в котором числа расположены так, что каждое число больше предшествующего ему и меньше последующего (следующего за ним) и что только число 1 не следует ни за каким числом, обращают внимание учащихся на то, что натуральный ряд чисел бесконечен. Последовательный счет дает бесконечный ряд чисел: досчитав до любого числа и сказав „да еще один“, получают новое число, для которого нужно только составить название.

4. Как сказано в главе I, с идеей количественного числа неразрывно связана и идея порядкового числа. Удобно подчеркнуть эту мысль на натуральном ряде чисел; если предметы совокупности размещены в известном порядке¹, то предмет, называемый словом „один“, будет первым предметом; предмет, называемый словом „два“, всегда будет вторым и т. д. В натуральном ряду чисел каждое число определяется местом, занимаемым им в этом ряду. Полезно показать расположение натуральных чисел на числовом луче, начиная с 1.

Замечание. а) Единица, „один“, отвечает на вопрос сколько, есть натуральное число, которое не следует непосредственно ни за каким натуральным числом и помещается первым в натуральном

¹ Упорядоченное множество.

ряду чисел; б) по существу ноль тоже отвечает на вопрос сколько?—говорит, что нет предметов. В процессе развития понятия числа ноль вводится как число (целое неотрицательное)¹.

5. Учащиеся из курса начальной школы имеют достаточные сведения о разрядах и классах, поэтому повторение с ними более общего процесса—счета группами—не представляет затруднений.

Здесь надо только вспомнить с учащимися известные им единицы счета и подчеркнуть, что десяток, сотня, тысяча и т. д. суть (единицы различных разрядов) единицы счета. Каждый десяток состоит из 10 единиц, сотня—из 10 десятков и т. д. Счет больших совокупностей объектов ведется тысячами, миллионами и т. д.

Тысячу следует рассматривать и как единицу 4-го разряда и как единицу II класса; тогда просто единица получает наименование единицы I класса. Тысяча единиц каждого класса составляет единицу следующего высшего класса; так, 1000 единиц II класса составляет новую единицу III класса, названную „миллион“. 1000 единиц III класса (класса миллионов) составляет новую единицу IV класса, названную „миллиард“, или „биллион“. 1000 единиц IV класса (класса биллионов) составляет единицу V класса—„триллион“ и т. д.².

Число 10 есть основание десятичной системы счисления. Единицы счета в десятичной системе счисления—различные степени этого основания:

$$10^0=1, 10^1=10, 10^2=100 \text{ и т. д.}$$

$$57683 = 5 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 3;$$

$$57683 = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0;$$

$$N = a^0 10^n + a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n.$$

¹ После введения числа 0 можно дать изображение натурального ряда чисел на полупрямой OA в виде ряда равностоящих точек (в направлении от 0 к 1, 2, 3, ...); где 01 есть единица масштаба и изображает число 1; отрезки 02, 03 и т. д. изображают числа 2, 3 и т. д.

² 1000 триллионов—1 квадриллион; единицы последующих классов имеют названия квинтиллион, секстлион, септиллион, октиллион, нониллион, дециллион и т. д. Каждый класс в этой системе имеет 3 разряда. Прежде каждый класс состоял из 6 разрядов; следы этого видны в том, что миллиардом (биллионом) называют 10^9 у нас и во Франции; 10^{12} —в Англии и Германии и других странах.

Надо обратить внимание учащихся на тот факт, что для названия множества натуральных чисел практически пользуются ограниченным числом терминов (хотя число их неограниченно возрастает). Для чисел первого десятка имеется 10 терминов; при помощи их и термина „сорок“ можно назвать любое число до 99 включительно. Для того чтобы назвать любое трехзначное число, нужен еще только один термин — „сотня“; далее вводятся новые термины: тысяча, миллион, миллиард, триллион, при помощи которых читаются числа; обычно больше терминов не вводят, пользуются показателями степени, так, 1 триллион читается, как 10^{12} , 1 квадриллион, как 10^{15} , и т.д.

Учащиеся уже в начальной школе узнают, что термины „одиннадцать“ (один на десять), „двадцать“ и др. составляются из названий чисел первого десятка.

Учащиеся V класса должны хорошо усвоить, что понимается под устной и письменной нумерацией, но соответствующих определений не следует от них требовать.

Учащимся следует указать главные достоинства письменной десятичной нумерации, — мы их подчеркиваем при выяснении правила выполнения каждого действия. Эти достоинства заключаются: 1) в том, что число знаков сокращено и доведено до 10, считая в том числе и нуль; 2) в том, что значение каждой цифры¹ определяется начертанием и ее местом, ее положением (позиционная система). Один из известных математиков XVIII—XIX века — Лаплас (1749—1827 гг.) так говорит о гениальном изобретении десятичной системы: „Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти

¹ Слово „цифра“ у нас употребляется как название знака, которым записывают число. Первоначально слово „нуль“ (по-индусски *sinua*) означало „пустой“. Арабы перевели это слово на свой язык „ас-сифр“, откуда и пошел термин „цифра“ (по-латыни „нуллюс“). Наше обозначение нуля кружком сложилось в связи с работой на абаке, когда на абаке перешли к уничтожению перегородок между колонками, обозначавшими разряды. Надо было отметить колонку, в которой не было знака, и ее чертили в форме \square , или \square , или \circ .

к такой методе, мы видим ясно на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, для которых эта мысль остается скрытой".

Поместное значение цифр и употребление нуля для записи недостающих разрядов позволяют любое число кратко и просто записать при помощи только 10 знаков.

В сборнике задач по арифметике дается наглядная таблица разрядов и классов; полезно вывесить ее в классе. Также полезно иметь в качестве наглядного пособия абак, который может быть изготовлен в школе.

Для более глубокого усвоения принципа десятичной нумерации показывают учащимся нумерацию чисел на счетах (классы и разряды), учат их откладывать числа на счетах и читать числа.

Замечания. 1. Учащиеся нередко смешивают понятия „цифра“ и „число“. Так, при требовании найти сумму чисел 8956 и 91000 дают ответ 28 и 10, т. е. ответ говорит о „сумме цифр“ каждого из данных чисел (указанный случай не единичен).

2. Требование написать самое большое и самое меньшее двузначное, трехзначное и т. д. число, запись числа в виде суммы единиц его разрядов, т. е. запись: $5632 = 5000 + 600 + 30 + 2$, также затрудняют учащихся.

3. Учащиеся V класса, умея в большинстве случаев сравнивать числа, не умеют правильно писать знаки неравенств.

На эти недочеты в работе должен обратить внимание учитель; в частности, он должен выяснить учащимся значение слова „цифра“ и показать на примерах условность употребления слова „цифра“ вместо слова „число“, когда говорят: „цифры пятилетки“, „сумма цифр“ и т. п.

Округление целых чисел. На больших числах (в дальнейшем курсе на разнообразных упражнениях с мерами) учитель может повторить с учащимися: а) все, что они знают о точности, с которой даются числа, и б) правила округления чисел.

Указание. При счете небольшого числа предметов число, получающееся в результате счета, берут точно; при счете большого числа предметов поступают различно; так, если завод указывает, что выпущено 5684 автомобиля, то число дается точно; но при счете, например, числа жителей в городе, числа зерен ржи в 1 кг, добычи угля, нефти результат берут округленно. Округление числа состоит в замене нулями нескольких низших разрядов данного числа (если оно записано цифрами), причем, если первая из отбрасываемых цифр более 5, то последнюю из оставляемых цифр (точнее, число, записываемое последней оставляемой цифрой) надо увеличить, как говорят, „усилить“ на одну единицу. Мы подчеркиваем

слова „в замене нулями“, потому что учащиеся на практике, желая округлять числа, иногда приписывают нули, иногда просто откидывают низшие разряды, не заменяя их нулями. Менее всего применяется в школе правило „четной цифры“, заключающееся в следующем: если отбрасывается одна только цифра 5, то последняя сохраняемая цифра оставляется без изменения в том случае, когда она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная. Соблюдение этого правила повышает точность сложных вычислений, так как в этом случае примерно одинаково часто встретится необходимость увеличить и уменьшить значение числа при округлении.

Пример. 237485 *m* угля округлены до десятков, сотен, тысяч: 237 480 *m*; 237 500 *m*; 237 000 *m*.

В данном случае нуль и нули поставлены вместо одного или нескольких низших разрядов числа. Выполняя с учащимися округление чисел, надо подчеркнуть, что в записях: 1 *kg* = 1000 *g*; в куске 200 *m*; доставлено 300 пар обуви и т. п.—числа даны точно, и нули показывают отсутствие единиц, десятков и тысяч (не заменяют цифр низших разрядов)¹.

§ 4. Величина. Измерение величин. (Общие указания)

Задача измерения величин—это одна из тех задач, которые возникли уже на первых ступенях человеческой культуры. Наряду со счетом отдельных (дискретных) объектов на самой ранней ступени человеческого развития настоящая практическая потребность вызвала к жизни простейшие приемы измерения непрерывных (сплошных) величин, сначала наиболее употребительных, а именно: длины, площади, объема, веса, времени—в связи с потребностями измерять расстояние, производить обмеры земельных участков, определять количество зерна, погребного для засева, и т. п.

Теория величин может быть изложена лишь после развития понятия числа введением иррациональных чисел. Поэтому она не может быть с достаточной полнотой рассмотрена в данной работе. Исходя из методических соображений, мы даем некоторые сведения о величине в данной главе и развиваем их в дальнейшем в главе „О дробном числе“.

При счете совокупность однородных объектов характеризуется числом (натуральным); например, 24 хлеба, 24 стола, 24 монеты (двугривенных и гривенников). Если хотят получить понятие об отдельном объекте совокупности или узнать, не отличаются ли однородные объекты совокупности по своим свойствам (например, если хотят узнать, одинаков ли вес хлеба, одинаковы ли высота, длина столов и т. п.), то необходимо точнее определить в предмете (или явлении) то, что поддается количественному учету (объем, масса, длина и т. п.).

Известны определения величины, даваемые в курсах „Арифметики“: „Величиной называется то, что может увеличиваться или уменьшаться“; „Все то, что может быть равно, больше или мень-

¹ См. гл. X § 21.

ше¹. Эти определения слишком общи и недостаточны, чтобы дать понятие о математической величине.

В БСЭ проф. В. Каган так формулирует определение величины: „Величина есть свойство совокупности объектов, по отношению к которому установлены критерии их сравнения, т. е. признаки их равенства или неравенства“.

Из всех определений явствует, что основные свойства величины—ее способность быть сравниваемой, быть равной, большей или меньшей, делиться на части—и что эти свойства величины в первую очередь должны подлежать математическому изучению. А для этого должны быть установлены критерии сравнения, или, другими словами, приемы измерения и единицы измерения. Так, ум, храбрость человека и т. п. не являются математическими величинами, не могут входить в круг математического исследования потому, что для них не существует единиц сравнения и приемов измерения, они не могут быть выражены числами.

Евклидом в его „Началах“ были сформулированы аксиомы, которые имеют общее значение для измерения всех величин; современная наука вводит несколько дополнительных условий.

Отсылая интересующихся к литературным источникам по теории арифметики, указанным нами в списке, ограничимся приведением следующих аксиом:

1. Две величины, порознь равные третьей, равны между собой.

2. Если к равным величинам прибавить равные, то полученные суммы равны между собой; если от равных величин отнять равные, то получатся также равные между собой величины.

Первую аксиому Евклида можно понимать так: в случае, если равенство между двумя величинами A и B непосредственно не может быть установлено (или затруднително), то оно может быть установлено при помощи третьей величины. Также и вторая аксиома показывает один из способов установления равенства двух величин.

Величины бывают однородные и разнородные. Однородными называются такие величины, которые или равны между собой, или отличаются только своим размером. Измерить величину—значит сравнить ее с величиной, однородной с измеряемой и принятой за единицу измерения, или, иными словами, выразить числом ее отношение к величине, однородной с измеряемой и принятой за единицу измерения. Сравнить между собой можно только величины однородные.

Для каждого рода величин устанавливают свои приемы измерения, причем общее в этих приемах—процесс, имеющий целью разбить измеряемую сплошную (непрерывную) величину на отдельные части, и счет этих частей (см. ниже). Для пространственной величины—протяженности—в основном прием измерения состоит в наложении (или вложении) одной величины (масштаба) на другую; этот прием основан на предположении, что тела можно переносить из одного места в другое без их деформации. Измерение других

¹ Надо отметить, что слово „величина“ часто употребляется и в смысле размера, значения, которое примет или принимает величина в частном случае; например 5 см (длины), 3° (тепла) и т. п. Надо разъяснить учащимся, что не путь есть величина, а длина пути; что не кусок металла есть величина, а его вес и т. п.

величин требует применения особых приборов, например весов для взвешивания, причем предполагается существование точных весов и неизменяемой массы¹. В большинстве же случаев нахождение „отношения“ (измерение), в частности, физических величин не может быть выполнено непосредственно, приходится прибегать к косвенным приемам измерения, как, например, при измерении плотности тела, яркости освещения; в геометрии даются способы сведения измерения всех трех пространственных величин: длины, площади и объема—к измерению длины. Для каждого рода величин принимается единица измерения—величина, известная, однородная с измеряемой и называемая мерой (именованная единица).

§ 5. Указания к уроку: величина, измерение величины, меры

Обычно учащиеся, перешедшие в V класс, знают единичные отношения метрических мер длины, но не всегда имеют конкретное представление о мерах и не отдают себе отчета, как получаются названия различных мер при помощи греческих слов „дека“ (десять), „гекто“ (сто), „кило“ (тысяча) и латинских слов „деци“ (одна десятая), „сантиметр“ (одна сотая), „милли“ (одна тысячная). Надо объяснить это учащимся и тем самым облегчить для них и процесс раздробления и превращения мер².

Слабее знают учащиеся V класса квадратные и кубические меры. На это следует обратить внимание на первых же уроках арифметики. Должны быть изображены и изготовлены квадратные единицы, измеряющие площади фигур: 1 кв. см, 1 кв. дц, 1 кв. м.

На вопрос, какая мера называется 1 кв. км, учащиеся должны дать ответ, что это квадрат, каждая сторона которого равна 1 км. Термины „квадратный декаметр“ или „гектометр“ нецелесообразно давать учащимся, но они должны твердо знать, что квадрат, каждая сторона которого равна 10 м, называется аром (или соткой); квадрат, каждая сторона которого равна 100 м, называется гектаром. Ар и гектар—это меры измерения земельных участков (до

¹ Известно, что эти предположения не совсем согласуются с действительностью.

² В науке и технике употребляется мера длины, которой измеряются очень малые отрезки—1 микрон; в 1 мм—1000 микронов.

введения метрической системы мер в России пользовались десятинами—2400 кв. саженой).

Аналогично проводится работа с кубическими мерами. Куб, ребро которого равно единице длины,—кубическая единица. Учащиеся должны изготовить из бумаги или картона 1 куб. см, 1 куб. дм и построить 1 куб. м хотя бы брусьюми в одном из углов классной комнаты.

Упражнения: 1) выражают составное именованное число в виде простого именованного числа и обратно, например: $215 \text{ м } 7 \text{ дм } 3 \text{ см} = 21573 \text{ см} = 2157 \text{ дм } 3 \text{ см} = 215 \text{ м } 7 \text{ дм } 3 \text{ см}$;

2) откладывают на счетах составные именованные числа, например: 256 руб. 43 коп.; 415 кг 200 г и др.

В дальнейшем при повторении действий с целыми числами повторяют действия и с составными именованными числами, которые в основном известны учащимся из курса начальной школы.

В классе полезно иметь таблицы метрической системы мер.

Таблицы мер должны быть составлены самим учителем с тем, чтобы в них не было ничего лишнего, чтобы они давали учащимся те меры, которые им известны, которыми они пользуются, и те соотношения, которые они могут сознательно применять. На вопрос, сколько в квадратном метре квадратных сантиметров или сколько в гектаре квадратных метров, учащийся отвечает „1000“, иногда отвечает „10 000“, но и тот и другой ответ они дают по памяти, не представляя себе конкретного соотношения мер.

Примерные таблицы:

Меры длины, площади и объема.

1) $1 \text{ м} = 10 \text{ дм}$

$1 \text{ кв. м} = (10 \cdot 10) \text{ кв. дм} = 100 \text{ кв. дм}$

$1 \text{ куб. м} = (10 \cdot 10 \cdot 10) \text{ куб. дм} = 1000 \text{ куб. дм}$

2) $1 \text{ м} = 100 \text{ см}$

$1 \text{ кв. м} = (100 \cdot 100) \text{ кв. см} = 10\,000 \text{ кв. см}$

$1 \text{ куб. м} = (100 \cdot 100 \cdot 100) \text{ куб. см} = 1\,000\,000 \text{ куб. см}$

3) $1 \text{ а} = (10 \cdot 10) \text{ кв. м} = 100 \text{ кв. м}$

$1 \text{ га} = (100 \cdot 100) \text{ кв. м} = 10\,000 \text{ кв. м}$

$$4) 1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}$$

$$1 \text{ кв. м} = (10 \cdot 10) \text{ кв. дм} = (100 \cdot 100) \text{ кв. см} = (1000 \cdot 1000) \text{ кв. мм}$$

Меры веса.

$$1 \text{ т} = 10 \text{ ц} = 1000 \text{ кг} \quad \text{„кило“} — 1000$$

$$1 \text{ ц} = 100 \text{ кг}$$

$$1 \text{ кг} = 1000 \text{ г}$$

$$\text{„гекто“} — 100$$

$$\text{„дека“} — 10 \text{ и т. д.}$$

В дальнейшем при изучении десятичных дробей эта таблица дополняется следующей:

$$1 \text{ м} = 0,001 \text{ км} \quad \text{„деци“} — \frac{1}{10} = 0,1$$

$$1 \text{ дм} = 0,1 \text{ м} \quad \text{„сантим“} — \frac{1}{100} = 0,01$$

$$1 \text{ см} = 0,1 \text{ дм} = 0,01 \text{ м} \quad \text{„милли“} — \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$1 \text{ мм} = 0,1 \text{ см} = 0,01 \text{ дм} = 0,001 \text{ м. Например, } \frac{1}{1000} \text{ г} = 1 \text{ мг.}$$

Хотя учащиеся в начальной школе учились измерять, но полезно при повторении вопроса об измерении величин произвести в действительности измерение длины (протяженности) для того, чтобы поставить перед учащимися следующие вопросы: какую величину измеряют (например, протяженность: длину или ширину класса)? В чем заключается процесс измерения? Учитель должен тщательно показать учащимся, что измерение он производит „мерой“ — единицей сравнения того же рода, как и измеряемая величина, например метром. Процесс измерения состоит в том, что сплошная величина — длина — разбивается на равные части — длины в 1 м , а затем считается число этих частей. Результат показывает, сколько отрезков длиной в 1 м (сколько раз 1 м) укладывается в длине комнаты. Полученное число, например, 4 показывает длину комнаты в метрах: 4 м (именованное число). Можно указать учащимся, что если по длине комнаты сделаны заметки, где оканчивается откладываемый ими метр, то при пересчете этих длин в любом порядке они получают то же число. Как правило, в длине или ширине комнаты не будет содержаться целое число метров; следует продолжить процесс измерения более мелкими ме-

рами, например дециметрами, и показать получение в результате измерения составного именованного числа (приближенного числа).

В дальнейшем будет показано получение дробного числа от дробления единицы меры на равные доли и измерение величины при помощи этих долей.

Итак, числа могут получаться от счета однородных предметов; числа получаютс я и в результате измерения непрерывной, сплошной величины,—это так называемые „именованные числа“.

Замечания. 1. Действия производятся над отвлеченными числами. Наименование показывает только единицу, которой производился счет или измерение. Понятно, что отвлеченному числу может быть придано любое наименование, например: $4 + 3 = 7$; 4, 3, 7—отвлеченные числа, придадим наименование (единицы счета или измерения): яблок, килограммов, метров и т. д.

2. Учащиеся знают, что единицей счета (сравнений) может быть и любая группа единиц: десяток, сотня, тысяча и т. п., которые становятся новыми счетными единицами. Например, если учащихся в школе 400 человек, по 40 человек в классе, то счет можно вести новой счетной единицей—„класс“—и говорить, что в школе 10 классов. Единицей измерения также может быть любая группа основных единиц: метр, равный 100 см, бочка, содержащая 40 ведер, и т. д. Понимание учащимися возможного разнообразия единиц, измеряющих одну и ту же величину, может предотвратить их от обычной записи в тетрадах ответов задач без наименований единицы измерения ($4 м = 400 см$, но $4 \neq 400$).

3. После того как учащиеся уточнили свои представления о величине и о процессе измерения; установили, что величины могут измеряться только однородными с ними величинами; что результат измерения выражается числом именованным и всегда приближенным; что величины могут измеряться различными мерами, более или менее крупными, следует на примерах показать, что на практике для измерения выбирают соответствующие меры в каждом отдельном случае. Так, например, размеры на чертежах даются в миллиметрах, размеры для изготовления в мастерских столов, табуретов—в сантиметрах, высота, ширина помещения—с точностью до дециметров, расстояние по железным и водным путям—в километрах, длина границ государства—в сотнях и тысячах километров, расстояние до планет—в миллионах километров и т. д. Надо повторить с учащимися меры длины, веса, площади и объема, меры времени, повторить перевод одних мер в другие однородные с данными¹, хотя возможности в этом отношении при изучении целых чисел у учителя ограничены. К этому вопросу надо возвратиться в действиях с десятичными дробями, когда перевод мер в более крупные не будет ограничен условиями делимости нацело.

¹ Не следует смешивать термины „раздробление“—преобразование именованного числа в единицы какого-нибудь низшего разряда—с термином „превращение“—преобразование именованного числа в единицы высших разрядов.

5. Следует обратить внимание на правильность записи учащимися наименований мер по ОСТу; соответствующую таблицу мер и даже отдельно таблицу наименований полезно вывесить в классе. Решая задачи с учащимися, следует указывать на взятую (получаемую) точность при измерении.

6. Упражнения решаются по стабильному задачнику, гл. I, § 1.

**К занятию в
кружке
(Нумерация).**

1. Желательно дать учащимся наглядное представление о больших числах. Для этой цели полезно решать общеизвестные задачи; например, сколько времени надо потратить для подсчета миллиона предметов, если каждую секунду отсчитывать по одному предмету, и т. п.

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, можно закончить работу почти через месяц, или, выражая в секундах, через 1 000 000 секунд. Миллион суток составляет более 27 столетий, т. е. от начала нашей эры не прошло еще 1 млн. дней ($365 \cdot 27 \cdot 100 = 985\,500 < 1\,000\,000$), и т. д.

Полезно познакомить учащихся с некоторыми числовыми величинами, как, например: число жителей на Земле 2 млрд. 500 млн.¹ человек; расстояние от Земли до Солнца 149 500 000 км; поверхность земного шара достигает 510 млн. кв. км, а объем земного шара свыше 1083 млрд. куб. км и т. д.

Надо познакомить учащихся с грандиозными числами нашей советской действительности; так, например, общая сумма расходов по государственному бюджету на один только год составляет много сотен миллиардов рублей; объем созданного советскими людьми Цимлянского моря достигает 12 с половиной млрд. куб. м; общий объем всех корпусов здания Московского университета на Ленинских горах 2 млрд. 600 млн. куб. м и т. д.

2. После повторения вопроса о десятичной нумерации в порядке кружковой работы полезно показать учащимся записи одного и того же числа в различных системах. Например, дана запись числа в десятичной системе, надо записать ее в пятеричной. Порядок работы может быть следующий: 1) выясняется, сколько и какие цифры необходимо иметь (предполагая, что начертание цифр то же, что в нашей нумерации) для записи чисел в пятеричной системе; при этом употребляется 5 знаков—цифр: 0, 1, 2, 3, 4; пять единиц низшего разряда составляет единицу высшего разряда; 2) предлагается записать небольшое число, например, состоящее из трехсот восьмидесяти девяти единиц, в пятеричной системе.

$$\begin{array}{r} \text{Р е ш е н и е:} \quad 389 \quad | \quad 5 \\ \hline 4 \quad 77 \quad | \quad 5 \\ \hline 2 \quad \quad | \quad 15 \quad | \quad 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad | \quad 0 \quad \quad | \quad 3 \end{array}$$

Объяснение. Сначала надо узнать, сколько пятерок (5 ед.) в данном числе: 77 пятерок и остается 4 ед., т. е. в данном числе 77 ед. 2-го разряда и 4 ед. 1-го разряда. Сколько единиц 3-го разряда составляют 77 ед. 2-го разряда? Ответ: $77:5$, т. е. 15 ед.

¹ В 1954 году.

3-го разряда, а единиц 2-го разряда (в пятеричной системе) не осталось. Единица 3-го разряда содержит $5 \cdot 5 = 25$, или 5^2 простых единиц, и т. д.; в данном числе: 4 ед.—1-го разряда, 2 ед.—2-го разряда и 3 ед.—4-го разряда, или

$$389 = 3 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 4.$$

Для проверки учащемуся полезно сосчитать число единиц в числе 3024, записанном по пятеричной системе. Ясно, что должно получиться 389 единиц.

При основании, равном числу 10, число 389 может быть изображено в виде $389 = 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 9$;

$$75689 = 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9;$$

$$N = a_0 10^m + a_1 10^{m-1} + \dots + a_n.$$

При основании, равном 5, число может быть изображено в виде:

$$N = b_0 5^n + b_1 5^{n-1} + b_2 5^{n-2} + \dots + b_{n-1} \cdot 5 + b_n.$$

С числами, написанными не по десятичной системе, можно выполнять те же действия, какие выполняем с числами в нашей системе. Но, как видно из нижеприведенных примеров, работа эта требует от нас умственных усилий, в то время как в нашей системе мы выполняем ее почти автоматически.

Даны два числа в пятеричной системе: 4231_5 и 3042_5 .

Выполним сложение и вычитание, помня, что в данном случае 5 единиц низшего наименования составляют одну единицу высшего:

$$\begin{array}{r} + 4231 \\ + 3042 \\ \hline 12323 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 4231 \\ - 3042 \\ \hline 1134 \end{array}$$

Проверка: $\begin{array}{r} - 12323 \\ - 4231 \\ \hline 3042 \end{array}$

$$\begin{array}{r} + 1134 \\ + 3042 \\ \hline 4231 \end{array}$$

Не останавливаясь более подробно на этом вопросе, рекомендуем указать учащимся в книге Я. И. Перельмана „Занимательная арифметика“ главу IV, ОГИЗ, 1934, или др.

К занятию в кружке (Меры). Полезно провести с учащимися небольшую беседу об истории метрологии вообще и метрической системы мер в частности.

В краткой беседе учитель может указать учащимся, что первые единицы измерения были взяты человеком из природы; первыми инструментами для измерения длины, несомненно, были части человеческого тела, на что указывают названия многих мер длины: ступня, пядь, локоть, фут и др. Понятно, что эти способы измерения не могли быть точны: их точность соответствовала потребностям эпохи. Следует привести учащимся приме-

ры¹ произвольности единиц измерения, разнообразия мер, употребляющихся при измерении длин и весов, и указать, что к концу XVIII века, когда шаг за шагом вместе с расцветом буржуазии шел гигантский рост науки, возобновился интерес к астрономии, механике, физике, анатомии, физиологии, во всех странах в употреблении были самые различные меры. Возросшие требования к точности измерения заставили перейти к измерению постоянным масштабом, к созданию постоянных, утвержденных законом единиц мер и их подразделению на более мелкие меры². Надо сказать, что до настоящего времени идет борьба за точность измерения, за усовершенствование приборов и способов измерения, за уменьшение погрешностей при измерении.

Декретом от 21 апреля 1799 года во время французской революции была установлена законом мера метр и было введено новое деление мер.

За метр была принята одна десятиллионная часть четверти земного меридиана. Имеется эталон (образец) метра, который хранится в Международном бюро мер и весов (вблизи Парижа). Как показали впоследствии более точные измерения, длина эталона не соответствует (она несколько меньше) вышеуказанной доле меридиана, но за единицу измерения длин—метр—принята длина этого эталона. Изготовленные для СССР эталоны мер длины и веса—метр и килограмм—хранятся во Всесоюзном научно-исследовательском институте метрологии им. Д. И. Менделеева в Ленинграде.

Одним из мероприятий, имевших огромное культурное значение, было введение в СССР после Великой Октябрьской социалистической революции метрической системы мер постановлением Совнаркома от 14 сентября 1918 года.

До введения советской властью метрической системы мер, когда в России пользовались мерами с самым разнообразным единичным отношением, несогласие между десятичной системой счисления и системой мер усложняло программу по арифметике в школе, заставляло вносить дополнительные главы преобразований и действий с именованными числами.

Полезно рассказать учащимся о старых русских мерах и указать на значительные осложнения в действиях с ними по сравнению с действиями с метрическими мерами.

Меры длины: 1 верста—500 саженей; 1 сажень—3 аршина или 7 футов; 1 аршин—16 вершков и т. д.; 1 аршин ≈ 71 см. Меры веса: 1 пуд—40 фунтов; 1 фунт—32 лота или 96 золотников. И в настоящее время у нас пользуются мерой „пуд“ при подсчете урожая: 1 пуд $\approx 16,38$ кг; 1 кг $\approx 2,44$ фунта³.

2. В связи с решением задач на время учитель может заинтересовать учащихся историческими сведениями о мерах времени

¹ У нас в России, где жило много народностей, имевших свои обычаи, были в ходу, например, десятины: хозяйственная, экономическая, бахчевая, астраханская и др., причем экономическая десятина была почти в 3 раза более астраханской; также разнообразна была длина саженей: маховой, морской, косой и др.

² В Англии и США до сих пор не введена как обязательная метрическая система мер.

³ При подсчетах обычно берут 1 пуд=16 кг, 1 фунт=400 г.

Зависимость времени дня от высоты солнца днем и от высоты звезд ночью и, в соответствии с этим, грубое деление суток на части было известно издавна. Росла хозяйственная жизнь и постепенно уточнялось деление дня на части, и еще за много тысячелетий до нашей эры, вместе с развитием астрономии, было известно подразделение дня на часы; были изобретены солнечные часы; было известно соединение 7 дней в одну неделю и т. п.

Со многими интересными фактами, которые мы не имеем возможности здесь излагать, из истории развития измерения времени и летоисчисления учитель может ознакомить учащихся в беседе в порядке кружковой работы и показать, как, находясь в большой зависимости от солнца и луны, люди стали видеть в них божества, строить им храмы, поклоняться им и как эти верования стали источником эксплуатации одного класса другим. Установление календаря, согласованного с солнечным годом и с лунным месяцем, было крайне трудным делом, так как отношение времени обращения Земли вокруг Солнца (365, 24... суток) ко времени обращения вокруг оси (29, 59 ... суток) не выражается целым числом $\approx 12, 37$. Календарь был выправлен (при Юлии Цезаре) введением так называемого Юлианского календаря с установлением високосного года один раз в течение четырех лет (старый стиль).

К концу XVI века календарь снова был выправлен введением так называемого Григорианского календаря (при папе Григории XIII): 4 октября 1582 года стали считать 15 октября, и впредь из числа високосных лет стали выкидывать те годы, у которых число сотен не кратно 4; так, например, 1800, 1900 годы не считаются високосными (новый стиль).

После Великой Октябрьской революции, декретом от 26 января 1918 года, у нас в СССР был введен календарь по новому стилю, исправивший ошибку в 13 дней, которая накопилась к этому времени со дня введения Григорианского календаря.

Глава III

СЛОЖЕНИЕ

§ 1. Введение

В большинстве учебников отдел о сложении чисел начинается с определения действия сложения, причем очень распространено определение сложения как действия, при помощи которого находится сумма данных чисел (А. П. Киселев и др.). При таком определении сложения дается предварительно в тех или иных словах определение суммы как числа, в состав которого входят все единицы данных чисел. Во многих учебниках и руководствах по арифметике сложение определяется как арифметическое действие, при помощи которого узнается число, содержащее столько единиц, сколько их во всех данных числах вместе. Это число называется суммой. (Н. Извольский, А. Малинин и К. Буренин и др.) Это определение, по существу, не отличается от приведенного выше определения сложения и суммы, хотя дается в иной форме. Значительно реже (К. Н. Рашевский) дается определение сложения как арифметического действия, при помощи которого к одному числу присчитывается столько единиц, сколько их находится в другом. Можно поставить вопрос: не является ли слово „присчитывается“ синонимом слова „прилагается“, „прибавляется“, тем самым не получается ли порочный круг в определении, обесценивающим самое определение.

Еще в дореволюционной методической литературе подвергались обсуждению и критике различные определения сложения, сводящиеся к замене понятия сложения понятиями „соединяются“, „присчитываются“, „содержатся во всех данных числах“ и т. д. Исходя из указанных соображений, автор приходит к выводу о нецелесообразности заучивания учащимися определения сложения. Известный педагог И. Александров в книге „Основания арифметики соизмеримых чисел“, предназначенной для старших классов средних учебных заведений (1913), так начинает свой курс: „Для сложения нет хороших определений“, но прибавляет дальше: „Дей-

ствие это так просто и общеизвестно, что не требует определения¹. Мы считаем, что достаточно начать с учащимися отдел о сложении чисел в V классе с восстановления в памяти самого процесса сложения, выяснения сущности действия сложения.

§ 2. Сложение

Выше в гл. II „Нумерация“ было указано, что понятие натурального числа возникло в процессе счета конкретных объектов различных совокупностей (множеств), как характеристика численности множества. Приступая к повторению действия сложения, можно восстановить с учащимися оба возможных приема непосредственного выполнения действия сложения.

1-й прием состоит в том, что обе совокупности предметов, подлежащие сложению, соединяются в одну; в этой новой совокупности будут содержаться все предметы, бывшие в первой и во второй совокупности. Надо указать учащимся, что при этом выполняется только соединение предметов обеих совокупностей в одно целое. Чтобы дать численный ответ, надо пересчитать все объекты, которые имеются во вновь получившейся совокупности.

2-й прием: можно к предметам первой совокупности (элементам первого множества) постепенно присчитывать по одному предмету второй совокупности и получить сумму двух данных совокупностей.

Повторяют названия: слагасмые, сумма, а также запись $a + b = c$ ², где вместо a и b могут быть подставлены любые числа с любыми наименованиями, соответствующие любым взятым множествам.

Следует еще раз указать, что всегда в арифметическом действии сложения выполняют сложение отвлеченных чисел. Наименование объектов совокупностей учитывают лишь для качественной характеристики полученной новой совокупности (32 яблока или 32 карандаша).

¹ Современная постановка вопроса об арифметических действиях на основании учения о множествах см. В. М. Бродис „Теоретическая арифметика“.

² Знак $+$ возник из последней буквы латинского слова et (союз „и“); введены знаки $+$ и $-$ в XV веке, „Математический вестник“, 1916, № 1.

§ 3. Законы сложения

Выясняя с учащимися сущность сложения, следует повторить очевидные факты:

1) что вместо того, чтобы к предметам 1-й совокупности присчитывать по одному предмету 2-й совокупности, можно, наоборот, к предметам 2-й совокупности присчитать по одному предмету 1-й совокупности,—в обоих случаях будут сосчитаны все предметы, получится одна и та же сумма;

2) что понятие сложения может быть распространено на сколько угодно чисел, и в этом случае соединение соответствующих совокупностей предметов может быть выполнено обоими вышеуказанными приемами: можно соединить все совокупности сразу и пересчитать результат; можно к 1-й совокупности присоединить 2-ю, потом 3-ю, потом 4-ю; можно сначала (любым из указанных приемов) соединить 2-ю и 3-ю совокупности, отдельно соединить 1-ю и 4-ю совокупности и затем соединить обе получившиеся таким путем новые совокупности и т. п.

Другими словами, устанавливают свойства суммы:

1) сумма не зависит от порядка чисел, которые надо сложить:

$$a + b = b + a,$$

говорят: сумма не меняется от порядка своих частей (слагаемых)—закон коммутативности (переместительный);

2) для получения суммы можно какие угодно из данных трех чисел заменить числом, равным их сумме:

$$a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c;$$

закон ассоциативности (сочетательный).

Оба закона распространяются на случай нескольких слагаемых¹:

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + c + b = b + c + a; \\ a + b + c &= a + (b + c) = (a + c) + b. \end{aligned}$$

Убеждение в справедливости вышеприведенных законов сложения явилось в результате многократ-

¹ Обобщение коммутативного и ассоциативного законов.

ной проверки на практике соответствующих равенств, а также в результате распространения закономерностей, подмеченных на ряде частных случаев, на все возможные случаи, однородные с ними. В курсах теоретической арифметики учитель найдет доказательство общности этих законов методом полной математической индукции от n к $(n+1)$.

Приведем 5 основных законов арифметических действий, на которых основано сложение, и 6 законов, на которых основано умножение.

1. Для сложения Для умножения

1) $a+b=c$ 1) $a \cdot b = q$

Результат всегда представляет собою число¹ (действие всегда выполнимо).

2) $a+b=c$ 2) $a \cdot b = q$

Результат всегда однозначен.

3) $a+b+c = a+c+b$ и т. д. 3) $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b =$
 $= b \cdot c \cdot a$ и т. д.

Сумма и произведение подчиняются переместительному закону.

4) $(a+b)+c = a+(b+c)$ 4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c =$
 $= a \cdot b \cdot c$

Сумма и произведение подчиняются сочетательному закону.

5) Если 5) Если
 $b > c$, то $b > c$,
 $a+b > a+c$ то $a \cdot b > a \cdot c$

Сумма и произведение подчиняются закону монотонности².

6) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Произведение подчиняется закону распределительного (по отношению к сложению).

¹ Число натуральное.

² Мопотопе (франц.)—монотонный, однообразный.

Все вычисления с целыми числами опираются на эти 11 законов, а также на таблицы сложения и умножения простых единиц и на определения обратных действий — вычитания и деления, что является в процессе изложения курса.

На числовой оси можно показать учащимся, что мы говорим о сложении чисел натурального ряда и что если прибавляют к данному числу a число натурального ряда b (ноль не считается), то получается число c , больше данного; что число c отстоит от начала натурального ряда на b единиц дальше, чем a . Подчеркивание указанного факта окажется полезным в дальнейшем при выяснении случая получения суммы, меньшей данного числа, т. е. случая прибавления отрицательного числа.

Нет необходимости заучивать с учащимися на первых уроках термины и формулировки законов сложения (это надо сделать в дальнейшем — при распространении законов действий на дробные числа), но сущность этих законов учащиеся должны четко себе представлять и пользоваться ими при вычислениях. Запись на буквах не обязательна, но может быть дана в более сильных классах.

Вопросы: 1) в каком порядке проще выполнить сложение чисел: $500 + 800 + 500$? $800 + 500 + 200$? $60 + 70 + 80 + 40 + 30$? Указать, что в последнем примере можно использовать оба закона: $(60 + 40) + (70 + 30) + 80 = 280$.

§ 4. Задачи, решаемые сложением

Для сознательного решения арифметических задач учащиеся должны прежде всего повторить те вопросы, на которые отвечает каждое из четырех арифметических действий, в данном случае действие сложения.

Учитель может предложить учащимся составить простую задачу (вопрос), решение которой (которого) требует применения одного действия сложения. В большинстве случаев учащихся это не затруднит, и они предложат вопросы, требующие применения сложения:

1) в том случае, когда данные части надо соединить в одно целое, и

2) в том случае, когда действие сложения применяется для увеличения данного числа на несколько единиц.

Учитель подчеркивает оба вопроса, на которые отвечает действие сложения.

В рассмотренных задачах и вообще в задачах, служащих для выяснения теории, надо брать небольшие числовые данные, предпочтительно двузначные или небольшие трехзначные, для устного их решения.

§ 5. Правила сложения чисел

Учащиеся V класса знают правило выполнения сложения многозначных чисел; при повторении обращается внимание на обоснование этого правила.

Учитель напоминает учащимся следующее.

При выяснении сущности сложения было установлено, что в основе его лежит счет чисел натурального ряда (присчитывание), но что выполнение сложения многозначных чисел путем присчитывания крайне затруднительно и требует очень большого времени: например, в случае, когда надо сложить $4563 + 3721$; поэтому и дается правило действия сложения над числами, основывающееся на том, что данные многозначные числа можно представлять составленными из чисел различных разрядов. Так,

$$4563 = 4000 + 500 + 60 + 3; \quad 3721 = 3000 + 700 + 20 + 1.$$

Для сложения существуют законы сочетательности и переместительности, и на них основывается правило выполнения этого действия. Например:

$$4563 + 3721 = (4000 + 3000) + (500 + 700) + (60 + 20) + (3 + 1),$$

или

$$(4 \text{ т.} + 3 \text{ т.}) + (5 \text{ с.} + 7 \text{ с.}) + (6 \text{ д.} + 2 \text{ д.}) + (3 \text{ ед.} + 1 \text{ ед.});$$

$$\begin{array}{r} + 4563 \\ + 3721 \\ \hline 8284 \end{array}$$

Выводы, которые должны быть четко подытожены:

1) Значение правила сложения многозначных чисел как технического орудия выполнения сложения.

2) Значение десятичной нумерации для установления правила сложения многозначных чисел.

3) Сведение процесса сложения многозначных чисел к сложению однозначных чисел по таблице сложения.

Мы не считаем необходимым в V классе в повторительном курсе решать много примеров на сложение многозначных чисел. Главное внимание следует обратить на осознание учащимися сущности сложения и законов сложения.

Указания. 1. Имеется много приемов сложения чисел; кроме обычного, Шохор-Троцкий в своей „Методике арифметики“ считает наиболее целесообразным приемом сложения многозначных чисел, в случае большого числа их, следующий: отдельно складывать единицы каждого разряда, записывая полученные частные суммы; затем все частные суммы сложить. В этом случае сложение можно начинать и с низших разрядов, и с высших разрядов; например:

$$\begin{array}{r}
 4568 \quad 33000 \\
 3719 \quad + 2300 \\
 2483 \quad 420 \\
 1569 \quad \underline{45} \text{ начато действие} \\
 +3085 \quad \underline{\hspace{1.5cm}} \text{ с высших разрядов} \\
 7140 \\
 8069 \\
 5132
 \end{array}$$

И действительно, в этом случае: 1) работа протекает крайне спокойно,—сложив единицы одного разряда, можно прервать ее, не боясь забыть ту „цифру“, которую запоминаешь в уме; 2) при этом способе счета легко вскрыть допущенную ошибку.

2. При больших вычислениях принято складывать по два числа; так, в предыдущем примере:

$$\begin{array}{r}
 8287 \\
 4052 \\
 \hline
 12339
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 8287 \\ 4052 \end{array}} \right\}
 \begin{array}{r}
 10225 \\
 13201 \\
 \hline
 23426
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 10225 \\ 13201 \end{array}} \right\} 35765$$

3. В случае двух слагаемых целесообразно начинать сложение с высших разрядов, так как при этом способе приходится предварительно оценивать следующие цифры суммы и учащиеся не механически выполняют сложение, поэтому меньше допускают ошибок.

Учащиеся должны понимать, почему сложение можно начинать и с низших разрядов, и с высших.

4) Надо указать учащимся, что запись слагаемых при письменном выполнении сложения многозначных чисел, которая ведется так, что единицы располагаются под единицами, десятки—под десятками и т. д., не является необходимостью, а только рационализацией работы.

Сложение на счетах. Выполнение сложения многозначных чисел на счетах, как правило, не затрудняет учеников V класса, и они должны приобрести довольно прочный навык в выполнении этого действия. При сложении многозначных чисел на счетах, как и при письменном сложении, пользуются законами сложения и выполняют сложение поразрядно; в работе со счетами прибавление к одному слагаемому второго всегда начинается с прибавления его высшего разряда. Примерная последовательность упражнения: например, 1-е слагаемое 22673, 2-е слагаемое 4215, 4217, 4477, 9437 и т. д.

Практическая работа. Узнать в бухгалтерии школы соответствующие данные и подытожить суммы расходов и доходов за определенный срок.

Проверка. Проверку сложения сложением можно выполнять различно:

1) или вторично выполнять сложение в том же порядке, но, как показывает практика, при этом возможно повторение сделанной ошибки, так что нельзя быть уверенным в правильности выполнения сложения даже при получении одной и той же суммы при двукратном сложении;

2) или проверить сложение, воспользовавшись переместительным или сочетательным законом сложения.

Важно, чтобы учащийся мог объяснить возможность применять тот или иной прием проверки сложения. Давать специальные упражнения на проверку действия сложения сложением не следует, но надо создать у учащихся привычку к постоянному самоконтролю, в порядке выполняемых вычислений (различными приемами). Не приходится говорить, что учащиеся должны привыкнуть, независимо от того, будет выполнена проверка или нет, выполнять все вычисления крайне тщательно и верно.

Глава IV

ВЫЧИТАНИЕ

§ 1. Введение

Над конкретными совокупностями могут быть произведены две простейшие операции: соединение совокупностей и обратная операция — разложение совокупностей. Соединение совокупностей в своей простейшей форме было рассмотрено выше.

Разложению совокупностей в простейшем случае на две неравные совокупности, из которых одна известна, соответствует арифметическое действие — вычитание, а в связи с этим действие вычитания могло бы иметь самостоятельное определение. Но, как будет показано ниже, не все задачи, решаемые вычитанием, подойдут под это определение, и для вычитания дается определение, вытекающее из самого общего его свойства: вычитание есть действие, обратное сложению.

§ 2. Задачи, решаемые вычитанием

Можно начать вопрос о сущности вычитания с рассмотрения или даже с напоминания о трех задачах, решаемых вычитанием.

Задача 1. В класс принесли 37 учебников, и из них роздано в первый же день 12 учебников. Сколько учебников осталось нерозданными?

Задача 2. В одном классе 37 учебников, в другом на 12 учебников меньше. Сколько учебников во втором классе? И в 1-й и во 2-й задачах действие производилось над одинаковыми числами, и одинаковые получились искомые числа. В результате решения 2-й задачи (требовалось уменьшить данное число на несколько единиц) получился остаток, как и в 1-й задаче.

Задача 3. В одной стопке 37 книг, в другой 12 книг. На сколько книг в первой стопке больше, чем во второй?

В этой задаче требуется сравнить два числа, узнать, на сколько одно число больше другого, узнать их разность. В данном случае отыскивается слагаемое, которое надо прибавить к данному, чтобы получить сумму. В вышерассмотренных же случаях отыскивалось слагаемое, к которому надо прибавить данное, чтобы получить сумму. В результате на доске имеются две записи:

$$\begin{aligned} 37 &= 25 + 12 \\ 37 &= 12 + 25 \end{aligned}$$

Во всех трех случаях выполнялось действие вычитания $37 - 12 = 25$, при этом совершенно просто могло быть установлено ограничение, имеющее место при вычитании (уменьшаемое не может быть больше вычитаемого).

Рассмотрев три вопроса, на которые отвечает действие вычитания как действие, обратное сложению, учащиеся осознают определение вычитания (отыскивается ли первое или второе слагаемое) и смогут его формулировать. Так как от перемены места слагаемых результат не меняется, то результат вычитания можно называть во всех случаях разностью или остатком.

Повторяют термины: „уменьшаемое“ и „вычитаемое“. Запись в общем виде (не обязательна для учеников V класса): $a - b = c$ и на основании определения вычитания $b + c = a$ или $c + b = a$.

§ 3. Свойства вычитания

Выясняется на числовых примерах, что при вычитании:

1) Последовательное вычитание имеет место, как и последовательное сложение, но последовательное вычитание (для натуральных чисел) возможно только в случае, когда вычитаемое меньше того уменьшаемого, от которого его придется отнимать.

2) При последовательном вычитании вместо того, чтобы отнимать от уменьшаемого одно вычитаемое

за другим, можно сразу вычесть сумму вычитаемых; например: $1000 - 256 - 144 = 1000 - (256 + 144) = 600$.

В общем виде: $a - b - c - d = a - (b + c + d)$.

Эта запись на буквах для учащихся V класса преждевременна, но все свойства должны быть ими поняты, закреплены и широко использованы в процессе устного счета, вычитания на счетах (без дополнения), письменного вычитания.

Число упражнений, решаемых с учащимися на вычитание, вообще не должно быть велико, так как соответствующий навык они должны иметь из курса начальной школы. Но особое внимание следует обратить на случай, когда в обозначении уменьшаемого имеется один или несколько нулей:

$$\begin{array}{r} 6903 \\ -4871 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6903 \\ -4875 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6003 \\ -4875 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6000 \\ -4875 \\ \hline \end{array}$$

Последний случай удобно выполняется вычитанием по дополнению (см. ниже).

Нуль. Особо надо подчеркнуть в работе с учащимися вопросы сложения и вычитания, связанные с нулем¹.

1. Если к числу прибавить нуль или если это число прибавить к нулю, число не изменится: $a + 0 = a$; $0 + a = a$; в частности, $0 + 0 = 0$.

2. Разность двух равных чисел есть нуль, — это ясно и просто по здравому смыслу, а также на основании определения вычитания как действия, обратного сложению (нуль — единственное число, от прибавления которого не изменяется данное число). Надо переспросить многих учеников в классе, почему: $5 - 5 = 0$; $7 - 7 = 0$; $a - a = 0$.

3. На основании того же определения вычитания число не изменяется, если от него отнять нуль: $a - 0 = a$.

¹ После того как нуль прочно вошел в сознание школьника в качестве символа, указывающего на отсутствие в данном числе единиц того или иного разряда, и стал, таким образом, привычным орудием письменной нумерации, учащийся, овладевая действиями над натуральными числами, исподволь и постепенно, в самой практике арифметических операций, привыкает к тому, что нуль появляется и как результат действий, производимых над натуральными числами, и даже как прямой объект этих действий.

Присоединение нуля — это первое расширение понятия числа, с которым встречаются учащиеся. Ноль меньше любого натурального числа.

Вычитание дополнением. Вычитание дополнением не является вопросом программы арифметики V класса и может быть поставлено в порядке кружковой работы. Последовательность упражнений:

1. Вычитание дополнением на счетах. Пусть надо от 739 руб. 63 коп. отнять 496 руб. 65 коп. Кладут на счетах 739 руб., затем отнимают 400 руб., т. е. на проволоке, где отсчитывают сотни, откидывают 4 косточки. Затем надо откинуть 90 руб., проще откинуть 1 0 руб., т. е. откинуть 1 косточку на той проволоке, на которой отложены сотни, и прибавить 10 руб., т. е. прикинуть 1 косточку на той проволоке, где откладываются десятки; затем отнимают (откидывают) 6 косточек на проволоке, где отложены единицы (или откидывают 1 десяток и прибавляют 4 единицы). Таким же образом отнимают 65 коп., откинув 1 косточку (1 руб.) на той проволоке, на которой отложены единицы, и прибавив 35 коп., т. е. 3 косточки на той проволоке, где отложены гривенники, и 5 коп.— на соответствующей проволоке.

Учащиеся встречаются на практике со случаем дополнения при вычитании, когда получают сдачу у кассира; например, с 10 руб., если нужно заплатить 6 руб. 70 коп.

2. Очень полезно упражнение — дополнение любого числа до единицы высшего разряда. Оно крайне необходимо в будущем при вычислении с логарифмами. При этом надо приучить учащихся писать ответ сразу слева направо.

Например: $100000 - 56783 = 43217$.

Все цифры вычитаемого дополнены до 9, а последняя значащая цифра — до 10. Обычно учащиеся затрудняются в вычитании дополнением в таком случае, когда нет значащей цифры в записи вычитаемого на конце, например: $100000 - 56780$.

Поэтому в формулировке правила надо подчеркнуть слова: „последняя значащая цифра дополняется до 10“.

Учащихся затрудняют те случаи вычитания, например:

$$\begin{array}{r} 400000 \\ - 898989 \\ \hline 3101011 \end{array}$$

в которых все разряды уменьшаемого, кроме последнего, нули. Если бы учитель приучил учащихся именно в этом случае пользоваться для вычитания дополнением и проверять мысленно сложением полученный результат, то изжиты были бы затруднения учащихся.

3. Выполнение письменно вычитания дополнением:

С л у ч а й I:
$$\begin{array}{r} 4568 \\ - 2345 \\ \hline 2223 \end{array}$$

С л у ч а й II:
$$\begin{array}{r} 4523 \\ - 2798 \\ \hline 1725 \end{array}$$

Объяснение. Сколько надо прибавить к 8, чтобы получить 13?

Ответ. 5. Пишем цифру 5 в ответе.

Сколько надо прибавить к 9, чтобы получить 11?

Ответ. 2. И т. д.

В этом случае работа облегчается, если ставить точки над цифрой уменьшаемого там, где это нужно.

Вычитание на счетах.

Учащиеся обычно легко выполняют вычитание в случае $6857 - 3024$; $5738 - 4612$ и аналогичных. При выполнении на счетах вычитания многозначных чисел в более сложных случаях (когда число единиц какого-либо разряда вычитаемого больше, чем у уменьшаемого) используется вычитание дополнением. Например, в случае $4692 - 3158$ сначала выполняют: 4 тыс. — 3 тыс.; 6 сотен — 1 сотня; 9 дес. — 5 дес., а затем, когда от 2 единиц (косточек) надо отнять 8 единиц (косточек), что выполнить нельзя, отодвигают одну косточку с проволоки, на которой отложены десятки, и придвигают 2 косточки ($2 = 10 - 8$) на проволоке, где отложены единицы. Особо надо обратить внимание на упражнения в вычитании в тех случаях, когда имеются „пустые проволоки“ (т. е. нули) в уменьшаемом.

Примеры: 1) $56879 - 36479$; следует прежде всего откинуть 6000 и 79.

2) $36812 - 25698 = (36812 - 25700) + 2$.

Примечание. Как сложению, так и вычитанию на счетах учитель уделяет в плане уроков только по одному часу занятий, но всегда в дальнейшем (и во внеурочное время) учащиеся должны пользоваться счетами при выполнении действий, должны комбинировать письменные, устные приемы вычислений с работой на счетах, как это показано выше.

§ 4. Зависимость между вычитанием и сложением

Вопрос о соотношении между сложением и вычитанием, о зависимости между числами в этих действиях крайне важен и неоднократно должен ставиться в виде упражнений в V классе, несмотря на то, что этот вопрос рассматривается и в начальной школе. Можно проводить упражнения в таком порядке:

1. Можно использовать любую простую задачу на сложение из задачника или составленную самим

учителем или учащимся. Например, дана задача: „В библиотеке иностранных книг имелось 3540 книг, привезли еще 2140 книг. Сколько всего книг стало в библиотеке?“ После решения задачи надо предложить учащимся составить обе возможные задачи, обратные данной¹.

Из рассмотрения решения аналогичных задач делается заключение о том, что каждое слагаемое равно сумме без другого слагаемого: $a + b = c$; $c - a = b$; $c - b = a$.

2. Затем в таком же порядке можно рассмотреть простую задачу, решаемую действием вычитания. Например: „Надо узнать, сколько денег оставалось в кассе, если в ней было 1685 руб. и истрачено 890 руб.“. Снова предлагается учащимся составить обе возможные задачи, обратные данным, и установить, что если $a - b = c$, то $a = b + c$; $b = a - c$, т. е. установить правило, как найти уменьшаемое, если известно вычитаемое и разность; как найти вычитаемое, если известно уменьшаемое и разность.

3. Такие же упражнения решаются и на отвлеченных числах; например:

а) $365 + 894 = 1259$,

записать оба действия, обратные данному, или

б) $5893 - 2631 = 3262$,

написать это соотношение в других видах через сложение и вычитание.

4. Решаются численные примеры, в которых надо найти неизвестное слагаемое, или неизвестное вычитаемое, или уменьшаемое, например:

$$1350 + x = 3680;$$

$$x + 698 = 1890;$$

$$1250 + 1370 + x + 600 = 5930;$$

$$x - 490 = 4365;$$

$$5230 - x = 4365,$$

причем примеры могут быть: а) записаны знаками, т. е. в таком виде, как указано выше, или б) даны в распространенном словесном виде: какое число

¹ Обратная задача, выраженная в косвенной форме: „После того как израсходовали 890 руб., в кассе осталось 795 руб. Сколько денег было в кассе?“

надо прибавить к числу 1350, чтобы получить 3680? к какому числу надо прибавить 698, чтобы получить 1890? от какого числа надо отнять 490, чтобы получить 4365? какое число надо отнять от 5230, чтобы получить 4365? или в) выражены через наименование данных и результатов действия; например, известны: сумма 3680, одно слагаемое 1350, надо узнать другое слагаемое; известны: уменьшаемое 5230 и разность 4365, надо узнать вычитаемое и т. п.

Учитель может каждую задачу, данную в задачке, видоизменить, давая ее во всех этих формах.

5. Можно дать числа, например, 650, 490, 1140 и предложить по двум из этих трех данных самостоятельно составить любые текстовые задачи, требующие для своего решения применения действия сложения или вычитания. Всего могут быть составлены 2 задачи на сложение и 3 задачи на вычитание.

Проверка. Хорошим упражнением является проверка решения примеров и задач, выполненная на основании зависимости между компонентами действия сложения и вычитания, а именно: проверка сложения вычитанием и вычитания сложением и вычитанием. В этом отношении представляют интерес упражнения, в которых надо установить неизвестные цифры слагаемых (или вычитаемого, или уменьшаемого — при вычитании) уже выполненного сложения. Между прочим, следует указать, что для проверки выполненного действия учащимся не нужно вновь выписывать числа. Проверку следует выполнить „зрительным путем“, по записи уже выполненного действия.

Одним из удобных приемов, предохраняющих от грубых ошибок при вычислении результата, служит прием округленного определения тех пределов, в которых может заключаться результат действия. Этот прием особенно важен в дальнейшем в случае вычисления с дробными числами. В данном случае пусть, например, в примере $1638 + 975$ написано, что результат равен 3613. Может ли это быть? Ясно, что если первое слагаемое меньше 2000, второе меньше 1000, то сумма не может быть больше 3000, и записанный результат не может быть верен. Те

же рассуждения можно применять к вычитанию чисел. Надо приучить учащихся к выполнению подобной проверки действия при помощи округления данных, как говорят, делать „прикидку“.

§ 5. Изменение суммы и разности. Скобки

Изменение суммы.

Вопрос об изменении результатов действия в зависимости от изменения данных имеет двойное значение в нашей школе; на этих вопросах учащиеся:

1) приучаются подмечать зависимость между величинами и оценивать ее;

2) учатся выполнять действие своеобразными приемами, требующими догадки, сообразительности.

Приступая с учащимися к повторению вопроса об изменении суммы, сначала следует уточнить вопрос на задачах с конкретным содержанием, потом на числовых примерах и сделать выводы: 1) о количественном изменении суммы: а) от увеличения одного из слагаемых и б) от уменьшения одного из слагаемых; 2) о количественном изменении суммы: а) от увеличения обоих слагаемых, б) от уменьшения обоих слагаемых, в) от увеличения одного из слагаемых и уменьшения другого.

Четко должен быть установлен факт, что сумма двух слагаемых не изменяется, если к одному слагаемому прибавить несколько единиц, а от другого слагаемого отнять столько же единиц. При рассмотрении вопроса не следует сразу изменять оба слагаемых; раньше следует исследовать изменение суммы в зависимости от изменения одного слагаемого, потом — от изменения другого слагаемого.

Для выяснения вопроса об изменении суммы в зависимости от изменения слагаемых учитель может использовать любую задачу на сложение из задачника, изменять в ее условии одно или оба данных и ставить перед учащимися соответствующий вопрос об изменении результата. Для этого нет необходимости искать особых задач: проверкой всегда может служить непосредственное выполнение действия сложения. Число упражнений зависит от подготовленности класса.

В дальнейшем в качестве упражнений на применение теории могут служить текстовые задачи и вопросы теоретического характера; в частности, такие, ответы на которые даются устно, например:

1) вычислить измененную сумму, если известны первоначальная сумма и соответствующие изменения одного из слагаемых или обоих;

2) узнать, как надо (или можно) изменить слагаемые, чтобы достичь желаемого изменения суммы;

3) применить рациональные приемы выполнения сложения; например, надо вычислить $150 + 288$; если прибавить 300, то результат будет больше искомой суммы на 12 единиц, надо его исправить; получим: $150 + 300 - 12 = 438$.

Изменение разности. Вопрос об изменении разности в зависимости от изменения уменьшаемого и вычитаемого, так же как вопрос об изменении суммы, рассматривается сначала на задачах с конкретными данными, затем на числовых примерах.

Отдельно рассматривается изменение разности в зависимости от изменения уменьшаемого и отдельно — в зависимости от изменения вычитаемого.

Характер выяснения вопроса должен еще более опираться на конкретное представление учащихся о сущности действия (вычитания), в частности — при выяснении вопроса об изменении разности в зависимости от изменения вычитаемого.

При объяснении надо постоянно понимать под уменьшаемым число, которое показывает, сколько было всего единиц; под вычитаемым — число, которое показывает, сколько единиц отнято; результат показывает, сколько единиц осталось.

Надо тщательно, простыми словами объяснить учащимся, что, прибавляя к вычитаемому, например, 6 ед. (продано 70 кг вместо 64 кг муки), нам придется от уменьшаемого отнять на 6 ед. больше. Значит, остаток будет на 6 ед. меньше, и обратно: уменьшая вычитаемое, мы меньше будем отнимать от уменьшаемого, следовательно, остаток будет больше. Укажем, что в своей „Методике арифметики“ Ф. И. Егоров предлагает в данном случае не говорить: „От уменьшения вычитаемого на несколько единиц раз-

ность увеличится на столько же единиц", а четко формулировать: „Когда от вычитаемого отнимается несколько единиц, то столько же единиц прибавляется к разности“.

Продолжая варьировать данные задачи, следует поставить вопрос об изменении разности в том случае, когда к уменьшаемому и вычитаемому прибавляют или отнимают несколько единиц. Рассуждение надо вести последовательно: раньше выяснить, как изменится результат от изменения одного из компонентов, потом выяснить изменение измененного результата при изменении второго компонента.

При исследовании изменения разности особое внимание надо обратить на случай неизменяемости разности при прибавлении к уменьшаемому и вычитаемому (и при вычитании из них) одного и того же числа. Хорошей иллюстрацией этого случая служит задача о сравнении лет отца и сына: в настоящее время, несколько лет назад и через несколько лет. Например, отцу в настоящее время 35 лет и сыну 12 лет,—разница лет между ними определенная (23 года); 5 лет назад и через 6 лет и т. д. разность их возрастов была и будет одна и та же.

**Прибавление
и вычитание
суммы и
разности.**

Как видно из вышеразобранных примеров, вопросы прибавления и вычитания суммы тесно соприкасаются с вопросами вычислений на основании изменения результатов сложения и вычитания при изменении данных и могут быть разобраны при выполнении тех же упражнений. Но при этом следует ставить иные вопросы, а именно:

Как прибавить сумму?

$$356 + 74 = 356 + (70 + 4) = 356 + 70 + 4.$$

Как прибавить разность?

$$356 + 97 = 356 + (100 - 3) = 356 + 100 - 3.$$

Как вычесть сумму?

$$356 - 105 = 356 - (100 + 5) = (356 - 100) - 5.$$

Как вычесть разность?

$$356 - 98 = 356 - (100 - 2) = (356 - 100) + 2.$$

Учащиеся должны самостоятельно приводить аналогичные примеры для случаев, когда приходится прибавлять и вычитать сумму и разность.

Замечание. Упражнения теоретического характера, выявляющие свойства действия вычитания и сложения, полезно проводить параллельно на одном занятии как на числовых примерах, так и на несложных задачах. Эти же вопросы следует ставить и позже при решении примеров и задач, когда приходится из данного числа вычесть или к данному числу прибавить последовательно два числа. Рассмотрение этих же вопросов будет поставлено и в действиях с дробными числами.

Устные упражнения. При устном выполнении сложения и вычитания чисел используют: а) законы сложения, переставляя и группируя данные числа наиболее рациональными способами; б) используют изменение результатов действий в зависимости от изменения чисел, над которыми эти действия выполняются, а именно: округляют до десятков, сотен и т. д. одно или оба слагаемых, уменьшаемое, вычитаемое; выполняют (устно) действия над округленными числами, а затем соответствующим образом изменяют результат (прибавление и вычитание суммы и разности).

Учащиеся должны выполнять вычисления устно всегда, когда это возможно; должны приучаться объяснять, на каком основании они применяют тот или иной прием рациональных вычислений.

1. Перестановка слагаемых и последующая их группировка, например:

$$1) 325 + 296 + 175 = (325 + 175) + 296 = 796.$$

$$2) 256 + 341 + 44 + 19 = (256 + 44) + (341 + 19).$$

2. Округление данных чисел, близких к одной или нескольким разрядным единицам (99; 999; 9999; 199; 399 и т. д.; 98; 197; 499 и т. д.).

а) Округление одного из данных, например:

$$1) 1256 + 999 = 2256 - 1; 2) 456 + 399 = 856 - 1;$$

$$3) 1250 + 397 = 1650 - 3; 4) 3256 + 388 = 3656 - 12 \text{ и т. д.};$$

$$5) 3256 + 412 = 3656 + 12; 6) 3256 - 412 = 2856 - 12;$$

$$7) 3256 - 388 = 2856 + 12 \text{ и т. д.}$$

б) Округление обоих данных:

$$1) 693 + 512 = (700 + 500) - 7 + 12 = 1205;$$

$$2) 693 - 512 = (700 - 500) - 7 - 12 \text{ и т. д.}$$

Упражнения даются по задачку, имеющемуся у учащихся.

При выполнении действий на счетах также, где можно, надо пользоваться рациональными приемами вычислений, например:

1) 739 руб. — 496 руб.; откидывать 500 руб. и к 239 руб. прибавить 4 руб.;

2) 739 руб. 63 коп. — 425 руб. 70 коп.; откидывают 425 руб. 63 коп. и еще 7 коп.

Замечание. Упражнения вида $a \pm (b \pm c)$ учащиеся могут решать двумя способами, причем один из них может служить для проверки ответа.

Скобки. Учащиеся в курсе начальной школы употребляли скобки, и мы употребляли их в вышеприведенных примерах. По окончании повторения обоих действий первой ступени (сложения и вычитания) следует повторить вопрос о значении скобок при выяснении порядка выполнения действий. Выше было выяснено, что действие сложения $435 + 68 + 73$ может быть выполнено в любом порядке, так же как и действие вычитания $435 - 68 - 73$, и совместные действия сложения и вычитания $435 + 68 - 73 + 150 - 96$ могут быть выполнены в любом порядке при условии, вообще говоря, что возможно выполнение вычитания при измененном порядке. Но во избежание часто встречающейся ошибки (в данном случае сложения 73 и 150), на этой стадии работы следует выполнять действия одной ступени только в порядке их записи (слева направо). Надо напомнить учащимся, в каком порядке следует выполнять действия, если они записаны со скобками. Например: $315 + (68 + 117) - (36 - 35)$ или $310 - [268 - (73 + 116)]$.

Сначала выполняется действие над числами, заключенными в малые скобки. Учащийся должен уметь: 1) читать выражение, записанное со скобками, и указать порядок действий; 2) записывать под диктовку выражения, требующие употребления скобок; 3) выполнять несколько действий в том случае, когда порядок некоторых из них указан скобками. Наиболее

трудна для учащихся вторая работа — запись под диктовку. Вышенаписанные выражения следует диктовать так: „к 315 прибавить“ (пауза, пока ученик напишет $315 +$); учитель продолжает: „сумму чисел“ (ученик должен в записи открыть скобку); учитель продолжает: „68 и 117“ (ученик должен записать $68 + 117$ и закрыть скобку); учитель продолжает: „затем отнять (пауза) разность чисел“ (ученик ставит минус и открывает скобку); учитель заканчивает: „96 и 35“ (ученик записывает $96 - 35$ и закрывает скобку).

§ 6. Задачи на время

Действия с именованными числами в метрической системе мер не представляют особых трудностей. В V классе они изучаются, главным образом, в связи с десятичными дробями. Но учитель может решить с учащимися в порядке повторения несколько задач на сложение и вычитание¹ различных мер тогда же, когда рассматривается вопрос о сложении и вычитании многозначных чисел. При этом следует брать задачи, в условия которых входят разнообразные наименования мер; надо пользоваться и мерами длины, и площади, и объема, и веса, и времени.

Решение „задач на время“ сводится к сложению и вычитанию мер времени. Трудности, связанные с решением этих задач, зависят от того, что:

1) меры времени не являются мерами десятичной системы; кроме того, между ними нет постоянных соотношений; так, в одном месяце 30 дней, в другом — 31 день; один год високосный, другой — нет, и учащимся приходится постоянно решать вопрос, какой год и месяц можно образовать из суток, и наоборот: сколькими сутками можно заменить данный год и месяц;

2) в случае „задач на время“ некоторые данные даются в календарном значении (отвечающем на вопрос когда?), а не в арифметическом значении (отвечающем на вопрос сколько?).

¹ В дальнейшем на умножение и деление именованных чисел

Для использования обычного приема решения так называемых „задач на время“ сложением и вычитанием составных именованных чисел надо уметь календарные значения переводить в арифметические и обратно; в этом упражняют учащихся отдельно до того, как приступают к решению типичных задач, например:

1) Сколько суток и часов прошло от начала года до 7 час. утра 15 марта (год високосный)?

Ответ. 31 сут. + 29 сут. + 14 сут. + 7 час. = 74 сут. 7 час.

2) Сколько лет, и месяцев, и дней (суток) прошло до 18 марта 1871 г. от начала нашей эры?¹

Ответ. 1870 лет 2 мес. 17 дней.

3) Какое число, месяц и год наступили, когда от начала нашей эры прошло полных 1916 лет 10 мес. 6 дней?

Ответ. 7 ноября 1917 г.

Первые два упражнения служат примерами перевода календарных значений чисел в арифметические, последнее упражнение — примером перевода арифметических значений в календарные.

Обычно рассматриваются 3 задачи на время:

1) когда надо определить промежуток времени между событиями, выраженными в календарных данных;

2) когда надо найти время начала события в виде календарного значения числа, зная конец события (календарное значение) и продолжительность его (арифметическое значение);

3) когда надо найти время конца события (дать в виде календарного значения числа), зная начало события (календарное значение) и продолжительность его (арифметическое значение).

Задача. Великий русский поэт А. С. Пушкин родился 6 июня (26 мая) 1799 года; умер 10 февраля (29 января) 1837 года. Сколько времени жил Пушкин?

Обычно для решения задачи переводят данные календарные даты в арифметические значения и выполняют требуемое действие (в данном случае вычитание):

¹ Иногда говорят: от начала „новой“ эры.

$$\begin{array}{r}
 1836 \text{ лет } 1 \text{ месяц } 9 \text{ дней} \\
 - 1798 \text{ лет } 5 \text{ месяцев } 5 \text{ дней} \\
 \hline
 37 \text{ лет } 8 \text{ месяцев } 4 \text{ дня}
 \end{array}$$

Ответ. А. С. Пушкин жил 37 лет 8 месяцев 4 дня.

Используя полученный ответ, можно составить и решить две другие задачи: 1) узнать дату рождения и 2) смерти А. С. Пушкина.

Замечание. При переводе календарных дат старого стиля XVIII века в даты нового стиля прибавляют 11 дней, XIX века — 12 дней, XX века — 13 дней.

В „Методике арифметики“ Ф. И. Егорова рекомендуется решать задачи на время, обходя трудность перевода календарных значений чисел в арифметические и обратно. Приведем две задачи из „Методики арифметики“ Ф. И. Егорова:

Задача. Мальчик начал учиться 16 августа 1896 года. Когда он кончил образование, если учился 11 лет 9 мес., 5 дней?¹

Решение. Через 11 лет наступило 16 августа 1907 года: $1896 + 11 = 1907$; еще через 9 мес. — 16 мая 1908 года и еще через 5 дней — 21 мая того же года. Следовательно, мальчик окончил образование 21 мая 1908 года.

Прием, предлагаемый Ф. И. Егоровым, требует сообразительности и иногда нелегкой работы от учащихся. В тех простейших случаях, которые рассматриваются у нас в школе и нужны в практической деятельности, этот прием может быть использован (без перевода календарных значений в арифметические).

Например: Ученик кончил сдавать экзамены 5 июня; вновь приступил к учебе 1 сентября. Сколько месяцев и дней продолжались его каникулы?

Решение. Если бы ученик начал занятия в школе 5 сентября, то каникулы продолжались бы полных

¹ Обычный прием решения:

от начала новой эры прошло 1895 лет 7 мес. 15 дней

$$\begin{array}{r}
 + \quad 11 \text{ „ } 9 \text{ „ } 5 \text{ „} \\
 \hline
 1907 \text{ „ } 4 \text{ „ } 20 \text{ „}
 \end{array}$$

Ответ. 21 мая 1908 года.

3 месяца, но его каникулы закончились на 5 дней раньше, значит, каникулы ученика продолжались 2 мес. 26 дней (в августе 31 день).

Надо показать учащимся, как вычисляется продолжительность промежутка времени между событиями, начавшимися до и закончившимися как до, так и после начала нашего летоисчисления. Это полезно для занятий по древней истории.

Например, зная, что знаменитый греческий математик Архимед умер в 212 году до нашей эры, можно узнать, сколько веков и сколько лет прошло со дня смерти Архимеда до настоящего времени, и т. п.

§ 7. Примеры для контрольной работы

- 1) Найти сумму чисел: 963578; 20305; 1073; 45000.
- 2) Найти разность чисел: 3000040 и 90891.
- 3) Сделать двумя способами проверку выполненного действия: $2005 - 983 = 1022$.
- 4) Уменьшить число 50001 на 39000.
- 5) Найти неизвестное число:
 $1000000 - x = 453269$.

6) Решить задачу: Двое имели по одинаковой сумме денег, один из них истратил 172 руб., другой 196 руб. У кого из них и на сколько осталось денег больше? Почему?

7) Определить, сколько лет, месяцев и дней прошло от Великой Октябрьской социалистической революции до сегодняшнего дня.

Глава V

УМНОЖЕНИЕ

§ 1. Введение

При изложении действия сложения были рассмотрены самые простые формы соединения совокупностей:

1) соединение двух неравных или равных между собой совокупностей в одну;

2) соединение нескольких данных совокупностей в одну. В результате обобщения и отвлечения от конкретных задач было получено представление об арифметическом действии — сложении. Частный случай соединения нескольких совокупностей в одну, когда все данные совокупности равны между собой, дает начало новому арифметическому действию — умножению. Таким образом, умножение есть частный случай сложения, но в то же время умножение есть особое действие. Если надо соединить несколько совокупностей одинаковой численности (a) в одну совокупность, то рассматриваемое действие вместо $\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ раз}}$ записывают в виде $a \cdot n$.

Таким образом, и в основе действия умножения лежит счет, но в этом случае счет ведется не единицами, а равными группами единиц. Например, при записи $2 \cdot 8 = 16$ счет ведется парами, и таких пар надо взять 8.

Порядок повторения с учащимися действия умножения, дополнения и расширения имеющих у них сведений об этом действии в общем тот же, как указанный при изложении других действий. Отличием может служить только то, что при повторении умножения полезно еще раз повторить более простые случаи умножения, как, например, случаи умножения однозначных чисел и случаи умножения на числа, записанные единицей с нулями, и др.

1. Взяв любую задачу на умножение, данные которой выражены небольшими числами, надо восстановить в памяти учащихся сущность действий умножения целых чисел как сложения равных слагаемых. Установить определение действия умножения целых чисел, вспомнить наименование данных и результата. Подчеркивается, что знание таблицы умножения однозначных чисел (таблицы Пифагора) есть основа для вычисления произведения любых чисел.

В результате работы учащиеся должны понять:

а) что взять какое-нибудь число слагаемых несколько раз — это значит найти такую сумму, в которой каждое из взятых слагаемых равно данному числу. Четкость и сознательность в понимании этого вопроса крайне важны, иначе при переходе к понятию „взять какое-либо число множителем несколько раз“, учащиеся смешивают эти оба понятия и при требовании разложить число на множители раскладывают его на слагаемые, и наоборот;

б) что, переходя от выражения — „взять какое-нибудь число слагаемым“ $3 + 3 + 3 + 3$ к выражению „умножить одно число на другое“ $3 \cdot 4$, переходят от действия I ступени — сложения — к действию более высокой, II ступени — умножению.

2. Умножение может быть записано для учащихся в общем виде: $a \cdot b = q^1$, причем полезно, придавая a и b различные (однозначные) значения, вычислять q — числовое значение произведения.

На вопрос, всегда ли возможно выполнить умножение на целое число, дается ответ, что всегда возможно, ибо всегда можно сложить несколько равных слагаемых.

3. Действие с единицей. Среди выполняемых упражнений должны встречаться случаи: $1 \cdot b = b$; $a \cdot 1 = a$; $1 \cdot 1 = 1$; случай $1 \cdot b = b$ не вызывает сомнения: $\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{b \text{ раз}}$, но все же учащимся полезно

b раз

давать пример этого рода, чтобы в случае умножения на единицу и единицы на число они давали вер-

¹ Знаки действия умножения \times и \cdot введены в XVII веке. Знак \cdot введен знаменитым немецким философом Лейбницем.

ные ответы. Как показывает опыт, нередко в случае умножения на единицу учащиеся в ответе пишут 1. Учащиеся должны усвоить, что произведение единицы на любое число или числа на единицу дает в произведении это же число.

Случай $a \cdot 1$ для учащихся не имеет смысла, так как при сложении они всегда имели не меньше двух слагаемых. В этом случае принимают, что $a \cdot 1 = a$.

4. *Действие с нулем.* Среди упражнений дается случай умножения нуля на число, т. е. $0 \cdot b = 0$;
 $\underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{b \text{ раз}} = 0$.

b раз

При умножении числа на 0 учащиеся нередко пишут то же число или говорят: „Множимое не изменится“.

Полезно начать приучать учащихся к мысли, что если множимое или множитель 0, то и произведение тоже 0, иначе в дальнейшем курсе математики действия с нулем создадут значительные затруднения при обучении.

Принимают: $a \cdot 0 = 0$; $0 \cdot a = 0$; $0 \cdot 1 = 0$ и $1 \cdot 0 = 0$.

§ 2. Задачи, решаемые умножением

Ряд задач требует для своего решения применения умножения.

Методическая последовательность проведения занятий по вопросу о задачах, решаемых умножением, та же, которая указывается нами в главе о задачах при изучении действия сложения. Укажем, что первой задачей на умножение является задача, по смыслу которой надо данное в условии число повторить слагаемым несколько раз. Вторая задача — это случай увеличения числа в несколько раз, причем: а) сначала задача ставится как требование найти число, большее данного в несколько раз; затем б) увеличить число в несколько раз. Решая подобную задачу на умножение, следует сопоставить такого рода задачи с задачами, решаемыми путем сложения, в которых требуется подчеркнуть еще

раз учащимся различие в постановке этих двух вопросов.

В заключение работы учащиеся решают примеры и задачи на сложение, вычитание и умножение.

§ 3. Законы умножения

Действие умножения основывается на законах: переместительном, сочетательном и распределительном.

Переместительный закон (коммутативный). Как уже сказано ранее, формулировка законов и их термины даются учащимся позже, при изучении действий с дробными числами. Вопрос о независимости величины произведения от порядка сомножителей может быть выяснен учащимся при решении простейшей задачи на умножение с конкретными данными; так, например, известно, что придется уплатить одну и ту же сумму денег, купив 20 карандашей по 15 коп. или 15 карандашей по 20 коп.

Можно для пояснения взять, например, три ряда точек по пяти точек в каждом

• • • • •
• • • • •
• • • • •

Эту группу объектов можно рассматривать и как состоящую из 5 рядов по 3 объекта (точки) в каждом, отсюда $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

Можно дать запись переместительного закона умножения на буквах: $a \cdot b = b \cdot a$. В силу переместительного закона умножения, множимое и множитель иногда называют сомножителями. Переместительный закон умножения для случая трех и более множителей проверяется на числовых примерах в порядке самостоятельной работы учащихся.

Сочетательный закон (ассоциативный). Задача. Рабочий изготавливает в среднем за смену 40 деталей. Сколько деталей он изготовит за 3 месяца, считая 25 рабочих дней в месяце, если будет работать с таким же успехом?

Решение. 1) $40 \cdot 25 \cdot 3 = 3000$ (деталей), или 2) $(40 \cdot 25) \cdot 3 = 3000$, или 3) $40 \cdot (25 \cdot 3) = 3000$. Ответ

один и тот же, но во 2) сначала узнается, сколько деталей изготовил рабочий за месяц, а в 3) сначала узнается, сколько рабочих дней в трех месяцах:

$$40 \cdot 25 \cdot 3 = (40 \cdot 25) \cdot 3 = 40 \cdot (25 \cdot 3).$$

Пример. Даны 3 измерения параллелепипеда: 8 м, 6 м и 3 м. Объем его выражается числом 144 куб. м, как бы ни выполняли умножение $(8 \cdot 6) \cdot 3 = 8 \cdot (6 \cdot 3)$, или $6 \cdot (8 \cdot 3)$, или $(8 \cdot 3) \cdot 6$ (используются и сочетательный и переместительный законы умножения).

Распределительный закон. Наличие распределительного (дистрибутивного) закона по отношению к сложению—это особенность действия умножения. Для учащихся V класса, как всегда, этот закон уясняется на конкретных примерах. Ученику ясно, что он получит одно и то же число орехов, дадут ли ему 3 раза по 4 ореха, а затем 3 раза по 2 ореха или сразу отсчитают ему 3 раза по 6 орехов:

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = (4 + 2) \cdot 3.$$

Ниже на рисунке 13 размещено по 4 шарика (объекта) в 3 ряда и еще по 2 шарика тоже в 3 ряда. Число шариков будет то же, если в каждом из трех рядов поместить по $6 = 4 + 2$ шарика.



Рис. 13.

Рассуждения в этом случае незатруднительны: результат не изменится, если повторить несколько раз слагаемым каждую часть целого вместо того, чтобы повторить слагаемым целое.

Использование законов. Практическое применение законов умножения есть основное средство для закрепления знания их учащимися.

1. Проверка умножения учащимся известна, и им понятно, что она может быть выполнена на основании переместительного закона умножения. Этот прием

не всегда удобен в случае, когда перемножаются 2 числа, из которых одно записывается значительно большим числом цифр, чем другое.

2. Надо обратить внимание учащихся, что наличие переместительного закона умножения уменьшает число произведений, требующих запоминания при составлении таблицы умножения.

3. Широко следует использовать переместительный закон умножения в том случае, когда запись множимого содержит меньше значащих цифр, чем запись множителя. Так, вместо того, чтобы умножать $27 \cdot 4568$, можно умножить $4568 \cdot 27$. Затем можно предложить учащимся объяснить, как на основании того же переместительного закона умножения они выполняют умножение на разрядную единицу. В самом деле:

$$256 \cdot 100 = 1 \text{ сотня} \cdot 256 = 256 \text{ сотен} = 25600.$$

Потом может быть поставлен вопрос: как это же правило может быть выведено на основании сочетательного закона¹ умножения, если рассматривать $100 = 10 \cdot 10$ и знать правило умножения числа на 10? А именно:

$$\begin{aligned} 256 \cdot 100 &= 256 \cdot (10 \cdot 10) = (256 \cdot 10) \cdot 10 = \\ &= 2560 \cdot 10 = 25600. \end{aligned}$$

Так же легко учащиеся могут объяснить правило умножения на число, записываемое значащей цифрой с нулями, на основании сочетательного закона умножения, например:

$$7 \cdot 300 = 7 \cdot (3 \cdot 100) = (7 \cdot 3) \cdot 100 = 2100,$$

где число, выраженное значащей цифрой с нулями, рассматривается как произведение значащей цифры на число, записываемое единицей с нулями.

Мы перечисляем здесь разнообразные вопросы, которые учитель может выяснить с учащимися для того, чтобы они вникли в сущность процесса выполняемых ими действий. Это является основной задачей повторительного курса арифметики. Но учитель

¹ Как распределительный, так и сочетательный законы умножения могут быть изучены в связи с вопросами изменения произведения в зависимости от изменения данных.

может, в зависимости от условий своей работы, рассмотреть лишь некоторые из них, отобрать те или иные вопросы. Продолжим их перечень.

4. Можно выяснить с учащимися, как на основании сочетательного закона умножения непосредственное умножение на число заменяют последовательным умножением и обратно, например, надо:

$$1) 125 \cdot 32 = 125 \cdot (4 \cdot 8) = (125 \cdot 4) \cdot 8 = 500 \cdot 8 = 4000.$$

$$2) 161 \cdot 425 = 161 (4 \cdot 25) = 16100.$$

5. Надо выяснить, как на основании распределительного закона умножения объясняется правило умножения любого многозначного числа на однозначное:

$$416 \cdot 7 = (400 + 10 + 6) \cdot 7 = (4 \text{ с.} + 1 \text{ д.} + 6 \text{ ед.}) \cdot 7 = \\ = 28 \text{ с.} + 7 \text{ д.} + 42 \text{ ед.} = 2800 + 70 + 42 = 2912.$$

6. Выясняется, как на основании распределительного закона умножения выполняется часто устно умножение небольших двузначных чисел:

$$37 \cdot 40 = (40 - 3) \cdot 40 = 1600 - 120 = 1480;$$

$$57 \cdot 60 = (60 - 3) \cdot 60; \quad \begin{array}{r} 3600 \\ - 180 \\ \hline 3420 \end{array}$$

7. Иногда свойства чисел, данных в примере, таковы, что допускают применение особых приемов вычислений на основании законов умножения; например, надо $369 \cdot 3 + 369 \cdot 7$; можно сразу умножить $369 \cdot 10 = 3690$. Или надо умножить $369 \cdot 3 + 369 \cdot 12$; можно сразу $369 \cdot 15$;

$$+ \begin{array}{r} 3690 \\ 1845 \\ \hline 5535 \end{array}, \text{ где } 1845 \text{ равно половине } 3690.$$

§ 4. Правила умножения

Простейшие случаи. Учащиеся из курса начальной школы умеют перемножить 2 числа во всех возможных случаях, включая и случай перемножения многозначных чисел. Распространение правила умножения на числа, состоящие из большого

числа разрядов, не представляет затруднений. При повторении главной задачей является:

1) углубить понимание учащимися процесса умножения и его обоснование;

2) закрепить навыки в умножении чисел для некоторых случаев, наиболее затрудняющих учащихся.

Для достижения первой поставленной цели надо просмотреть с учащимися все случаи умножения и четко установить, что нужно для выполнения умножения в каждом случае, а именно:

а) используется нумерация чисел, умение представлять число в виде суммы единиц его разрядов;

б) используется таблица умножения однозначных чисел, поэтому ее надо твердо знать, так как все случаи умножения сводятся к умножению однозначных чисел;

в) применяются все законы умножения для вывода соответствующих правил умножения любых чисел; при этом бегло просматриваются знакомые учащимся случаи умножения однозначных чисел, двузначных на однозначное число; случаи умножения любых чисел на 10, 100, 1000 и т. д. (устно); случаи умножения многозначных чисел на однозначные. Во всех этих случаях действие записывается в строчку; при записи вычисления надо поставить после знака = столько клеточек (мест), чтобы запись произведения уместилась, т. е. в случае $68379 \cdot 7$ надо оставить 6 клеточек.

Эта прикидка числа цифр произведения очень полезна, так как делает работу учащихся сознательной и этим предохраняет от ошибок, обусловливаемых механичностью работы. Здесь же можно рассмотреть случаи умножения составного именованного числа на отвлеченное, например:

$$3 \text{ руб. } 25 \text{ коп.} \cdot 7 = (3 \text{ руб.} + 25 \text{ коп.}) \cdot 7 = 21 \text{ руб.} + \\ + 1 \text{ руб. } 75 \text{ коп.} = 22 \text{ руб. } 75 \text{ коп.}$$

Общий случай. Затем рассматривается общий случай умножения многозначного числа на многозначное. На составлении правила умножения в этом случае надо особенно остановиться; например:

$$376 \cdot 415 = (300 + 70 + 6) \cdot 415 = 300 \cdot 415 + 70 \cdot 415 + \\ + 6 \cdot 415 = 300 \cdot (400 + 10 + 5) + 70 \cdot (400 + 10 + 5) + \\ + 6 \cdot (400 + 10 + 5) \text{ и т. д.}$$

Отсюда правило: число единиц каждого разряда множимого надо умножить на число единиц каждого разряда множителя, полученные частные произведения сложить.

Замечания. 1) Можно требовать от учащихся объяснения умножения многозначных чисел на основании самого понятия умножения; умножить 376 на 415—значит 376 повторить слагаемым 415 раз, а для этого можно взять 376 сначала 400 раз, затем 10 раз, затем еще 5 раз и полученные суммы сложить.

2) На этих же конкретных примерах можно установить число цифр произведения в зависимости от числа цифр сомножителей.

Если m и n показывают число цифр сомножителей, то в произведении $(m+n)$ или $(m+n-1)$ цифр. (Эту работу можно провести с наиболее успевающими учащимися.) Действительно, произведение трехзначного числа на двузначное будет пяти- или четырехзначным числом.

Объяснение. Если перемножить наибольшее из трехзначных чисел на наибольшее двузначное ($999 \cdot 99 = 98901$), то получится пятизначное произведение; если перемножить наименьшее трехзначное и наименьшее двузначное числа ($100 \cdot 10 = 1000$), то получится в произведении четыре цифры. Нетрудно понять, что произведение двух чисел, из которых одно трехзначное, другое двузначное, исключая рассмотренные крайние случаи, всегда меньше 98901, но больше 1000, т. е. имеет пять или четыре цифры.

Такое рассуждение можно провести и для чисел с другим числом цифр.

Вопрос. Сколько цифр может иметь произведение $6873 \cdot 459$? $927863 \cdot 451$?

3) Нет единого мнения среди методистов по вопросу, как записать процесс умножения многозначного числа на многозначное: одни предлагают начинать с высших разрядов, другие—с низших разрядов; одни предлагают сомножители и произведение писать в строчку, другие—одного сомножителя под другим, произведение—под частными произведениями, отделенными от окончательного произведения чертой, и т. д.

Наиболее употребительны следующие записи:

$\begin{array}{r} \times 457 \\ 325 \\ \hline 2285 \\ + 914 \\ 1371 \\ \hline 148525 \end{array}$	$\begin{array}{r} \times 457 \\ 325 \\ \hline 2285 \\ + 9140 \\ 137100 \\ \hline 148525 \end{array}$	$\begin{array}{r} 457 \cdot 325 = 148525 \\ \hline 2285 \\ 9140 \\ \hline 137100 \end{array}$
---	--	---

Мы рекомендуем общепринятую первую запись; во второй записи излишни нули, в третьей записи—утомителен перевод глаз

с множимого на множитель. Начинать умножение с высшего разряда множителя иногда целесообразно, так как сразу видно, под какими цифрами множимого следует подписывать произведение.

Случай умножения, когда в записи сомножителей нули.

Особо следует выделить случай, когда в записи множителя имеются нули. Затруднения учащихся происходят от того, что они пытаются „умножить на нули“ и забывают, что при этом всегда получается в произведении нуль, или они выписывают целые ряды нулей, как, например:

$$\begin{array}{r}
 \times 5386 \\
 \times 4002 \\
 \hline
 10772 \\
 0000 \\
 + 0000 \\
 21544 \\
 \hline
 21554772,
 \end{array}$$

в чем нет никакой необходимости. Или, наоборот, не оставляют места, не отодвигают запись на необходимое число разрядов.

На основании правила умножения учащиеся должны знать, что в приведенном примере следует выполнить только 2 умножения: на 4000 и на 2. В этом случае как раз удобно начинать умножение с высших разрядов:

$$\begin{array}{r}
 \times 5386 \\
 \times 4002 \\
 \hline
 + 21544 \\
 10772 \\
 \hline
 21554772
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \times 5386 \\
 \times 4002 \\
 \hline
 10772 \\
 21544 \\
 \hline
 21554772 \text{ (проще—это общепринятая запись)}
 \end{array}$$

Также следует выделить случай умножения, когда один или оба сомножителя (их записи) оканчиваются нулями; хотя он менее труден для учащихся, чем предыдущий, но в этом случае записи учащихся часто изобилуют нулями, нет у них уверенности, как следует подписывать друг под другом сомножители. Приведем примеры правильной записи:

$$\begin{array}{r} \times 137 \\ 1400 \\ \hline 548 \\ 137 \\ \hline 191800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 13700 \\ 14000 \\ \hline 548 \\ 137 \\ \hline 191800000 \end{array}$$

Значит: 1) последняя значащая цифра множителя записывается под последней значащей цифрой множителя, 2) нули сносятся в окончательное произведение, а не в частные произведения; таким образом, следует считать нерациональными такие записи:

$$\begin{array}{r} \times 13700 \\ 14000 \\ \hline 54800 \\ 13700 \\ \hline 191800000 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} \times 13700 \\ 14 \\ \hline 54800 \\ 13700 \\ \hline 191800 \end{array}$$

При объяснении приема умножения в случае, когда сомножители оканчиваются нулями, проще всего пользоваться изменением произведения в зависимости от изменения сомножителей; в повторительном курсе не представляет затруднений путем сопоставления произведений, например: произведения $36 \cdot 42$ с произведением $360 \cdot 42$; $36 \cdot 420$; $3600 \cdot 4200$ и т. п., сделать вывод о том, какие изменения происходят в произведении от наличия нулей в записи того, другого и обоих сомножителей. При объяснении надо четко отметить, как изменяется произведение в зависимости от того, что изменили множимое (не обратили внимания на нули), затем какое изменение произойдет в произведении в зависимости от того, что изменили множитель; после этого можно приписыванием соответствующего числа нулей исправить произведение сначала от той ошибки, которая произошла от изменения множимого, потом от той ошибки, которая произошла от изменения множителя.

Вышеразобранный случай умножения, а именно случай, когда сомножители в записях имеют на конце нули, может быть объяснен и на основании переместительного и сочетательного законов умножения. Так:

$$\begin{aligned} 4900 \cdot 300 &= (49 \cdot 100) \cdot (3 \cdot 100) = 49 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 100 = \\ &= (49 \cdot 3) \cdot (100 \cdot 100) = 1470000 \end{aligned}$$

При перемножении составных именованных чисел для вычисления площади или объема тел данные числа, как известно, выражаются в мерах одного наименования. Этот прием изучается в курсе арифметики начальной школы и для учащихся V класса никаких затруднений не представляет. Вся работа по повторению умножения целых чисел проводится одновременно с решением задач на 3 действия.

**Умножение
на счетах.**

1. Надо научить учащихся выполнять умножение на счетах (в простейших случаях). Эта работа по существу сводится к сложению равных слагаемых; например, надо 356 руб. 75 коп. умножить на 4. Придется 4 раза откладывать по 356 руб. 75 коп. (или 2 раза взять результат удвоения). Некоторое ускорение в этот длительный процесс может внести комбинированное вычисление произведения на счетах и устно. В данном примере можно отложить на счетах 1200 руб., затем 200 руб., затем 24 руб. и, наконец, 3 руб.

2. Умножение на 10, 100 и т. д. выполняется простым перенесением данного числа на одну, две и т. д. проволоки.

§ 5. Исторические замечания (Занятия в кружке)

Учителю интересно познакомиться с исторической литературой по вопросам умножения. Для учащихся можно использовать сведения о таблице умножения и о развитии приемов умножения из книги В. Беллюстина „Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики“ и др. Следует рассказать ученикам, что с момента составления известной им таблицы умножения Пифагора, во всех руководствах по арифметике писалось: „Преимущественно перед всем следует хорошо знать таблицу“. Авторы старинных русских рукописей¹ говорят о таблице умножения, что она „большому счету разум придает, что надо ее в памяти крепко держати“. В „Арифметике“ Магницкого имеются стихи, посвященные этому вопросу. Учащимся можно рассказать, как в старину заучивали таблицу умножения исключительно на память, причем требования были настолько велики, что ученики обязаны были заучить, например, произведение первых 40 чисел на однозначные множители, т. е. 360 произведений. Затем, полезно учащимся узнать, что тот порядок умножения, к которому они привыкли, далеко не единственный, применяемый даже в настоящее время. Способ, которым мы пользуемся, совершенствовался

¹ Древнейшая русская рукопись XVI века „Цыфирная счётная мудрость“ сгорела во время пожара Москвы в 1812 году.

	3	2	4	7	
1	1 2	0 8	1 6	2 8	4
4	1 5	1 0	2 0	3 5	5
8	1 8	1 2	2 4	4 2	6
	0	6	3	2	

Рис. 14.

в течение долгого времени. Отметим, что в выработке разнообразных приемов выполнения действий, в частности умножения, большую роль играли педагоги; учитель может указать учащимся, что многие из имевших место способов умножения отличаются теми или другими достоинствами в смысле облегчения вычислений, изящества записи, использования их для устного счета и т. д.

1) На рисунке 14 показан древний индусский способ умножения многозначных чисел $3247 \cdot 456$.

Прямоугольник разделен вертикальными линиями на 4 столбца (по числу цифр множимого), над каждым столбцом слева направо последовательно написаны все цифры множимого; горизонтальными линиями прямоугольник разбит на 3 ряда (по числу цифр множителя), против каждого ряда справа написаны все цифры множителя сверху вниз. В каждом получившемся квадрате проведены диагонали.

При умножении каждой цифры множимого на каждую цифру множителя (безразлично, в каком порядке) произведения записываются в соответствующих квадратах, причем цифра десятков пишется над диагональю, цифра единиц — под нею. Например: $4 \cdot 5 = 20$; $2 \cdot 6 = 12$ и т. д. (Пишут $2/0$, $1/2$.)

Все полученные произведения складывают (лучше начать справа), причем складывают числа, заключенные между двумя линиями, составленными из диагоналей, и сумму подписывают под ними. В нашем примере получается: первая цифра 2, вторая ($5 + 4 + 4 = 13$) — 3, третья ($8 + 3 + 0 + 2 + 2 + 1 = 16$) — 6 и т. д. Результат 1 480 632.

2) Для умножения многозначных чисел употребляются „палочки Непера“¹ — прибор, состоящий из отдельных палочек (деревянных или картонных), представляющих собой (рис. 15) таблицу произведения всех чисел от 0 до 9 на все однозначные числа от 1 до 9. В каждом произведении цифра десятков (верхняя) отделена наклонной чертой от цифры единиц (нижняя).

При умножении, например, $857 \cdot 93$ берут палочки с тем, чтобы иметь, а затем сложить произведения $857 \cdot 90 + 857 \cdot 3$, т. е. 8-ю, 5-ю и 7-ю палочки. Удобно слева (рис. 15) приложить размеченную палочку 1, 2, 3, ..., 9.

Найти $857 \cdot 90 = 857 \cdot 9 \cdot 10$; складывая числа, заключенные между двумя наклонными чертами (в данном случае в последнем ряду), имеем: $7713 \cdot 10 = 77130$ да $857 \cdot 3 = 2571$ (складываем числа в третьем ряду), всего

$$\begin{array}{r} 77130 \\ + 2571 \\ \hline 79701 \end{array}$$

¹ Джон Непер, знаменитый изобретатель логарифмов (1550—1617 гг., Шотландия).

0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
0/2	0/4	0/6	0/8	1/0				
0/3								
0/4								
0/5								
0/6								
0/7								
0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

1	0/8	0/5	0/7
2	1/6	1/0	1/4
3	2/4	1/5	2/1
4	3/2	2/0	2/8
5	4/0	2/5	3/5
6	4/8	3/0	4/2
7	5/6	3/5	4/9
8	6/4	4/0	5/6
9	7/2	4/5	6/3

Рис. 15.

Надо иметь несколько палочек для каждой цифры, чтобы выполнять умножение в случае, когда сомножители записываются двумя или большим числом одинаковых цифр.

§ 6. Изменение произведения

Последовательность вопросов. Вопрос об изменении произведения представляет для учащихся много трудностей, и с особой тщательностью надо следить за тем, чтобы учащиеся не просто повторяли правила и выводы всех случаев изменения произведения, а конкретно могли бы привести пример и объяснить, почему то или иное изменение произведения имеет место.

Вопрос об изменении произведения при изменении сомножителей может быть рассмотрен в двух случаях (в связи с рассмотрением сочетательного и распределительного законов умножения):

1) в случае изменения каждого из сомножителей в несколько раз и 2) в случае изменения каждого из сомножителей на несколько единиц.

Общеизвестно, какие трудности сами эти понятия—увеличение в несколько раз и на несколько единиц—представляют для учащихся не только младших, но и старших классов. Понятно, что исследование следствий, которые вытекают из этих понятий,

представляет двойную трудность для учащихся. Поэтому вопрос об изменении произведения в связи с изменением каждого сомножителя на несколько единиц в нашей учебной литературе по арифметике часто опускается, хотя это изменение, по существу, является раскрытием сущности распределительного закона умножения и способствует его пониманию.

В различных учебниках предлагается различный порядок рассмотрения этих вопросов. Мы начнем с исследования изменения произведения в зависимости от изменения сомножителей в несколько раз и рекомендуем начинать с рассмотрения изменения множителя в несколько раз, а не множимого. Таким образом, схема работы такова:

Изменение произведения в зависимости от изменения	{	в несколько раз	{	множителя множимого обоих сомножителей
		на несколько единиц	{	множителя множимого обоих сомножителей

Метод работы тот же, что и при изучении изменения суммы и разности в связи с изменением данных, а именно: сопоставление получаемых результатов при одних данных и измененных.

Средством конкретизации процесса исследования и получаемых выводов служит:

- 1) рассмотрение числовых задач и примеров;
- 2) использование сущности умножения, как сложения равных слагаемых, для сведения вопроса об изменении произведения к знакомому вопросу — изменении суммы в связи с изменением слагаемых.

Первый случай. Изменение произведения в зависимости от изменения множителя.

Упражнение. Полезно на доске в письменном виде сопоставить разные случаи, как-то:

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| 1) $85 \cdot 3$ | 3) $85 \cdot 9$ | 5) $85 \cdot 15$ |
| 2) $85 \cdot 6$ | 4) $85 \cdot 12$ | |

Учитель не должен искать специальных примеров для упражнения учащихся в изменении произведения в зависимости от изменения того или другого дан-

ного. При решении любой задачи на умножение из задачника с любыми числовыми данными можно, изменив данные, повторить с учащимися вопрос об изменении произведения и постепенно добиваться полного закрепления и сознания ими сущности вопроса. Сейчас же после исследования, как увеличивается произведение при увеличении множителя в несколько раз, следует поставить обратный вопрос: что делается с произведением, если взять множитель меньше данного в 2, 3 и т. д. раза? С этой целью надо использовать те записи, которые уже имеются на доске, и, сравнив, например, 1) со 2) сделать соответствующий вывод, затем 3) с 1), 4) с 1) и т. д. Учащиеся видят, что рассматривается уменьшение произведения только в тех случаях, когда множитель уменьшается в целое число раз.

Замечание. Хорошо, когда учащийся на вопрос учителя: „Почему уменьшилось произведение?“ — даст ответ: „Потому что берется меньше слагаемых, например, в 4-м примере взято 12 одинаковых слагаемых, а во 2-м только 6 таких же слагаемых, т. е. в 2 раза меньше“. Другими словами, хорошо, если учащийся понимает, что в рассматриваемом случае берется различное число слагаемых, но слагаемые остаются теми же. В соответствии с этим полезно и правило формулировать так: если увеличивают или уменьшают множитель (берут множитель больше или меньше) в несколько раз, а множимое остается без изменения, то и произведение увеличится или уменьшится во столько же раз. Позже можно перейти и к обычной краткой формулировке этого правила. В то же время учащийся может объяснить использование в данном случае сочетательного закона умножения:

$$85 \cdot 6 = 85 \cdot (3 \cdot 2) = (85 \cdot 3) \cdot 2.$$

Второй случай. Вторым случаем рассматривается изменение произведения в зависимости от изменения множимого. Этот случай для учащихся менее ясен. Здесь приходится рассматривать случай, когда берется каждое слагаемое больше, чем первоначальное, а число их остается то же. Понятно, что

сумма будет большая, но что она во столько же раз будет больше, сразу не совсем ясно.

Пусть надо $7 \cdot 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$ (нетрудно составить задачу с текстом); если возьмем множимым $7 \cdot 2 = 14$, т. е. вдвое увеличим множимое, и захотим его умножить на 5, то $(7 \cdot 2) \cdot 5 = 70$, т. е. результат тоже получится вдвое больше прежнего.

И в данном случае при объяснении и в первых формулировках нелишне прибавлять, что такое изменение произведения в зависимости от изменения множимого происходит при условии, что множитель остается без изменения. Понятно, что и при исследовании изменения произведения в связи с уменьшением множимого рассматривается только случай, когда множимое уменьшается в целое число раз.

Повторим еще раз: при объяснениях можно базироваться на знаниях учащихся по вопросу изменения суммы. Можно основываться на знании ими сочетательного закона умножения, и наоборот, если учитель не проработал с учащимися названного закона умножения, то на этом исследовании он может проработать его с учащимися, показать его сущность и практическое применение.

Третий случай. Изменение обоих сомножителей. 1) Взято $27 \cdot 6 = 162$. Каково будет произведение, если множимое будет взято в 2 раза большее (54), и множитель в 3 раза больший (18)? $54 \cdot 18 = 972$.

Этот процесс работы и получение результата обычно не вызывает затруднений.

2) В случае, когда не ставится вопрос о непосредственном отыскании произведения, а ставится только вопрос о характере изменения произведения в зависимости от изменения обоих сомножителей, затруднений у учащихся значительно больше. Пусть дано $31 \cdot 5$. Вопрос: что сделается с произведением, если вместо множимого 31 взять множимое 62? Ответ: увеличится. Вопрос: во сколько раз? Ответ: в 2 раза. Вопрос: а если теперь вместо множителя 5 взять множитель 15, что сделается с произведением? Ответ: увеличится. Вопрос: во сколько раз? Ответ: в 3 раза. Вопрос: как же в результате обоих этих изменений изменится произведение? Ответ: увеличится. И дальше, большей частью, следует ответ: в 5 раз.

Этот ответ характерен. Поэтому надо не обманываться знаниями учащихся, когда они, как будто бы рассуждая, говорят: „Если множимое увеличить в 3 раза, то и произведение увеличится в 3 раза; если множитель увеличить в 2 раза, то и произведение увеличится в 2 раза“. Сособой тщательностью надо выяснить с учащимися, что в этом случае произведение изменится „во столько раз, сколько единиц заключается в произведении двух чисел, из которых одно показывает, во сколько раз увеличено множимое, а другое — во сколько раз увеличен множитель“. Надо тщательно выяснить, какое произведение изменяется в 2 раза, и не следует допускать употребления слов „всего“ и „в результате“. С этой целью полезно использовать нижеуказанные 3 примера не только для сопоставления результатов и вывода правила, но и для заключения об изменении результата в связи с изменением данных в каждом отдельном случае; этот переход через вспомогательный пример характерен и для самого процесса изменения, так как и процесс изменения сомножителей не происходит одновременно. Рассуждение можно вести примерно следующим образом: увеличивается множимое и множитель в несколько раз:

$$18 \cdot 10 = 180; \quad 18 \cdot 20 = 360; \quad 54 \cdot 20 = 1080.$$

1-й пример показывает, что множимое равно 18, множитель—10. Если вместо множителя 10 взять множитель 20, тогда полученное произведение во 2-м примере, по сравнению с произведением, полученным в 1-м примере, будет в 2 раза больше (число слагаемых будет больше).

После этого можно спросить: какое получится произведение? Ответ: 360. Вопрос: если вместо множимого 18 взять множимое, в 3 раза большее при том же множителе 20, что в этом случае можно сказать о произведении? Ответ: произведение будет в 3 раза больше по сравнению с 360, т. е. будет $360 \cdot 3 = 1080$.

При объяснении обязательны сказанные выше слова: „по сравнению с тем произведением, которое получилось после увеличения нами множителя“.

На рассмотрении снизу вверх строчек этой же таблицы исследуется вопрос об изменении произведения при уменьшении множителя и множимого (ограничение см. ниже) в несколько раз.

Затем можно перейти ко 2-му случаю изменения произведения, к случаю, когда один из сомножителей увеличивается в несколько раз, а другой — уменьшается. Пусть дано $18 \cdot 10$, и надо множитель увеличить в 6 раз, а множимое уменьшить в 3 раза.

$$\text{Примеры. } 18 \cdot 10 = 180$$

$$18 \cdot 60 = 1080$$

$$6 \cdot 60 = 360$$

Произведение равно 360, оно в 2 раза больше первого произведения.

В случае исследования изменения произведения в связи с увеличением множимого и множителя можно дать учащимся правило, но в случае изменения произведения в связи с уменьшением обоих сомножителей или одного из них надо требовать только последовательного хода рассуждений, как нами выше указано, путем составления 3 примеров (без формулировки правила). В самом деле, возьмем случай:

$$18 \cdot 10 = 180, 18 \cdot 20 = 360; 6 \cdot 20 = 120.$$

В данном случае учащийся может подсчитать результат, но, не зная дробных чисел, он не может сказать, как изменилось произведение при указанных изменениях сомножителей. Учитель должен крайне тщательно подготовить примеры к уроку, чтобы не дать ученикам примеров, недоступных на этой ступени их обучения.

3) Дается основное свойство произведения, а именно: неизменяемость произведения при увеличении одного из сомножителей в несколько раз и уменьшении другого сомножителя во столько же раз. Методически выяснение этого вопроса должно быть проведено путем таких же рассуждений и записей, например:

$$18 \cdot 10 = 180; 36 \cdot 10 = 360; 36 \cdot 5 = 180 \text{ и т. д.}$$

На рассматриваемом свойстве произведения основывается старорусский прием умножения двух чисел; например, надо $68 \cdot 32$ —один множитель увеличивают, а другой уменьшают вдвое, пока один из них не будет равен 1. Последовательность вычислений: $68 \cdot 32$; $136 \cdot 16$; $272 \cdot 8$; $544 \cdot 4$; $1088 \cdot 2$; $2176 \cdot 1$. Ответ: 2176.

Изменение сомножителя на несколько единиц. Изменение произведения при изменении сомножителей на несколько единиц проводится исключительно на упражнениях; никаких правил заучивать здесь не нужно. Но, может быть, вообще не имеет смысла ставить этот вопрос перед учащимися, так как он опускается во многих учебниках? Мы считали бы такое решение неправильным: именно этот характер изменения произведения поясняет сущность распределительного закона умножения, необходимейшего закона для обоснования всех правил умножения и для практического выполнения умножения во многих особых случаях. Начинать рассмотрение этого вопроса опять-таки удобнее с изменения множителя.

1) Известно произведение $14 \cdot 5$; надо 14 6. Вопросами и ответами выясняется, что если надо $14 \cdot 6$, то это значит, что если множимое 14 придется взять не 5, а 6 раз, то результат—произведение—увеличивается на 14 единиц по сравнению с произведением $14 \cdot 5$:

$$14 \cdot 6 = 14 \cdot (5 + 1) = 14 \cdot 5 + 14 \cdot 1$$

Так же объясняется, что при умножении 14 на 7 произведение по сравнению с произведением $14 \cdot 5$ будет больше на двукратное множимое:

$$14 \cdot 7 = 14 \cdot (5 + 2) = 14 \cdot 5 + 14 \cdot 2$$

Можно вести объяснение и в обратном порядке: пусть $14 \cdot 8 = 112$, а если надо умножить $14 \cdot 7$, т. е. число 14 взять на 1 раз меньше, то получится $112 - 14$ и т. д.

2) Дано $14 \cdot 5 = 70$. Как изменится произведение, если взять множимое меньше данного на несколько единиц?

Если вместо числа 14 мы возьмем только число 13 пять раз, то у нас получится в произведении на 5 ед. меньше. От произведения 70 надо отнять 5 (откинуть 5 раз по единице), или $13 \cdot 5 = = (14 - 1) \cdot 5 = 70 - 5$.

Если надо выяснить, каково будет произведение от умножения $11 \cdot 5$ сравнительно с произведением, получающимся от умножения $14 \cdot 5$, то ясно, что каждый раз мы будем брать слагаемое, на 3 ед. меньше, и всего $3 \cdot 5 = 15$ получим на 15 ед. меньше. В самом деле:

$$14 \cdot 5 = 70; 11 \cdot 5 = 55; 11 \cdot 5 = (14 - 3) \cdot 5 = 70 - 15.$$

Повторяем, никаких правил изменения произведения в связи с изменением данных умножения на несколько единиц заучивать не надо. На этих примерах, как сказано выше, можно повторить с учащимися распределительный закон умножения. На этих примерах путем вопросов и ответов повторяются правила умножения

суммы и разности на число и числа на сумму и разность. Добиваясь полного осознания учащимися сущности вопроса, надо беспрестанно применять все приведенные рассуждения к особым (сокращенным) приемам отыскания произведения.

§ 7. Сокращенные приемы умножения

1) Умножение на 9, на 99, на 999 и т. д.: $68 \cdot 99 = 6800 - 68$.

$$68 \cdot 999 = 68000 - 68 = 67932.$$

2) Умножение на число, близкое к разрядной единице; например:

$$568 \cdot 9 = 5680 - 568 = 5112;$$

$$135 \cdot 97 = 13500 - 135 \cdot 3; \quad 13500$$

$$\quad \quad \quad - \quad 405$$

$$\quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 13095$$

3) Умножение на 5 путем деления пополам и умножения на 10.

Умножение на 50 путем деления пополам и умножения на 100. Умножение на 500 и т. д.:

$$1308 \cdot 5 = 6540 \text{ (ответ пишется сразу);}$$

$$450 \cdot 50 = 225 \cdot 100 = 22500 \text{ (ответ пишется сразу).}$$

В тех случаях, когда значащую часть множимого нельзя делить на 2, приходится раньше умножить на 10, 100 и 1000 и потом делить пополам:

$$3687 \cdot 500 = 3687000 : 2 = 1843500.$$

4) Умножение на числа, близкие к 50:

$$134 \cdot 48 = 134 \cdot 50 - 134 \cdot 2; \quad 6700$$

$$\quad \quad \quad - \quad 268$$

$$\quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 6432$$

$$986 \cdot 48 = 493 \cdot 100 - 986 \cdot 2; \quad 49300$$

$$\quad \quad \quad - \quad 1972$$

5) Умножение на 11:

$$\quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 47328$$

$$5683 \cdot 11 = 62513, \text{ так как } 56830$$

$$\quad \quad \quad + \quad 5683$$

$$\quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 62513,$$

т. е. выполняется сначала умножение на 10 (приписыванием 0), затем прибавляется данное число.

6) Умножение на 25:

$$3876 \cdot 25 = 96900.$$

Сначала данное число делится на 4, если это возможно, потом умножается на 100 или наоборот (всегда возможно).

7) Для умножения на 15 можно умножить на $(10+5)$:

$$768 \cdot 15 = 11520, \text{ так как } \begin{array}{r} 7680 \\ +3840 \\ \hline 11520 \end{array}$$

При умножении на 15 следует сразу подписывать 2-е слагаемое как половину найденного произведения $768 \cdot 10$.

8) Имеются приемы умножения на 75, 125, 225 и т. д. Мы указываем только наиболее употребительные, но учитель может разнообразить число примеров, даваемых им учащимся для устного и полуписьменного вычисления сокращенными приемами, особенно в кружковой работе, заинтересовывая учащихся и оживляя этим преподавание.

§ 8. Примеры для контрольной работы.

- 1) Найти произведение чисел $597 \cdot 8006$; $7500 \cdot 390$.
- 2) Написать число в 205 раз больше, чем 1003.
- 3) Сделать двумя способами проверку выполненного действия:

$$35 \cdot 101 = 3535.$$

- 4) Сделать умножение наиболее удобным способом (объяснить, какие законы умножения использованы):

$$125 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 8.$$

5) Во сколько раз дешевле заплачено за карандаши во второй раз по сравнению с первым, если во второй раз карандашей куплено в 10 раз меньше, а стоит каждый карандаш в 2 раза дороже (дешевле)?

6) Через сколько часов велосипедист, проезжающий по 15 км в час, нагонит товарища, проезжающего 12 км в час, если он выехал спустя 2 час. 30 мин. после него?

Глава VI

ДЕЛЕНИЕ. СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ

§ 1. Введение

Мы рассматривали действие умножения при последовательном соединении (сложении) совокупностей в том случае, когда все данные совокупности были равны между собой. Можно рассматривать действие деления при последовательном вычитании (разложении) в том случае, когда отделяемые совокупности равны между собой; результат показывает число возможных вычитаний (частное).

Могут быть три формы разложения совокупностей:

1. На 2 неравные части, причем одна из этих частей известна, а другую требуется определить,—это действие вычитания: $a-b$.

2. Более сложный случай, когда от данной совокупности последовательно отделяется несколько неравных частей и требуется определить оставшуюся часть,—это последовательное вычитание: $a-b-c-d$.

3. Случай последовательного вычитания, когда все отделяемые части равны между собой. Тогда данная совокупность разлагается на несколько равных частей,—это процесс деления с остатком или без остатка.

Так же, как вычитание есть действие, обратное сложению, деление определяется как действие, обратное умножению:

$$a : b = q; \quad a = b \cdot q$$

§ 2. Задачи, решаемые делением

Повторение и углубление вопросов деления с учащимися можно начать с рассмотрения двух основных задач, решаемых делением. В зависимости от того, что требуется определить и что дано, различают 2 случая деления: а) деление по содержанию, б) деление на равные части:

а) когда дается целое, подлежащее делению, известна величина каждой из равных частей, а нужно узнать, сколько раз в целом содержится данная часть, мы имеем случай, как говорят, деление по содержанию;

б) когда дается целое, подлежащее делению, и известно число равных частей, на которое надо разложить данную совокупность, а надо найти величину каждой из равных частей, тогда мы имеем, как говорят, деление на равные части. Справедливым остается прежде сделанное замечание, что для выяснения сущности вопроса надо брать задачи с простым текстом и небольшими числовыми данными.

Задача 1. Надо раздать 300 тетрадей учащимся так, чтобы каждый получил по 5 тетрадей. Сколько учащихся получают тетради? (Случай так называемого деления „по содержанию“.)

Решение ясно—брать по 5 тетрадей и раздавать по очереди: 300 тетрадей—5 тетрадей—5 тетрадей и т. д., пока не будут розданы все тетради; окажется, что эту операцию можно проделать 60 раз: $5 \cdot 60 = 300$. На этом примере учащиеся убеждаются:

1) что деление можно выполнить последовательным вычитанием равных частей из данного целого;

2) что непосредственный процесс отсчитывания крайне утомителен, в особенности если будут взяты большие числа, и что необходимо иметь соответствующий прием (правило) для выполнения подобного действия;

3) что могут быть случаи, когда дано для распределения такое число тетрадей между столькими учащимися, что выполнить это действие нацело невозможно; так, если предложено распределить 93 тетради по 5 тетрадей на человека, то останутся 3 тетради, которые не удовлетворят 19-го ученика; другими словами, учащиеся установят факт случая деления с остатком.

Замечание. Полезно спросить, какие остатки могут быть при распределении любого числа тетрадей по 5.

Ответ: 1, 2, 3, 4 и никакие другие.

Задача 2. Надо разделить 300 тетрадей поровну между 5 классами. Сколько тетрадей получит каждый класс? (Случай деления „на равные части“).

Решение. Брать, как и при решении первой задачи, последовательно по 5 тетрадей, но передавать их по одной в каждый класс; 300 тетрадей—5 тетрадей—5 тетрадей и т. д. до тех пор, пока все тетради не будут распределены между классами; 60 тетрадей окажется в каждом классе.

Различие между операциями в обеих задачах заключается в том, что в первом случае требуется найти множитель, во втором случае—множимое. Отсюда понятно, почему при выполнении действий получают одинаковые результаты при одинаковых числовых данных,—ведь порядок сомножителей может быть изменен, так как действие выполняется над отвлеченными числами: $60 \cdot 5 = 300$ и $5 \cdot 60 = 300$.

Надо приучать учащихся самостоятельно составлять задачи на каждый из рассмотренных случаев.

Как известно, делением решаются еще некоторые задачи или, другими словами, дается ответ на несколько иначе поставленные вопросы.

Задача 3. Уменьшить данное число в несколько раз. Например, уменьшить 120 в 4 раза.

Эта задача по существу является задачей деления на части (вторая из рассмотренных выше задач), и учащийся должен уметь объяснить, что „уменьшить в 4 раза“—это означает „разделить“ на 4 равные части и взять одну такую часть.

Задача 4. Сравнить (кратно) два числа, или, другими словами, узнать, во сколько раз одно число больше или меньше другого. Этот вопрос тоже решается делением (тот случай, когда ответ может быть дан в целых числах).

Пусть надо сравнить числа 140 и 35. Можно облечь задачу конкретным содержанием, поставив вопросы: во сколько раз больше? во сколько раз дороже? во сколько раз тяжелее? во сколько раз выше? во сколько раз длиннее? Можно так же поставить вопросы: во сколько раз меньше? легче? дешевле? ниже? и т. д.

По существу задача сравнения двух чисел по вопросу, во сколько раз одно число больше другого, или так называемое кратное сравнение чисел, не отличается от рассмотренной выше 1-й задачи деления по содержанию, так как в данном случае также

надо узнать, сколько раз второе число (меньшее) содержится в первом (большем): $140 : 35 = 4$ (раза) и $35 \cdot 4 = 140$, т. е. в этом случае также даны целое и величина каждой части, т. е. и в этом случае по произведению и множимому требуется найти множитель.

Первый вопрос этой задачи может быть поставлен иначе, а именно: во сколько раз 35 меньше 140? Но для ответа на него (до изучения дробных чисел) приходится предварительно узнать, во сколько раз 140 больше 35, а затем дать ответ: 35 меньше 140 в 4 раза.

Полезно на задачах же провести сопоставление формулировок всех случаев увеличения и уменьшения чисел, рассмотренных учащимися при изучении четырех действий с целыми числами.

1-я формулировка	2-я формулировка	Решается действием	Процесс	Запись
1) Найти число, большее данного на определенное число единиц	Увеличить данное число на определенное число единиц	Сложением	Прибавления или соединения	$a + b$
2) Найти число, меньшее данного на определенное число единиц	Уменьшить на определенное число единиц	Вычитанием	Удаления части	$a - b$
3) Найти число, большее данного в определенное число раз	Увеличить данное число в определенное число раз	Умножением	Множественного повторения слагаемым	$a \cdot b$
4) Найти число, меньшее данного в определенное число раз	Уменьшить в определенное число раз	Делением	Разложения. Распределения на равные части (берется одна часть)	$a : b$

Задачи следует брать из соответствующих глав задачника на сложение, вычитание, умножение и деление, причем сопоставление можно проводить в порядке 1) и 2), затем 3) и 4), а потом в ином порядке. От сопоставления задач 2) и 4) можно перейти к сравнению двух чисел по вопросам, на сколько

одно число больше или меньше другого и во сколько раз одно число больше или меньше другого.

В о п р о с	Решается действием	Термин	Запись
5) На сколько одно число больше другого	Вычитанием	Разностное сравнение чисел.	$a - b$
6) Во сколько раз одно число больше другого	Делением	Кратное сравнение чисел	$a : b$

Для ориентировки учащихся в определении деления как действия, обратного умножению, даются задачи и отвлеченного характера: по произведению и одному из сомножителей найти другой (о них будет сказано ниже).

§ 3. Зависимость между делением и умножением

Выяснение этого вопроса проводится так же, как выяснение аналогичного вопроса при изучении зависимости между действиями вычитания и сложения.

Упражнения. 1. Рассмотрев любую задачу с конкретным содержанием, требующую для своего решения использования действия умножения, например: а) $130 \cdot 7 = 910$, предложить учащимся самостоятельно составить 2 обратные задачи, сводящиеся к решению: б) $910 : 130 = 7$ и в) $910 : 7 = 130$.

2. На условии любой задачи, требующей для своего решения использования действия деления, например: 4 ткачихи соткали за 1 рабочий день 192 м ткани. Сколько соткала каждая ткачиха?

а) $194 : 4 = 48$; составить две задачи, решение которых: б) $192 : 48 = 4$, в) $48 \cdot 4 = 192$.

3. Записать два обратных действия для числового примера, например: а) $130 \cdot 125 = 16250$ или б) $16250 : 130 = 125$.

4. Предложить учащимся числовые примеры, в которых надо найти неизвестный сомножитель, или неизвестное делимое, или неизвестный делитель:

$$68 \cdot ? = 612; ? \cdot 95 = 950; 35 \cdot 15 \cdot ? = 5250; ? : 50 = 37; \\ 1680 : ? = 42 \text{ и т. п., причем:}$$

а) примеры могут быть даны и в таком виде, как написано выше, или с буквой x вместо знака ?;

б) примеры могут быть даны и в распространенном словесном виде: на какое число надо умножить 68, чтобы получить 612? какое число надо умножить на 95, чтобы получить 950? на какое число надо умножить произведение $35 \cdot 15$, чтобы получить 5250? какое число надо разделить на 50, чтобы получить 37? на какое число надо разделить 1680, чтобы получить 42? и т. п.;

в) примеры могут быть даны при помощи терминов-наименований данных и результата действий: известно произведение и множимое (или множитель или один из сомножителей)—найти другой сомножитель; известен делитель и частное—найти делимое; известно делимое и частное—найти делитель.

5. Выполнить проверку решаемых примеров и задач на основании зависимости между данными и результатом действия умножения и деления, а именно—проверку умножения делением и деления умножением и делением.

6. Можно дать числа, например 2475, 225, 11, и предложить составить любые задачи с текстом по этим данным, требующие для своего решения использования действий умножения и деления. Всего могут быть составлены 2 задачи на умножение и 4—на деление; для каждой задачи—две обратные ей, выраженные или в прямой, или в косвенной форме¹.

Учитель в практической работе может использовать все или некоторые из указываемых нами видов упражнений. С более подготовленными классами уже здесь можно записывать на буквах:

$$1) a \cdot b = q; 2) q : b = a; 3) q : a = b.$$

Также можно записывать:

$$1) a : b = p; 2) b \cdot p = a; 3) a : p = b,$$

¹ Задачи: 1) Один земельный участок размером в 225 га, а другой в 11 раз больше. Узнать размер 2-го участка.

2) Один земельный участок в 2475 га, а другой в 225 га. Во сколько раз 1-й участок больше 2-го?

3) Один земельный участок размером в 225 га в 15 раз меньше (или больше) другого. Узнать размер другого участка (задача выражена в косвенной форме).

причем учащиеся не должны заучивать букв наизусть—они могут число заменять любой буквой алфавита. Тогда они поймут, что под буквой можно понимать любое число, что буква—это число в общем виде.

Вопрос о взаимоотношениях арифметических действий, об их числе и их классификации имеет исторический интерес: в XV и XVI веках „удвоение“ и „деление пополам“ считались особыми действиями; „увеличение в несколько раз“ и „уменьшение в несколько раз“ также считались самостоятельными действиями.

„Ничто, кажется, не покоится на такой непоколебимой основе, как различие между четырьмя арифметическими действиями, элементами всей математики. И тем не менее уже с самого начала умножение оказывается сокращенным сложением, деление—сокращенным вычитанием определенного количества одинаковых чисел, а в одном случае—если делитель есть дробь—деление производится путем умножения на обратную дробь“¹.

§ 4. Свойства действия деления²

1. Прежде всего следует повторить с учащимися формулировки трех законов умножения и поставить вопрос, какие из этих законов имеют место в действии, обратном умножению,—в делении.

Учащихся затрудняет ответ, что закон переместительный не имеет места в делении, так как нельзя переставлять делимое на место делителя, и наоборот.

2. На задачах конкретного содержания можно установить с учащимися, что деление обладает распределительным свойством, т. е. деление суммы нескольких слагаемых на число может быть заменено делением на данный делитель каждого слагаемого отдельно. Например, задача: „Принесены 2 пачки тетрадей: в одной—100 шт., а в другой 200 шт. Их надо раздать 25 учащимся. Как это выполнить?“ Учащийся обычно не затрудняется пояснить решение этой задачи:

$$100 : 25 + 200 : 25 = (100 + 200) : 25 = 300 : 25,$$

а также аналогичные упражнения для случая, когда

¹ Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1946, стр. 207.

² В данном случае рассматривается деление без остатка.

сумму нескольких слагаемых приходится делить на число:

$$1060 : 2 = (1000 + 60) : 2 = 1000 : 2 + 60 : 2 = 530;$$

$$(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m.$$

Эту запись на буквах можно дать учащимся V класса. Здесь учащиеся видят тот закон, на основании которого выполняется деление чисел.

Можно тут же рассмотреть пример деления многозначного числа на однозначное, например:

$$9360 : 3 = (9000 + 300 + 60) : 3,$$

или

$$(9 \text{ т.} + 3 \text{ с.} + 6 \text{ д.}) : 3 = 3 \text{ т.} + 1 \text{ с.} + 2 \text{ д.} = \\ = 3000 + 100 + 20 = 3120.$$

Сначала рассматривают тот случай, когда число единиц каждого разряда делится на делитель нацело; затем дается любой пример.

Приведенной записи на доске вести не следует; мы указываем ей тот процесс рассуждений, который учащиеся должны провести устно.

3. Важное значение имеет установление того факта, что в случае деления произведения на какое-либо число можно (если это рационально), не вычисляя предварительно произведения, разделить только один из сомножителей на данное число. Например, надо $(15 \cdot 72) : 8$; получится верный ответ, если $15 \cdot (72 : 8)$. На нескольких примерах учащиеся должны проверить установленный факт. Нередко в примере $(300 \cdot 9) : 3$ учащиеся делят каждый сомножитель на 3. Только требованием обосновать выполнение действия и проверять правильность полученного ответа можно предотвратить эту ошибку учащихся.

На числовых примерах можно показать учащимся, что распределительный закон распространяется на случай, когда надо разделить разность чисел на данное число без остатка. Например:

$$96 : 4 = (100 - 4) : 4 = 100 : 4 - 4 : 4 = 24.$$

На правилах деления суммы и произведения на число основываются аналогичные тождественные

преобразования в дальнейшем курсе алгебры. Здесь же учащиеся впервые встречаются с этими вопросами¹.

На подобных примерах еще и еще раз подчеркиваются основные факты:

1) что каждое действие выполняется на основании определенных законов;

2) что преимущества десятичной системы нумерации имеют громадное значение при выполнении любого действия;

3) что при выполнении действий деления (как раньше было указано при выполнении действия умножения) играет очень важную роль таблица умножения однозначных чисел, как при выполнении действий сложения и вычитания—таблица сложения

Рассмотренные свойства применяются при устном выполнении деления, например: 1) при делении на 4 = $2 \cdot 2$; на 6 = $2 \cdot 3$; на 12 = $3 \cdot 4$ и т. д.; 2) при делении на 5 = $\frac{10}{2}$ (сначала умножают на 10, затем делят на 2 или наоборот); на 25 = $\frac{100}{4}$; на 500 = $\frac{1000}{2}$ и т. п.

Устные упражнения.

§ 5. Деление без остатка

При повторении действия деления ввиду многих трудностей в обосновании, а также технических трудностей, связанных с выполнением деления, следует остановиться на рассмотрении несколько большего числа случаев, чем при повторении остальных действий с натуральными числами. Весь этот во-

¹ В действиях с дробями снова указывается учащимся, что сокращение дроби $\frac{ab}{ka}$ (или на числовом примере $\frac{3 \cdot 12}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$) выполняется на основании вышеуказанного свойства произведения и что запрещение сокращать дробь $\frac{a+b}{b}$ на b или $\frac{3+12}{8}$ на 4 основывается на соответствующем свойстве суммы.

прос может быть повторен на примерах с отвлеченными числами, так как основным в данной работе является анализ процесса выполнения действия и навык в технически совершенном его выполнении. Мы разбиваем весь процесс техники выполнения деления на отдельные шаги (этапы) по степени трудности и даем указание, как путем упражнений постепенно подвести учащихся к осознанию и прочному навыку в выполнении сложного процесса деления многозначных чисел в тех классах, где в этом окажется необходимость.

1. Случай деления однозначных чисел только упоминается для того, чтобы подчеркнуть, что деление есть действие, обратное умножению, и в этом случае выполняется на основании таблицы умножения.

То же для случая деления двузначного числа на однозначное, когда частное однозначное.

2. Напоминается рассмотренный выше случай деления любого многозначного числа на однозначное. В этом случае учащиеся должны выполнить вычисления в строчку. Так, например, даже в одном из трудных для учащихся примеров желательно предпочесть запись:

$$68922 : 9 = 7658 \text{ записи: } \begin{array}{r} 68922 \overline{) 9} \\ \underline{59} 7658, \\ \underline{52} \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

не говоря уже о том, что не следует в этом случае подписывать в процессе выполнения деления частные произведения.

3. Полезно рассмотреть случай деления многозначного числа на многозначное, когда в частном получается число однозначное, например: $852 : 213 = 4$; $1917 : 213 = 9$, потому что $213 \cdot 9 = 1917$; $213 \cdot 4 = 852$. Этим закрепляется определение: деление есть действие, обратное умножению.

На примерах показано, что если в делимом столько же цифр, сколько в делителе, или на одну цифру больше, при условии, что первая цифра де-

лимого меньше первой цифры делителя, то в частном получается число однозначное¹.

4. До того, как переходить к случаю деления любых многозначных чисел, следует проделать несколько упражнений для выяснения, от деления каких разрядов делимого получается первая цифра частного и как постепенно получают следующие цифры частного.

Например, надо разделить $512088 \overline{) 456}$;

512 тысяч дают при делении на 456 тысячу; ясно, что в ответе получится четырехзначное число (тысячи, сотни, десятки, единицы) и так далее.

5. Прежде чем переходить к делению любых многозначных чисел, полезно на примере деления многозначного числа на двузначное напомнить учащимся, как находить цифру частного; например, при делении $10206 : 18$ для отыскания цифры частного надо 102 разделить на 18, можно $102 : 20$ и найти соответствующую цифру частного 5 (20 взято округленно с избытком, так как последняя цифра делителя 8 больше 5 и значение 18 ближе к 20, чем к 10).

В некоторых случаях при указанном приеме получается в частном цифра, отличающаяся от истинной. Это имеет место тогда, когда в делителе последняя цифра 5 или близкая к 5 (брать или округленное значение с недостатком, или с избытком), и тогда, когда в записи частного следующая за отыскиваемой цифрой цифра 9 и др. В этих случаях надо проверкой использовать пригодность найденной цифры частного; например, в случае $475 : 85$ при делении 47 на 8 (округленно) и при делении 47 на 9 (округленно) получаем цифру частного 5; но в случае, например, $1792 : 256$ при делении 17 на 2 получаем 8, а при делении 17 на 3 получаем 5—приходится испробовать цифру 6 или 7.

Пользуясь указанным приемом, учащиеся сознательно оценивают число цифр частного и тем самым контролируют работу и реже допускают часто имеющую место ошибку—пропуск цифры, в частности,

¹ Чтобы узнать, какое получится частное: однозначное или не однозначное, надо мысленно делитель умножить на 10 и полученный результат сравнить с делимым.

в случае, когда должен быть 0 или в середине, или в конце частного. Ясно, что прием, указанный для нахождения первой цифры частного, применим и при нахождении любой цифры частного. Надо стремиться выработать у учащихся как бы механизированный навык—в очень многих частных случаях писать сразу цифру частного. В первую очередь, конечно, для этого служит свободное владение таблицей умножения, но, кроме того, полезно упражнять учащихся в умножении двузначных чисел на однозначные числа 2, 3 и 5, как, например, $26 \cdot 5$; $28 \cdot 5$; $35 \cdot 5$ и т. п., или в отдельных случаях—в умножении некоторых двузначных чисел на двузначные, как, например, в случаях: $16 \cdot 16 = 256$; $15 \cdot 15 = 225$; $14 \cdot 14 = 196$; $13 \cdot 13 = 169$ и т. п. Переспрос такой таблицы умножения, а также и, обратно, деления, например: $111 : 37$; $136 : 8$ и т. д.,—дело нескольких минут и проводится на уроке в порядке устных упражнений.

6. Общий случай. Когда учитель проверил, что все отдельные детали операции деления осознаны и усвоены учащимися, можно перейти к обоснованию правила последовательного нахождения цифр частного при делении любых многозначных чисел и к закреплению соответствующего навыка учащихся в выполнении действия.

Число упражнений в этом повторительном курсе полностью зависит от предыдущей подготовки класса. Среди упражнений целесообразно решить несколько примеров на действия с составными именованными числами.

При этом деление составного именованного числа на отвлеченное, где можно, следует выполнять на основании распределительного закона; в общем случае деление составных именованных чисел всегда выполнимо путем выражения делимого и делителя в мерах одного наименования.

Примеры. 1) $10 \text{ т } 7 \text{ ц } 25 \text{ кг} : 5 = (10 \text{ т} + 7 \text{ ц} + 25 \text{ кг}) : 5 = 2 \text{ т} + 1 \text{ ц} + 40 \text{ кг} + 5 \text{ кг} = 2 \text{ т } 1 \text{ ц } 45 \text{ кг}$.

2) Сколько раз в $4 \text{ км } 248 \text{ м}$ содержится по $1 \text{ км } 62 \text{ м}$?

$$4248 : 1062 = 4 \text{ (раза)}.$$

7. *Трудные случаи деления.* Следует особое внимание обратить на случай деления чисел, когда в частном получается число, в записи которого имеется один или несколько нулей в середине.

Учитель составляет сам подобные примеры. Например, желательно получить в частном 7003, при любом делителе—пусть при делителе 256; учитель заранее умножает 7003 на 256 или 256 на 7003, получает 1792768 и предлагает учащимся разделить 1792768 на 256 и т. д.

При выполнении деления надо следить за тем, во-первых, чтобы учащийся определил заранее, сколькими цифрами будет записано частное, а потом проверил, совпадает ли ответ с его предварительным подсчетом; во-вторых, чтобы учащийся, снося единицы какого-либо разряда в остаток и получая промежуточное делимое, которое не делится на делитель, не забывал записывать 0 на месте соответствующего разряда в частном.

Также ставится особо упражнение для случая деления, когда получается 0 в конце частного, например: $5960 : 4 = 1490$. Средством не допускать потерю нуля в частном являются опять-таки: а) создание у учащихся привычки считать число цифр, которое должно получиться в частном; б) проверка возможности получившегося частного, например, в данном случае от деления 5000 на 4 должно получиться не меньше 1000, что и показано ответом; в) аккуратное выписывание цифр частного, в соответствии с каждой следующей «сносимой» цифрой делимого.

Связывая пропуск нуля при выполнении деления с недостаточным вниманием, некоторые авторы предлагают такой прием записи деления, при котором частное пишется над делимым так, что последняя цифра частного механически придется над последней цифрой делимого.

Для деления: $12992 : 32 = 406$ дается запись:

$$\begin{array}{r|l} 406 & \\ \hline 12992 & 32 \\ \hline 192 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Употребляется также запись деления, при которой делитель пишется слева, а частное—справа от делимого:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 12922 \\ & \underline{192} \\ & 0 \end{array} \quad 406$$

Эти приемы нами не применяются.

Не следует позволять учащимся при делении на цело писать в остатке черточки или запятые, в остатке надо писать 0.

Следует особо выделить и упражнять учащихся в случаях деления на единицу и деления 0 на число. При делении на единицу делитель единица понимается как отвлеченный множитель, на который надо помножить частное, чтобы получить делимое. В случае деления по содержанию—смысл деления на 1 ясен: сколько раз 1 содержится в 5.

В следующих двух случаях частное равно делимому:

$$a : 1 = a; 0 : a = 0.$$

Например, $5 : 1 = 5$, потому что $5 \cdot 1 = 5$; $0 : 5 = 0$; $0 \cdot 5 = 0$.

Деление 1 на натуральное число, отличное от 1, невозможно в целых числах и рассматривается в разделе „Дробные числа“.

Случай деления числа на 0 исключается¹.

¹ Так как этот запрет является универсальным, т. е. сохраняющим свою силу при всех дальнейших расширениях понятия числа, то он должен быть высказан и постоянно напоминаем в самой категорической форме. На всем протяжении школьного курса необходимо тщательно избегать каких бы то ни было записей, содержащих нуль в знаменателе. Так, говоря о том, что уравнение $0 \cdot x = 1$ не имеет решений, следует мотивировать это заключение тем, что $0 \cdot x$ при любом x равно нулю и, следовательно, ни при каком x не может равняться единице. Напротив, не следует рассуждать так: из $0 \cdot x = 1$ вытекает: $x = \frac{1}{0}$, а так как выражение $\frac{1}{0}$

не имеет смысла, то данное уравнение не имеет решений; при таком рассуждении мы фактически производим деление на нуль, лишь потом констатируя, что полученное выражение не имеет смысла; между тем как задача состоит как раз в том, чтобы приучить учащихся никогда не предпринимать попытки деления на нуль. (А. Я. Хинчин, Основные понятия и определения в математике.)

§ 6. Деление с остатком

Хорошим переходом к случаям деления с остатком могут быть случаи деления, не рассмотренные нами выше, а именно, когда записи делимого, делителя или обоих членов оканчиваются нулями.

1. Делимое записывается цифрами с нулем или с нулями на конце, например: $37800 : 42$. Часто учащиеся говорят: „Разделим 378 сотен на 42, затем в частном припишем 2 нуля“ (по существу здесь применяются свойства умножения и деления: $a \cdot 100 : b = (a : b) \cdot 100$). В данном случае это можно сделать, но если предложить учащимся выполнить по сказанному ими правилу деление, например, в случае $35700 : 42$, то при делении 357 на 42 они должны сказать, что деление нацело выполнить нельзя, а в действительности ответ при делении 35700 на 42 получается точно 850:

$$\begin{array}{r} 35700 \mid 42 \\ \underline{336} \\ 210 \\ \underline{210} \\ 0 \end{array}$$

Поэтому и здесь, и ниже мы рекомендуем в рассматриваемом случае и аналогичных случаях никаких нулей не зачеркивать и не переносить их сразу в частное до тех пор, пока нет уверенности, что деление выполняется без остатка.

2. Деление многозначного числа на 10, 100, 1000 и на десятки: 20, 30, 40,... или сотни: 200, 300,... может быть использовано прежде всего для того, чтобы учащиеся могли сказать сразу, посмотрев на делитель, можно ли вообще ставить вопрос о делении на него нацело делимого или нет.

Деление выполняется по формуле: $a : 30 = a : (10 \cdot 3) = (a : 10) : 3$. Например, в случае $53600 : 200$ можно пробовать делить, так как делимое делится на 100; в случае $4783 : 30$ не следует даже пробовать делить, так как делимое не делится на 10.

Полезно поупражнять учащихся на нескольких примерах, решаемых устно или полуписьменно, в

выполнении указанного случая деления, когда деление совершается нацело, например:

$$5400 : 30 = 5400 : 10 : 3 = 540 : 3 = 180$$

$$6800 : 400 = 6800 : 100 : 4 = 68 : 4 = 17$$

До изучения признаков делимости много таких примеров решать не следует. Понятно, что эти примеры надо подбирать крайне тщательно и при решении их все же лучшим приемом, дающим наименьшее число ошибок у учащихся, остается непосредственное деление, если нет уверенности (что бывает в редких случаях), что деление выполняется нацело. Еще и еще раз можно показать это учащимся на примере такого рода: $7300 : 400$. Если непосредственно выполнить деление, то ответ будет 18 и в остатке 100; если выполнить деление, сначала разделив 7300 на 100, потом на 4, то в частном получится также 18, но остаток 1 (подробнее об этом ниже). Укажем, что 65% обследованных нами учащихся V класса дали неверный ответ в случае деления 5690 на 330.

Часто обосновывают зачеркивание одинакового числа нулей в делимом и в делителе свойством частного не изменяться при делении и делимого и делителя на одно и то же число; нами этот вопрос рассматривается позже, но, повторяем, это можно было бы допустить лишь при уверенности, что деление выполняется без остатка. Поэтому не следует создавать у учащихся навыка механически зачеркивать нули в записи делимого и делителя. Это мысленное отбрасывание нулей полезно также для ориентировочного определения числа цифр частного. Например, надо $149100 : 7100$; прикинув, сколько получится, если $1491 : 71$, можно сказать, что в ответе получатся десятки, единицы, и даже можно сказать, что примерно получатся 2 десятка.

В результате всех проведенных упражнений учащиеся научатся решать примеры вида $\frac{8130}{30} \mid \frac{100}{81}$, причем частное и остаток следует выписывать сразу, рассудив (устно), сколько сотен в данном делимом, а также решать примеры непосредственным делением:

$$\begin{array}{r} 53400 \overline{) 700} \\ \underline{4900} \\ 4400 \\ \underline{4200} \\ 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7210 \overline{) 30} \\ \underline{12} \\ 10 \end{array}$$

или мысленно отбрасывая нули: $\begin{array}{r} 32500 \overline{) 2300} \\ \underline{95} \\ 300 \end{array}$

Укажем, что иногда учащиеся допускают следующие ошибки в работе:

1) отделяют остаток запятой и в случае деления

$$\begin{array}{r} 91234 \overline{) 76} \\ \underline{76} \\ 152 \\ \underline{34} \end{array}$$

дают неверный ответ: 12, 34, или 2) при делении $54600 : 3400$ пишут $546 : 34$, в частном 16, в остатке 20 или 2, вместо 200.

3) Были случаи ответа: „4790 на 330 не делится“, и данный пример вообще перечеркивался учащимися.

4) В случае, когда остаток ошибочно получается больше делителя, учащийся нередко продолжает деление. Например:

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 8} \\ \underline{-32} \\ 8 \\ \underline{0} \end{array}$$

Устные упражнения.

1) Установить, из какого наибольшего числа разрядов может состоять остаток. Например, учащиеся должны знать, что в примере $689356 : 472$ остаток может состоять из сотен, десятков и единиц, или только из десятков и единиц, или только из единиц, но не может содержать, например, тысячи и т. д. Также при делении на 96—остаток может состоять из десятков и единиц или только из единиц, но не может состоять, например, из сотен.

2) Полезно поставить учащемуся вопросы: какое будет целое частное при делении 7 на 12? каков остаток? Далеко не всегда ученики отвечают правильно, а именно, что частное будет 0, а остаток 7.

3) Следует поставить упражнение на нахождение делимого, если известны делитель, частное и остаток. Задачи можно разнообразить конкретным содержанием, например: какое число при делении на 7 дает в частном 6, а в остатке 5? сколько надо принести тетрадей, чтобы раздать всем присутствующим учащимся в классе, например, по 7 тетрадей да еще дать для групповых занятий 3 тетради? и т. п.

4) Перечислить остатки, которые могут получиться при делении числа на 9, на 7, на 13 и т. п.

5) Известно, что при делении 80 на 6 получается в частном 13 и в остатке 2. Сколько единиц надо отнять от делимого (80), чтобы при том же делителе получилось то же частное, но без остатка (делимость нацело)?

Замечание. При делении числа a на число b рассматриваются 2 случая:

а) $a : b = q$; $a = b \cdot q$, где q — частное;

б) в случае, когда остается остаток $r < b$:

$$a = bq + r, \text{ или } a - r = bq; \frac{a-r}{b} = q.$$

Пример. Вычислить делимое и записать, как вычисляют делимое, если известны делитель, частное, остаток, например, в случаях: а) делитель равен 11, частное 8, б) делитель 11, частное 8, остаток 5. Проверить правильность записи.

Ответы. а) $88 = 11 \cdot 8$; б) $93 = 11 \cdot 8 + 5$, или $93 - 5 = 11 \cdot 8$; $\frac{93-5}{8} = 11$.

Это упражнение полезно потому, что нередко учащиеся в случае деления с остатком неправильно употребляют знак $=$. Так, в рассмотренном примере они пишут: $93 : 11 = 8 + 5$ (?) и замечают свою ошибку только после того, как напишут это неверное равенство. Иногда эта зависимость пишется так: $93 : 11 = 8(5)$,

где число 5, взятое в скобки, должно показывать остаток. Так писать не следует. В дальнейшем, изучая дробные выражения, учащиеся должны будут писать:

$$\frac{93}{11} = 8 + \frac{5}{11}; \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \text{ или } \frac{93-5}{11} = 8; \frac{a-r}{b} = q.$$

Из рассмотрения четырех действий над натуральными числами выясняется, что выполнение прямых действий (сложения и умножения) над натуральными числами всегда возможно, и в результате этих действий получается всегда натуральное число; выполнение обратных действий (вычитания и деления) возможно в области натуральных чисел лишь при известных условиях (вычитание $a-b$, если $a > b$; деление $a:b$, если a кратно b). Нет в области натуральных чисел числа, показывающего результат в случаях $5-5$; $5-7$; $5:7$ (в дальнейшем расширяется числовая область введением нуля, чисел дробных, отрицательных). Деление на 0 исключается всегда.

§ 7. Изменение частного

Изменение частного при изменении делимого и делителя представляет один из самых сложных вопросов курса арифметики; уже при выяснении изменения произведения в случае, когда изменяются и множимое и множитель, было указано, что имеют место случаи, когда без знания дробей соответствующий вопрос не может быть разрешен. Еще в большей степени это относится к вопросу изменения частного при изменении данных. Вопрос об изменении частного связан с вопросом о том, какой случай деления имеет место—с остатком или без остатка.

Ввиду вышесказанного, в V классе не может быть рассмотрен вопрос об изменении частного в полном объеме. Задачи с текстом для иллюстрации этих зависимостей разнообразны; например, вопросы изменения производительности труда при изменении общей выработки при одном и том же числе рабочих, вопросы изменения стоимости единицы продукции при изменении общей стоимости определенного количества товара и т. д.

Первый вопрос. Изменение частного в зависимости от увеличения и уменьшения делимого в несколько раз (в случае деления нацело).

Даем, как и раньше, план для повторения, если учитель найдет нужным его проводить. Пусть по числовым данным задачи составлена.

Т а б л и ц а 1

1) $120 : 3 = 40$	3) $480 : 3 = 160$
2) $240 : 3 = 80$	4) $960 : 3 = 320$

Можно таблицу продолжить. Учащимся предлагается сравнить делимое, делитель и получающееся частное в случаях 2) и 1), 3) и 1), 4) и 1). Ученики делают вывод об увеличении в 2,4,8 раз частного при соответствующем увеличении делимого. Также при сопоставлении написанных строчек таблицы в обратном порядке (указать стрелкой, направленной вверх), а именно: 4) с 3), 4) с 2) и 4) с 1), ученик пробует делать вывод об уменьшении частного соответственно уменьшению делимого в несколько раз. Такие выводы и правила даются в учебниках арифметики.

Учитель со всей осторожностью должен отнестись к таким скороспелым обобщающим умозаключениям на основе двух-трех рассмотренных частных случаев: во-первых, для рассмотрения случая увеличения частного в связи с увеличением делимого могли быть взяты в ряду строчек таблицы 1 и строчки $360 : 3$; $600 : 3$ и т. д. И действительно, когда предлагают ученикам самостоятельно писать такие строчки, в которых делимое в каждой последующей строчке было бы в несколько раз больше по сравнению с делимым в 1-й строчке, то ученики обычно пишут:

Т а б л и ц а 2

1) $120 : 3 = 40$	4) $480 : 3 = 160$
2) $240 : 3 = 80$	5) $600 : 3 = 200$
3) $360 : 3 = 120$	6) $960 : 3 = 320$

Эта таблица не может быть использована для обратного рассмотрения (снизу вверх) частного при делимых, взятых в несколько раз меньше, чем первоначальное делимое. В самом деле, как сказать,

не зная дробных чисел, во сколько раз или как изменится частное при переходе от случая б) к 5) и т. д.?

Учитывая указанное выше, учитель должен сам диктовать числа для таблицы 1, или если учащийся написал таблицу 2, то для сравнения результатов при уменьшении делимого в несколько раз надо рассмотреть только те строчки, где имеется делимое, измененное в целое число раз, т. е. надо рассмотреть строчки б) с 4) и с 2), затем 5) с 1) или 3) с 1). Во-вторых, учитель может предложить учащимся рассмотреть случай деления с остатком, таблицу 3, где каждое последующее делимое в 2, 3 раза меньше первого делимого, но в этом случае нельзя сказать, что частное уменьшается во столько раз, во сколько раз уменьшается делимое.

Т а б л и ц а 3

- 1) $960 : 3 = 320$
- 2) $480 : 3 = 160$ (делимое в два раза меньше 960)
- 3) $320 : 3$; частное 106 и в остатке 2
(а делимое в три раза меньше 960)

Неправильный вывод может быть предупрежден, если проводить предварительное исследование характера деления при различных значениях делимого, т. е. знать, будет ли в каждом случае деление с остатком или деление без остатка.

Таким образом, даваемые в учебниках арифметики формулировки правила изменения частного в зависимости от увеличения и уменьшения делимого в несколько раз справедливы только для тех случаев, когда данное делимое делится без остатка на делитель. Кроме того, в случае уменьшения делимого в несколько раз имеется еще одно ограничение, а именно: и измененное делимое должно делиться без остатка на делитель.

Правильно было бы дать правило в таком виде: если деление выполняется нацело и если при этом

- 1) делимое увеличить в несколько раз, то и частное увеличится во столько же раз;
- 2) делимое уменьшить в несколько раз, то частное уменьшится во столько же раз в тех случаях, когда при изменении делимого деление также выполняется нацело.

Второй вопрос. Изменение частного в зависимости от увеличения делителя в несколько раз требует того же указанного выше ограничения, а именно: если делимое делится нацело (без остатка) и если при увеличении делителя в несколько раз деление снова выполняется нацело, то второе частное во столько раз будет меньше первого частного, во сколько раз второй делитель больше первого. Пояснение в случае деления на части—просто, а именно: если число частей, на которое надо разделить данное число, увеличить вдвое, втрое и т. д., то каждая часть соответственно уменьшится. Показать эту зависимость можно на задачах с текстом и на таких же примерах—столбцах, какие приводились выше; рассматривая таблицу в обратном порядке, можно рассмотреть и изменение частного при уменьшении делителя в несколько раз, но в этом последнем случае нет необходимости делать указанные выше ограничения, потому что и без этого ясно, что если деление совершается нацело при одном делителе, например 15, то при делителе 5 или 3 оно также будет выполняться нацело.

Ф. Егоров в своей „Методике“ предлагает для уяснения зависимости изменения частного при изменении делителя решать задачи и иллюстрировать их наглядно.

Например: 3600 плодов разложены в 4 ящика, а затем из каждого ящика они распределены в 3 корзины. В каждой корзине в 3 раза меньше плодов, чем в каждом ящике (рис. 16).

$$\begin{array}{l} \text{Решение.} \qquad \qquad \qquad 3600 : 4 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3600 : (4 \cdot 3); \end{array}$$

и обратно, из 12 корзин плоды переложены в 4 ящика (в 3 раза уменьшен делитель), тогда частное—количество плодов в каждом ящике соответственно будет больше.

Этими примерами иллюстрируются и правило деления числа на произведение двух (или нескольких) чисел и правило деления на частное от деления двух чисел:

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c; \quad a : (b : c) = (a : b) \cdot c.$$

Здесь можно повторить с учащимися объяснение некоторых частных случаев деления, указанных выше, как, например:

$$126000 : 3000 = 126000 : (3 \cdot 1000) = (126000 : 1000) : 3 = 126 : 3 = 42 \text{ и др.}$$

Выбор задач для иллюстрации рассмотренной зависимости также большой: вопросы распределения, как показано выше, затем вопрос изменения производительности труда в связи с изменением числа часов или дней работы при одинаковой общей выработке, вопросы стоимости и т. п.

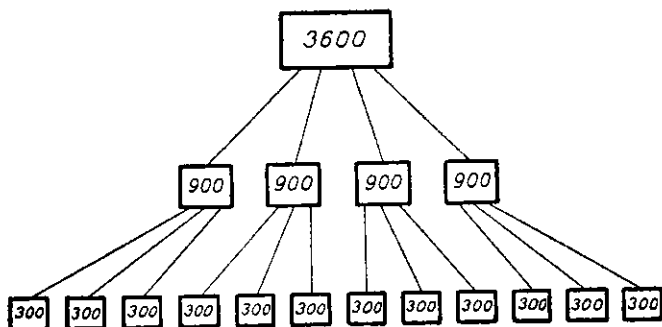


Рис. 16.

Такого же характера задачи с текстом можно рассматривать и в случае деления по содержанию, но в этом случае в рассмотренной выше задаче распределения плодов искомым, изменение которого исследуется, будет число корзин (ящиков, вагонов), в которые распределяются объекты при сохранении их общего количества, но при различной вместимости тары; во второй задаче можно исследовать изменение времени работы при определенном объеме выполненной работы и различной производительности труда и т. д.

Третий вопрос. Изменение частного при совместных изменениях делимого и делителя вызывает у учащихся те же затруднения, какие указаны выше при разборе вопроса об изменении произведения. Не следует задерживаться с учащимися на рассмотрении этого вопроса. До знания дробных чисел он и не может быть изучен полностью.

Случай изменяемости частного при одновременном изменении делимого и делителя рассматривается в том же порядке и применяется к объяснению деления: $462000 : 2200 = 4620 : 22 = 210$ (случай деления без остатка).

Четвертый вопрос. Мы не предлагаем на этой ступени рассматривать с учащимися изменение частного в зависимости от изменения делимого и делителя на некоторое число, но полезно указать хотя бы на примерах, что в этом случае нет знакомой им зависимости.

Например, $50 : 25 = 2$; $53 : 25 = (50 + 3) : 25$ дает в частном тоже 2 и в остатке 3; $50 : 28$ дает в частном 1 и в остатке 22; $53 : 28$ тоже в частном 1 и в остатке 25 и т. п.

Повторение четырех действий с целыми числами сопровождается решением примеров и задач.

Изменение остатка. С учащимися V класса не изучается вопрос об изменении остатка при изменении делимого и делителя.

Укажем только, что здесь возможны 3 случая. Пусть a — делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток. Тогда $a = bq + r$, где $r < b$

1) Делимое и делитель умножить (или разделить, если возможно, нацело) на число m ; тогда по правилу умножения разности $(a - bq) \cdot m = rm$ имеем: $am = (bm)q + rm$, т. е. частное q не изменится, а остаток увеличится (или уменьшится) в m раз¹

Примеры

	Делимое	Делитель	Частное	Остаток
1)	50	6	8	2
	100	12	8	4
	150	18	8	6
2)	60	14	4	4
	60	28	2	4
	60	56	1	4
3)	120	14	8	8
	120	28	4	8
	120	56	2	8

2) Делимое умножить (или разделить) на число m ; тогда, пользуясь правилом умножения суммы и произведения, имеем: $am = (bq + r)m$; $am = b(qm) + rm$, т. е. частное и остаток увеличатся (уменьшатся) в m раз

3) Делитель умножить (разделить) на число m ; тогда:

$a = (bm) \frac{q}{m} + r$, т. е. частное уменьшится (увеличится) в m раз; остаток не изменится.

§ 8. Порядок действий при совместных действиях. Скобки

При выполнении нескольких действий результат зависит от данных чисел и от порядка их выполнения. Для предупреждения недоразумений можно заключать в малые скобки те числа, над которыми следует сначала выполнить действие, в большие скобки заключать те числа и те полученные ранее результаты, над которыми требуется затем выполнить действия и т. д. Обилие скобок не желательно;

¹ Этот случай рассмотрен в § 6 „Деление с остатком“.

поэтому вводятся соглашения (они даются в учебнике арифметики), в каком порядке следует выполнять действия в выражении, записанном без скобок¹. Этим условием учитель должен придерживаться в своей работе.

Действия сложения и вычитания называются действиями (операциями) первой ступени; действия умножения и деления называются действиями второй ступени.

1) Если выражение, данное для вычисления, записанное без скобок, содержит только действия одной и той же ступени (первой или второй), то эти действия должны быть выполнены в той последовательности, в какой они записаны.

2) Если выражение, записанное без скобок, содержит действия различных ступеней, то действия высшей ступени должно быть выполнено сначала. Например $a \cdot b + c$ обозначает то же, что $(a \cdot b) + c$. Если же сначала надо найти сумму, то следует обозначить требуемый порядок выполнения действий скобками: $a (b + c)$; также $a b + c d$ означает $(a b) + (c d)$, и иной порядок действий требуется в выражении $a \cdot (b + c) d$.

Надо сказать, что указанного порядка выполнения действий в выражении, записанном без скобок, придерживались далеко не все авторы учебников и задачников по арифметике. Это вносило до введения стабильных учебников большие недоразумения в школьную практику, последствия которых не изжиты до настоящего времени. Кроме того, во многих задачниках для начальной школы ставились скобки в случае $(a \cdot b) + (c d)$, что также внесло разноречивость в школьное преподавание.

Условия о порядке действий, сформулированные выше, принятые в нашей школе, являются вполне целесообразными соглашениями, дающими учащимся единое простое правило порядка выполнения действий всех трех ступеней².

¹ Киселев, Арифметика, 1955, § 80, стр. 46.

² Этот порядок действий был принят и в дореволюционных учебниках алгебры (Давыдова, Малинина и Буренина) и принят в учебниках западноевропейских стран.

Известно, что отдельные авторы допускали иной порядок действия, отдавая предпочтение одному из действий—умножению, так, например, $a : b \cdot c$ при числовых значениях $16 : 4 \cdot 2$ согласно условию 1 должно дать в результате 8, а не 2. Сторонники принятия другого соглашения (получения ответа 2) исходили из соображений, что при буквенной записи $a : bc$ сперва выполняется действие умножения bc . Но в случае буквенной записи это понятно, так как запись $a : bc = \frac{a}{bc}$ (черта дроби заменяет скобки) означает деление a на произведение bc , т. е. означает $a : (b \cdot c)$ ¹.

Преподаватель должен придерживаться принятых условий для того, чтобы не допускать различного толкования в различных школах и получения различных ответов учащимися на один и тот же поставленный вопрос. В указанном выше числовом примере следует считать правильным ответ 8.

Проведенная проверка показала, что в отдельных школах и классах большинство учащихся на предложение записать „к числу 50 надо прибавить произведение 9 на 10“ пишут: $50 + (9 \cdot 10)$ со скобками. В этом нет ошибки, но и нет необходимости в скобках. Пример с целыми числами: $320 + 64 : 8$ учащиеся в большинстве случаев поняли как $(320 + 64) : 8$ и дали ответ 48 вместо 328; пример: $4 \cdot 17 - 8 : 4$ поняли как $(4 \cdot 17 - 8) : 4$ и дали ответ 15 вместо 66.

Пример $(43 - 31) : 3 + 42 : 6$ также часто решается учащимися неправильно, а именно как $(43 - 31) : 3 + 42 : 6$, и т. д. Та же ошибка повторилась в аналогичных примерах с десятичными дробями и с обыкновенными. Другими словами, у учащихся создан неверный навык, и практически результат их работы по изучению действий как с целыми, так и с дробными числами обесценен.

Упражнения. Надо крайне тщательно проводить с учащимися отдельные упражнения.

1. Писать под диктовку сумму чисел, разность, произведение, частное; например, для чисел 45 и 80. Учащиеся должны освоиться с тем, что запись $45 + 80$ (или $45 \cdot 80$) одновременно показывает „действие сложения“ (или действие умножения) и результат действия, т. е. „сумму“ (или „произведение“).

2. Читать запись выражения, содержащего 2 действия. Например, $85 - 6 \cdot 3$ читают таким образом: „От 85 отнять произведение 6 на 3“ или: „6 умножить на 3 и полученное произведение вычесть из

¹ Мы считаем, что это возражение есть плод недоразумения. Ведь всякому ясно, что при делении $6a^2b$ на $3ab$ мы делим одночлен на одночлен, т. е. произведение на произведение.

И когда ставится вопрос о нахождении численной величины приведенного выше выражения (допустим, при $a=5$, $b=4$), то это только значит, что надо найти при данных значениях букв численную величину делимого (600), делитель (60) и произвести над ними указанные действия. Арифметическая интерпретация: $6a^2b : 3ab = (6 \cdot 5^2 \cdot 4) : (3 \cdot 5 \cdot 4) = 600 : 60 = 10$ („Математика в школе“, 1941, № 3).

85°. Затем читать запись выражений в 3 действия, в 4 действия и т. д., например: $36 : 2 + 4 \cdot 7$; $80 - 7 \cdot 3 + 6 \cdot 4$ и т. п.

3. Те же выражения писать под диктовку в той же последовательности в смысле нарастания: а) числа действий, б) величины чисел.

Читать пример надо медленно, четко, указывая каждое отдельное действие в той последовательности, в которой действия должны выполняться.

4. По записанному выражению указать, какие действия надо произвести и в какой последовательности.

Для четкости работы и для облегчения последующих занятий по алгебре полезно запись делать так, чтобы знаки $+$ и $-$ не сливались с записью чисел. Писать их надо, несколько отступая от цифр.

5. Как уже сказано, скобки показывают, над какими числами и какие действия должны быть сначала выполнены. Упражнение в записи и чтении выражений, записываемых со скобками, надо провести отдельно, а именно: дать упражнение для случая, когда надо: а) сумму чисел или разность умножить (разделить) на число и, обратно, число умножить или разделить на сумму (разность) чисел:

$$(a \pm b)c; a (b \pm c);$$

после этого перейти к более сложным выражениям с двумя скобками, как, например:

$$(a + b)(c + d), \text{ или } (a + b)c + (m + n)d, \text{ или без скобок:} \\ a : b + c - d \cdot e \text{ и т. д.}$$

Читается запись выражений: $(30 - 12) \cdot 5 - 6 \cdot 8$; $420 + 130 : 11 + 24 \cdot 15$ и т. д. Первое выражение читается так: „Разность чисел 30 и 12 надо умножить на 5 и из полученного произведения вычесть произведение 6 на 8“.

Замечания. 1) Запись выполняемых действий во всех упражнениях должна вестись последовательно и аккуратно, причем действия, доступные устному или полуписьменному вычислению, выполняются устно или полуписьменно. Например:

$$(256 + 104) : 4 + 1800 : 75 = 90 + 24 = 114.$$

Устно вычислено: $256 + 104 = 360$; $360 : 4 = 90$; в строчку записано вычисление $1800 : 75 = 24$.

2) Все указанные упражнения должны проводиться сначала при изучении действий с целыми числами, затем с дробными (обыкновенными и десятичными).

3) Скобки ставятся для того, чтобы указать желаемый порядок действий, изменить тот порядок, в котором выполнялись бы действия, если бы выражение было записано без скобок. Так, например, казалось бы, нет необходимости писать скобки в выражении $(a + b) + (c + d)$, но скобки пишутся. В этом случае скобки ставятся для того, чтобы выделить одни действия из ряда других. Также в случае $a + (b + c + d) = (a + b + c) + d$ и т. п. ставятся скобки для того, чтобы выявить определенный закон.

В этом случае мы снова указываем типы примеров на буквах, но учащимся следует давать упражнения на числах.

4) Полезно выполнить упражнение на сопоставление выражений, записываемых одинаковыми цифрами, но с указанием различного порядка действий:

$$\begin{aligned} 38 - 3 \cdot 4 + 10 &= 36; & (38 - 3) \cdot 4 + 10 &= 150; \\ & & (38 - 3) \cdot (4 + 10) &= 490. \end{aligned}$$

5) В выражение могут входить различные скобки: круглые, квадратные, фигурные. Между прочим, надо следить, чтобы изображение фигурных скобок делалось учащимися правильно. В этом случае прежде выполняются действия, указанные внутренними скобками; так, например, при требовании выполнить:

$$3568 - \{987 - [412 - (105 + 220)]\} = 2668,$$

сначала выполняют сложение $105 + 220 = 325$,
затем $412 - 325 = 87$,
потом $987 - 87 = 900$,
наконец, $3568 - 900 = 2668$.

Можно также вести запись решения примера, как говорят, „цепочкой“:

$$\begin{aligned} 3568 - \{987 - [412 - 325]\} &= 3568 - \{987 - 87\} = \\ &= 3568 - 900 = 2668. \end{aligned}$$

На этом примере учащиеся убедятся в целесообразности введения различного вида скобок для ясности записи.

§ 9. Примеры для контрольной работы

- 1) Найти частное от деления:
 $811512 : 312$.
- 2) Сделать двумя способами проверку выполненного действия:
 $3885 : 37 = 105$.
- 3) Уменьшить число 21210 в 202 раза.
- 4) Разделить 7830 на 340 и указать остаток.
- 5) Выполнить деление (с остатком):
 $81225 : 58$.
- 6) Выполнить указанные действия:
 $400 + 25 \cdot (36 - 16); 30 \cdot 40 - 1000 : 8;$
 $1000000 - 3002 \cdot 215$.
- 7) Задача на все четыре действия.

Вопросы:

- 1) При делении числа на 25 получилось в частном 10 и в остатке 10. Найти число.
- 2) Дать наименование данных и результатов всех четырех действий.
- 3) Какие из четырех действий взаимно обратны? Какой признак взаимной обратности действий?
- 4) Сколько получится, если округлить:

376895	m	до	тысяч	тонн?
456249	"	"	"	"
72555	"	"	"	"
37555	"	"	"	"

- 5) Какие действия всегда выполнимы с натуральными числами?
- 6) Когда при умножении двух чисел получается 0? Когда при делении одного числа на другое получается 1?
- 7) В каких двух случаях частное равно делимому? Привести примеры.
- 8) Как записать фразу: сумму чисел 35 и 25 умножить на их разность.

9) Вычислить наиболее удобным способом (объяснить, на основании какого свойства произведения):

$$125 \cdot 27 : 25.$$

10) Велосипедист проехал 260 км за несколько часов. Какое расстояние можно проехать на автомобиле за вдвое меньшее время, если скорость автомобиля будет в 4 раза больше скорости велосипедиста?

Указание. По каждому разделу нами указаны некоторые примеры для письменной и устной контрольной работы; ими не исчерпываются все вопросы, которые изучаются учащимися в данном разделе. Учителю полезно проанализировать, какие знания и умения учитываются в предлагаемых контрольных вопросах с тем, чтобы составлять аналогичные. Если позволит время, полезно поставить дополнительно и другие вопросы, которые не вошли в предлагаемые нами работы.

Глава VII

СВОЙСТВА ЧИСЕЛ. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

§ 1. Введение. Внеклассные занятия

У нас в средней школе мало обращают внимания на понимание учащимися свойства числа, свойств целых чисел. Это происходит отчасти потому, что курс арифметики заканчивается в V классе и учитель математики в дальнейшем курсе, в числовых расчетах при решении алгебраических и геометрических задач, обычно не привлекает учащихся пользоваться свойствами чисел и не побуждает их к исследованию этих свойств.

Изучение свойств чисел имеет громадное значение для развития учащегося. Учителю арифметики следует внимательно отнестись к вопросам, связанным со свойством чисел и составом их, и во всем последующем курсе тщательно продолжать и углублять эту работу.

Вопросы, связанные с анализом свойств целых чисел, их делимостью, со всевозможными числовыми комбинациями, всегда привлекали внимание математиков и на всех ступенях человеческого знания играли большую роль. Правда, с ними были связаны многие числовые суеверия, но вместе с тем на их основе развились многие научные системы.

В нашей школе вопросы делимости чисел, нахождения наименьшего кратного и наибольшего делителя ставятся в практическом разрезе—имеют целью дать учащимся сведения, необходимые для операций с дробными числами. Мы выделяем эту главу с целью обратить внимание учителя на особую важность развития у учащихся интереса к изучению свойств чисел. Материал, изложенный в этой главе, учитель может использовать, когда найдет это нужным, и на специальных уроках при повторении и изучении целых чисел, и при изучении преобразований дробных чисел, и при повторении всего курса.

Кружковые занятия. Учитель должен перенести работу и на кружковые занятия с учащимися, которые, как мы знаем по опыту, крайне заинтересовывают учащихся. Много вопросов по изучению числа имеется в математических хрестоматиях и книжках, вполне доступных для учащихся 11—13-летнего возраста.

1. Следует заниматься этими вопросами с учащимися не только при изучении курса арифметики, но и позднее, когда знание алгебраической символики и тождественных преобразований поможет учащимся дать теоретическое обоснование многим правилам действий с числами, приемам угадывания задуманных чисел и результатов вычисления и многим другим задачам-загадкам. Например, правило быстрого возведения в квадрат числа, оканчивающегося пятью: $(10a + 5)^2 = a(a + 1) \cdot 100 + 25$, на основании которого $75^2 = 7 \cdot 8 \cdot 100 + 25 = 5625$; $9,5^2 = 9 \cdot 10 + 0,25 = 90,25$; $\left(4 \frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot 5 + 0,25 = 20,25$

и т. д.

Особенно интересуют учащихся всевозможные числовые соотношения. Например, как написать число 100 при помощи девяти цифр и знаков действий: $100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$; как написать число 100 пятью единицами, или пятью пятерками, или пятью тройками и знаками действий:

$$100 = 111 - 11; 100 = 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 33 \cdot 3 + \frac{3}{3}.$$

На занятиях математического кружка учащиеся предлагают написать числа, например 0, 2, 5 тремя цифрами 5 и знаками арифметических действий или написать все однозначные числа (иногда двузначные) только при помощи цифры 2, повторенной 5 раз, и знаков действий и др.:

$$(5-5) \cdot 5 = 0; (5-5) : 5 = 0; \frac{5+5}{5} = 2; 5+5-5=5; 5 \cdot \frac{5}{5} = 5; 5 : \frac{5}{5} = 5;$$

$$1 = 2 + 2 - 2 - \frac{2}{2}; 2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2; 3 = 2 + 2 - 2 + \frac{2}{2}; 4 = 2 \cdot 2 - 2 - 2$$

и т. д. Эти упражнения развивают сообразительность учащихся и показывают им возможность тождественных преобразований чисел¹. Предлагаются упражнения теоретического характера; например, написать несколько чисел, сумма которых больше их произведения; написать самое большое число при помощи 9 различных значащих цифр и объяснить ответ (987654321); найти наименьшее общее кратное всех однозначных чисел и т. д. Предлагаются общеизвестные занимательные задачи, также основанные на знании свойств чисел, понятиях делимости и кратности.

Рассматриваются свойства чисел, называвшихся в древности „совершенными“, которые равны сумме всех своих делителей, кроме самого себя², таковы: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; 496; 8128 и др., или „содружественных“, у которых сумма делителей одного числа равна другому, и наоборот. Таковы, например, 220 и 284 (делители 220, а именно: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$, и делители 284, а именно: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$), и др.

¹ См. „Список рекомендуемой литературы“, стр. 537.

² „Фигурные числа представляют интерес с исторической точки зрения, так как к ним относится одно из самых первых предложений аддитивной теории чисел, связанное с разбиением чисел на слагаемые определенного вида“ (И. В. Арнольд, Теория чисел, 1939, стр. 123).

Интересны числа треугольные (рис. 17) и другие фигурные числа, которые в дальнейшем учащиеся узнают как частные случаи рядов, числовых последовательностей. „Фигурные числа“, как и вся арифметика в своей основе отражают производственную деятельность человека (представление о них зародилось в IV—V веках до

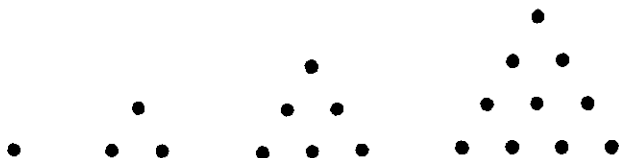


Рис. 17.

нашей эры), повидимому, строительство, когда требовалось получить из целого числа плит фигуры треугольной, квадратной и других форм со все большей длиной сторон. Много интересных зависимостей между натуральными и фигурными числами было установлено известными математиками (Диофантом¹, Ферма, Эйлером); этим числам дается геометрическое истолкование.

Треугольные числа: 1, 3, 6, 10 и т. д.

$1+2=3$; $1+2+3=6$; $1+2+3+4=10$ и т. д.

n -е треугольное число есть сумма n первых чисел натурального ряда (сумма членов арифметической прогрессии $a_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$).

Среди многих задач, предложенных Диофантом, относящихся к „теории чисел“, была задача: „Разложить данное квадратное число на 2 квадрата“. Наглядное изображение этой задачи дано египетским треугольником ($a^2 = x^2 + y^2$; $5^2 = 3^2 + 4^2$). Спустя много

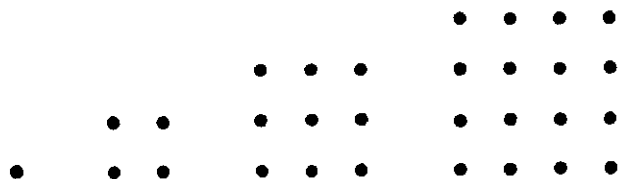


Рис. 18.

¹ Греческий математик, предп. II, III века нашей эры. Его последовательницей и комментатором была талантливейшая женщина — Гипатия (ее комментарий утерян), которую растерзала толпа христианских фанатиков — египетских монахов — на улицах Александрии в 415 году. После ее смерти и истребления Александрийской библиотеки ученые этой школы оставили Александрию и основали математическую школу в Афинах, которая была закрыта императорским декретом, запрещающим „языческое обучение“.

столетий, в XVII веке известный французский математик Ферма сделал добавление, что только вторая степень может быть в целых числах разложена на сумму двух степеней с тем же показателем (знаменитая теорема Ферма).

Числа квадратные: 1, 4, 9, 16 и т. д. (рис. 18)—полные квадраты чисел:

$1^2=1$; $2^2=4=1+3$; $3^2=9=1+3+5$; $4^2=16=1+3+5+7$ и т. д. (рис. 19); n -е число есть сумма n первых нечетных чисел.

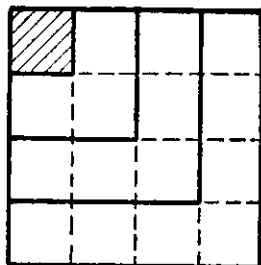


Рис. 19.

Интересны соотношения:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 + 2 &= 11 \\ 12 \cdot 9 + 3 &= 111 \\ 123 \cdot 9 + 4 &= 1111 \\ 1234 \cdot 9 + 5 &= 11111 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12345679 \cdot 9 &= 111\ 111\ 111 \\ 12345679 \cdot 18 &= 222\ 222\ 222 \\ 12345679 \cdot 27 &= 333\ 333\ 333 \end{aligned}$$

или соотношения между квадратами некоторых чисел при перестановке цифр в обратном порядке:

$$\begin{array}{llll} 12^2=144 & 13^2=169 & 102^2=10404 & 103^2=10609 \\ 21^2=441 & 31^2=961 & 201^2=40401 & 301^2=90601 \\ 112^2=12544 & 113^2=12769 & 122^2=14884 & \\ 211^2=44521 & 311^2=96721 & 221^2=48841 & \end{array}$$

Квадраты чисел, записываемых единицей:

$$\begin{aligned} 11^2=121 &= \frac{22 \cdot 22}{1+2+1} \\ 111^2=12321 &= \frac{333 \cdot 333}{1+2+3+2+1} \\ 1111^2=1234321 &= \frac{4444 \cdot 4444}{1+2+3+4+3+2+1} \end{aligned}$$

Сумма ряда нечетных чисел:

$$\begin{array}{ll} 1=1^2 & 1=1^3 \\ 1+3=2^2 & 3+5=2^3 \\ 1+3+5=3^2 & 7+9+11=3^3 \\ 1+3+5+7=4^2 & 13+15+17+19=4^3 \text{ и т. п.} \end{array}$$

Особые свойства числа 9 часто используются как для решения теоретических вопросов, так и в практических вычислениях; многие знаменитые игры „угадать число“ связаны со свойствами числа 9, которые учителю полезно показать учащимся во внеклассной работе.

Учащихся интересует составление издавна известных так называемых „магических квадратов“, в которых сумма чисел, представленных в продольных, поперечных рядах и по диагонали, одна и та же (рис. 20).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Рис. 20.

2. Полезно рассказать учащимся о знаменитых вычислителях, в частности о замечательном умении русского академика Л. Эйлера и известного математика Гаусса вести счет в уме (он мог для каждого числа в пределе первых двух тысяч указать его свойства), и обратить внимание учащихся на то, что при определенной, конечно, большой, усидчивой работе, зная свойства чисел и некоторые приемы, каждый из учащихся может научиться быстро считать, перемножать быстро в уме трехзначные числа и т. д.

3. Как выше упомянуто, свойства чисел сыграли большую роль в развитии суеверий.

Влияние числовой мистики сказалось и в древней Греции, и в Риме; у них были священные цифры, как, например, 3, 7 и „несчастное число“ 13. В Греции, в школе Пифагора (за 500 лет до н. э.) ученые, занимаясь изучением чисел и открытием их свойств и наблюдая явления природы, заметили, что движение небесных светил подчиняется числовым законам; числовым отношением выражаются длины струн, дающих гармонический аккорд. Последователи Пифагора знали арифметическую, геометрическую и музыкальную пропорции и др.

Греческая мысль сумела порвать с числовой мистикой и пошла по пути научного изучения чисел. Знаменитый Евклид в 7-й, 8-й и 9-й главах „Начал“ за 300 лет до н. э. изложил все, что до него было известно из учения о числах (в геометрической форме). Здесь и дан Евклидом известный алгоритм для нахождения общего наибольшего делителя двух чисел последовательным делением. Здесь же дано доказательство существования неограниченного ряда простых чисел. Кратко изложим это доказательство.

Пусть числа $2, 3, \dots, p$ исчерпывают ряд известных простых чисел. Если составить число $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p + 1$, то это новое число не может иметь ни одного простого делителя из числа $2, 3, \dots, p$ (так как второе слагаемое 1 не делится ни на одно из этих чисел); таким образом, это новое число или само простое число, или имеет простой делитель, больший чем p . В том и в другом случае существует простое число, большее p , что и требовалось доказать.

Для $p=3, 5, 7, 11$ получают новые простые числа: $2 \cdot 3 + 1 = 7$; $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$; для $p=13$

получается составное число $30031 = 59 \cdot 509$, т. е. содержащее множителем простые числа, большие чем 13^2 .

4. Задача установления закона распределения простых чисел не разрешена до настоящего времени. Первую попытку составить таблицу простых чисел мы имеем в общезвестном „решете Эратосфена“ (около 250 г. до нашей эры). До XVII века отбор простых чисел сводился по преимуществу к пробам.

Укажем, что небольшие таблички простых чисел так же, как „решето Эратосфена“², полезно составлять с учащимися для привлечения их внимания к вопросу о свойствах чисел.

Изучение таблицы простых чисел показало, что в ряду натуральных чисел они распределяются неравномерно; по мере удаления от начала натурального ряда простые числа встречаются в нем все реже и реже. Даже по таблице простых чисел (от 2 до 5987), помещенной в учебнике арифметики А. Киселева, учащиеся могут сосчитать, что в первом десятке 4 простых числа (40%), в первой сотне—25 простых чисел (25%), в каждой следующей сотне—соответственно 21, 16, 17, 14 и т. д. простых чисел. Если взять миллионы, то в первом миллионе 78496, в пятом миллионе—65367 простых чисел и т. д.

Издавна ученые-математики стремились найти формулу, по которой можно было бы указывать (вычислением) простые числа из ряда натуральных чисел.

Одна из таких формул, данная Евклидом, приведена выше, но, как показано, уже при $p=13$ получается составное число; так что эта формула не может служить для отыскания простых чисел. Предлагались и другие формулы для отыскания простых чисел, содержащие переменное целое число n (или p), но всегда находилось такое натуральное число n , при котором по данной формуле получалось составное число. Так, по формуле $A = n^2 - 79n + 1601$ уже при $n=80$ получается составное число $1681 = 41^2$. Выдающийся математик XVIII века член Петербургской Академии наук Леонард Эйлер (1707—1783) обнаружил ошибочность формулы, предложенной известным французским ученым Ферма. Наш русский математик-самоучка И. М. Первушин в 1883 году вычислил простое число по формуле $2^{2^n} - 1$; это простое число 19-значное. Одно из самых больших простых чисел, известных в настоящее время, равно $2^{127} - 1$; оно записывается 39 цифрами.

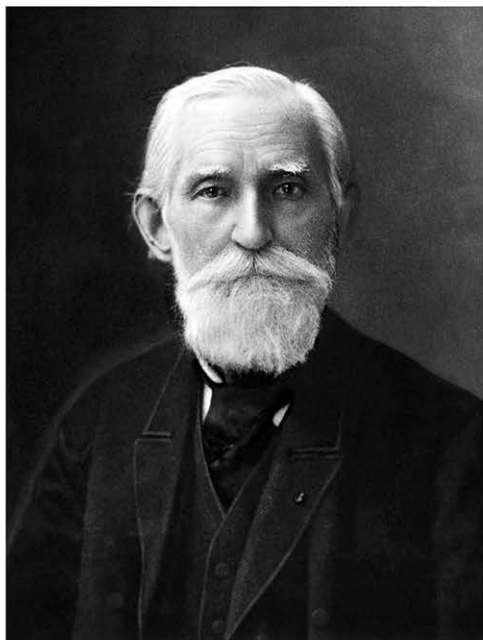
Как распределяются простые числа среди натуральных, каков закон их распределения—остается неизвестным до сих пор, хотя наиболее выдающиеся математики старались найти формулу их распределения. Громадный вклад в решение этого вопроса внес замечательный русский математик Пафнутий Львович Чебышев.

Он доказал, что между числом x и его удвоением $2x$, где x —любое натуральное число, большее 1, имеется хотя бы одно простое число. Учащиеся могут проверить это по таблице простых чисел.

¹ $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510511 = 19 \cdot 97 \cdot 277$;

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 = 9699691 = 347 \cdot 27953$ и т. д.

² Эратосфен писал числа на дощечке, покрытой воском, и так как он прокалывал дырочки над числами, которые делятся на 2, 3, 4, ..., то дощечка уподоблялась решету.



Пафнутий Львович Чебышев
(1821—1894)

П. Л. Чебышев нашел формулу, которую так долго безуспешно искали математики, для определения количества простых чисел (n), заключенных между 1 и числом, не превышающим данное число N . Формула, найденная П. Л. Чебышевым, приближенная, но точность ее очень велика. П. Л. Чебышев—создатель русской математической школы теории чисел. Представители этой школы в дореволюционное время А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, Г. Ф. Вороной и др. Многие сделали для развития теории чисел советские ученые, среди которых первое место занимает акад. Иван Матвеевич Виноградов (рожд. 1891 г.). Своими блестящими открытиями в этой области они поставили советскую математическую школу по теории чисел на первое место во всем мире.

Привлекая внимание учащихся на уроках к этим вопросам, более подробное ознакомление следует отнести ко внеклассным занятиям. На этих занятиях следует рассказать о характере работы П. Л. Чебышева, о сочетании в его работах теории и практики, о решении им многих практических задач методами математики (о зубчатых колесах, о ветряных мельницах, о кройке платьев и т. д.).

В науке теории чисел часто ставятся проблемы, кажущиеся очень примитивными: они очень просто и доступно формулируются. Но задачи эти не решаются средствами современной математики; поиски решения этих задач обогащают математическую науку,



Иван Матвеевич Виноградов

главным образом, новыми методами, которые помогают в дальнейшем развитии самой математики и расширяют возможность ее практического применения.

Одна из таких задач была поставлена в 1742 году (более 200 лет тому назад) членом Петербургской Академии наук Х. Гольдбахом. В письме к Л. Эйлеру он высказал предположение, что „всякое натуральное число, большее 5, является суммой трех простых чисел“. Л. Эйлер ответил, что для доказательства этого предложения достаточно доказать, что каждое четное число (больше двух) может быть представлено в виде суммы двух простых чисел. Конечно, не трудно убедиться, что сделанные предположения верны для небольших чисел, например: $4=2+2$; $14=3+11$; $26=3+23$; $7=2+2+3$; $19=3+5+11$; $26=7+19$ и т. д. На числах (до 9 млн.) проверена справедливость утверждения Гольдбаха—Эйлера, но безуспешно в течение двух столетий пытались ученые доказать эту теорему в общем виде, т. е. найти ее теоретическое решение. В основном решить (хотя и неполностью) эту задачу удалось советскому математику акад. И. М. Виноградову, лауреату Сталинской премии, Герою Социалистического Труда. В 1937 году он нашел общее доказательство того, что „всякое достаточно большое нечетное число (больше некоторого числа N_0) является суммой не более трех простых чисел“. Это число N_0 очень велико. Отсюда для четных чисел вытекает, что они являются суммой не более

четырёх простых чисел (но не двух). Это одно из самых блестящих достижений математической науки XX века. Таким образом, осталась недоказанной теорема Гольдбаха только для множества нечетных чисел между 9 млн. и числом N_0 (чрезвычайно большим).

Не останавливаясь далее на этих вопросах, следует указать, что та область теории чисел, в которой рассматриваются вопросы разложения чисел на слагаемые, называется аддитивной теорией чисел (в противоположность другой области—мультипликативной, в которой рассматривается разложение чисел на множители). Ей совсем не уделяется внимания в средней школе.

§ 2. Делимость суммы и произведения

Из теории вопроса.

Если a и b —два числа натурального ряда, причём $a > b$, то при делении a на b имеет место равенство $a = bq + r$, где q есть частное от деления a на b , r —остаток, $r < b$. Это равенство выражает одно из важнейших свойств целых чисел, а именно: для двух целых чисел a и b ($a > b$) в натуральном ряду чисел можно найти такое число q , при котором $a > bq$ и $a < b(q+1)$; в частном случае, когда $r=0$, $a=bq$.

В этом последнем случае говорят, что 1) число a делится на b нацело, или 2) что a кратно числу b , или 3) число b есть делитель числа a . Таким образом, вопрос о делителях данного числа сводится к вопросу о множителях, на которые разлагается данное число ($135 : 45 = 3$; $135 : 3 = 45$; $135 = 3 \cdot 45$); $a = bq$; $a : b = q$; $a : q = b$; т. е. произведение кратно каждому из своих сомножителей.

На первом уроке при выяснении понятий „делитель“, „кратное“ и в последующей работе необходимо приучать учащихся к всем трем указанным выше формулировкам. Обычно учащиеся ограничиваются употреблением только одного слова „делится“, например: „135 делится на 45“, слова же „число кратно“ (135 кратно 45) или „45 служит делителем числа 135“, как показывает опыт, выпадают из речи учащихся нашей средней школы.

Замечание. Мы не можем в данном руководстве приводить все теоремы делимости чисел, следствия и их доказательства; мы приводим лишь содержание тех теорем, которые необходимы в целях построения систематического, методически выдержанного школьного курса по данному вопросу. Соответствующее же теоретическое изложение преподаватель математики найдет в любом курсе теоретической арифметики.

Из определения кратности чисел вытекают основные положения делимости чисел:

1) если $N = a \cdot b \cdot c \dots \cdot m$, то N кратно каждому числу: a , b , c , ..., m ;

2) если a кратно b , b кратно c , то a кратно c :

$$a = mb; b = nc; a = m(n \cdot c) = (m \cdot n) \cdot c;$$

другими словами: если a кратно b , то оно кратно каждому делителю b ;

3) если числа a и b кратны c , то их сумма (и разность) кратна c , а именно: $a = mc$; $b = nc$; $a \pm b = (m \pm n)c$; положение 3) справедливо для нескольких слагаемых, и отсюда:

4) если a кратно b , $a = m \cdot b$, то число, кратное a , также кратно b :
 $k \cdot a = k \cdot m \cdot b$;

5) если сумма двух чисел кратна c и одно слагаемое кратно c , то и другое слагаемое кратно c .

По существу эти основные положения известны учащимся как ассоциативный и дистрибутивный законы умножения и их следствия. На уроке надо их напоминать учащимся и решать соответствующие упражнения.

Урок.

1. В вводном слове учитель повторяет и вновь показывает на примерах, что над натуральными числами всегда выполнимы действия сложения и умножения, но действия вычитания и деления не всегда выполнимы, другими словами: для любых двух натуральных чисел можно найти натуральное число, равное их сумме или равное их произведению, но не всегда можно найти натуральное число, равное разности двух любых натуральных чисел или частному от деления одного из них на другое, например, не существует натурального числа, равного $4-7$, или $4-4$, или $4:7$. Учащимся не затруднит самостоятельно привести пример для случая, когда действие вычитания над двумя натуральными числами невыполнимо, и указать признак выполнимости вычитания в области натуральных чисел. Учитель указывает, что не так просто, не зная, делится ли данное натуральное число на другое, например, делится ли 16783 на 9 или нет. Известны некоторые признаки, по которым, не зная, сразу можно сказать, делится ли данное натуральное число на другое, например, на 10, 100, на 2, 4, на 5, 25 и на некоторые другие натуральные числа, или нет. Узнать эти признаки — цель предстоящей работы.

Делитель.
Кратное.

1. Учащиеся употребляли термин „делитель“ при делении одного натурального числа на другое как в случае, когда деление совершается без остатка, так и в случае деления с остатком. Вводится понятие „делитель данного числа“, — это натуральное число, на которое данное натуральное число может делиться нацело, без остатка. Вопрос: „Какое из чисел: 2, 3, 5, 9 — является делителем числа 36?“ Указывается, что у данного числа 36 имеется несколько делителей. Ново для учащихся здесь то, что факти-

чески деление 36 на 3 или на 9 не производится, что только устанавливается возможность этого деления.

2. Вводится понятие „кратное данного числа“, как числа (натурального), которое может делиться на данное число без остатка (делимое): 36 кратно числам 2, 3, 9 и не кратно 5¹.

Упражнения. 1) $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$; на какие числа делится (каким числом кратно) 140? какие числа служат делителями (множителями) числа 140? Ответ: на 4, 5, 7, 20, 28, 35.

Чему равно частное в каждом из этих случаев? Ответ: 35, 28, 20, 7, 5, 4.

2) Задача. Имеется 120 руб. бумажками десятирублевого достоинства. Может ли быть выражена эта сумма точно определенным количеством бумажек пятирублевого достоинства? трехрублевого? Почему?

3) Почему, не деля сумму чисел $500 + 1200$ на 100, можно сказать, что эта сумма делится на 100? Чему равно частное?

4) Если 140 делится на 35 (кратно 35), то какие еще числа кратны 35? Сколько их?

5) Почему, не деля сумму чисел $500 + 360$, можно сказать, что она не делится на 100?

6) Может ли сумма двух чисел делиться на какое-либо число, если одно из слагаемых делится на это число, а другое не делится? Почему?

7) Почему, не деля сумму $39 + 104 + 65 + 130$ на 13, можно утверждать, что она делится на 13 и что сумма $39 + 104 + 65 + 130 + 100$ не делится на 13? Сколько раз в первой сумме содержится число 13?

После рассмотрения нескольких примеров и проведенных рассуждений учащиеся осознают, что сумма двух или нескольких слагаемых делится на данное число (кратна данному числу), если каждое слагаемое делится на это число (кратно этому числу). Другими словами: достаточно знать, что каждое слагаемое суммы делится на данное число, чтобы утверждать, что вся сумма делится на это число.

¹ Слово „кратно“ означает „раз“: 36 кратно 9, т. е. 36 содержит целое число раз число 9; „многократно“—много раз.

Было выяснено, что сумма двух слагаемых не может делиться на данное число, если одно из слагаемых делится на него, а другое не делится. Учащиеся нередко сами ставят вопрос: „Но как же $5 + 7 = 12$; 12 делится на 2, но ни 5, ни 7 не делится на 2?“ Учитель дает пояснение на конкретном примере; например, показывает, что можно купить тетради (целое число тетрадей) стоимостью по 20 коп. за тетрадь, сложив деньги двух учеников, хотя ни один из них не мог купить целое число тетрадей за свои деньги, имея, например, 54 коп. и 46 коп. ($54 + 46 = 100$). То же указывается и для случая нескольких слагаемых: $21 + 54 + 25 = (21 + 54) + 25 = 75 + 25$; сумма делится на 25, хотя каждое слагаемое не делилось на 25, и т. д.

Делаются выводы: 1) если каждое слагаемое делится на какое-либо число, то (этого достаточно) это является достаточным признаком того, что сумма делится на это число;

2) если все или некоторые из слагаемых (или оба из двух слагаемых) не делятся на какое-либо число, то их сумма в некоторых случаях делится, в других—не делится на это число;

3) если одно из двух слагаемых делится на данное число, а другое не делится, то их сумма не разделится на это число;

4) если все слагаемые, кроме одного (или сумма всех слагаемых, кроме одного), делятся на какое-либо число, а это одно слагаемое не делится на это число, то и сумма не разделится на это число.

Учащиеся должны сами приводить аналогичные простые примеры на рассмотренные случаи и постепенно усвоить необходимый и достаточный признак делимости суммы, которым и пользуются при выводе признаков делимости, а именно: если одно из двух (или нескольких) слагаемых кратно (делится) какому-либо числу, то для того, чтобы их сумма была кратна (делилась) этому числу, необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое (или сумма всех остальных слагаемых) было кратно этому же числу.

3. Признак делимости разности вытекает из определения вычитания как действия, обратного сло-

жению, и вышеуказанного признака делимости суммы двух слагаемых: $480 - 312 = x$.

Уменьшаемое и вычитаемое (418 и 312) делятся на 4; будет ли их разность x делиться на 4? $480 = 312 + x$. Одно из слагаемых (312) делится на 4, и сумма 480 делится на 4, поэтому и второе слагаемое (x) должно делиться на это число, т. е. в случае $480 - 312 = 168$, когда уменьшаемое и вычитаемое делятся на 4, и их разность ($x = 168$) должна делиться на это число: $168 : 4 = 42$. Выполняется несколько аналогичных упражнений, делается вывод.

Замечания. 1) Из того, что a и b кратны c вытекает, что $a \pm b$ кратны c ;

2) Из того, что a и b не кратны c , не вытекает, что $a \pm b$ не кратны c .

4. Из определения кратности одного числа другому следует показанное выше свойство делимости произведения.

Произведение кратно каждому своему сомножителю:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7; 42 \text{ кратно } 2, 3, 7.$$

Если один из сомножителей делится на данное число, то и все произведение делится на данное число (это достаточный признак делимости произведения): $112 = \underbrace{14 + 14 + 14 + \dots + 14}_{8 \text{ раз}} = 14 \cdot 8$.

Каждое слагаемое (14) делится на 7, сколько бы раз число 14 ни брали слагаемым, сумма разделится на 14, в данном случае 14 берется 8 раз, или произведение $14 \cdot 8 = 112$ делится на 7. ($a + \underbrace{a + a + \dots + a}_{m \text{ раз}}$

$= a \cdot m$; если один из сомножителей a делится на число b , то и произведение $a \cdot m$ делится на b .)

Надо особенное внимание обратить на этот признак делимости произведения, так как учащиеся всегда должны им пользоваться при сокращении дробных выражений; общеизвестны ошибки учащихся, когда при вычислении $\frac{9 \cdot 15}{6}$ они получают $\frac{3 \cdot 5}{2}$ (и наоборот, при вычислении $\frac{3 + 15}{6}$ получают $\frac{3 + 5}{2}$, при умножении $4a \cdot 3a \cdot 2b$ получают $12a^2 8ab$ и т. д.

Подчеркнув, что для делимости произведения достаточно, чтобы хотя бы один из сомножителей делился на это число, надо указать учащимся, что этот признак не является необходимым. Так, произведение нескольких сомножителей может делиться на данное число, хотя ни один из сомножителей не делится на данное число, например: 18 делится на 9, хотя если рассматривать $18 = 3 \cdot 6$, то ни 3, ни 6 не делятся на 9.

Надо показать учащимся, что если одно число кратно другому (делится на другое), то оно кратно каждому делителю этого другого числа. Действительно: 210 кратно 21; оно кратно и делителям числа 21, т. е. 3 и 7. Рассуждение можно проводить на определенных числах, например: $210 = 21 \cdot 10$; $21 = 3 \cdot 7$; $210 = (3 \cdot 7) \cdot 10 = 3 \cdot (7 \cdot 10)$ и т. д.

Если одно число кратно другому, то и число, кратное первому, также кратно второму. Эти положения ясны всем учащимся; если в более слабом классе учащихся затруднит формулировка, в которой употребляется термин „кратно“ (к нему надо приучать), то можно употреблять слова „делится на“ и „раз“, а именно: „если одно число делится на второе, то...“, и „несколько раз взятое первое число делится на второе“.

Замечание. Наибольшее практическое значение имеют признаки делимости, необходимые и достаточные, какими являются все общеупотребительные признаки делимости на 2, 3, 4, 5,...

Укажем, например, что необходимый и достаточный признак делимости числа на 100—присутствие двух нулей в записи числа на конце; присутствие одного нуля—условие необходимое, но недостаточное; присутствие трех нулей—достаточное, но не необходимое. Необходимый и достаточный признак делимости числа на 10—присутствие нуля на конце записи числа.

§ 3. Общий признак делимости чисел

Пусть число N изображается цифрами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, тогда

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + a_{n-2} 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

пусть различные степени десяти дают при делении на выбранного делителя d следующие остатки: r_1, r_2, \dots, r_n :

$$\begin{aligned} 10^n &= \text{крат. } d + r_n, \\ 10^{n-1} &= \text{крат. } d + r_{n-1}, \\ &\dots \\ 10 &= \text{крат. } d + r_1, \end{aligned}$$

тогда $N = \text{крат. } d + (a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0)$; введя обозначения остатка R , имеем: $N = \text{крат. } d + R$. Для того чтобы число N делилось на d без остатка (нацело), необходимо и достаточно, чтобы R , т. е. сумма произведений цифр этого числа на остатки, получаемые от деления на d соответствующих степеней десяти, делилась на d .

Частные случаи этого общего признака мы имеем в обычных формулировках признаков делимости, которые даются учащимся средней школы.

1. Пусть $d = 2$; при делении любой степени десяти на 2 остатки $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_n = 0$ и $R = a_0$, т. е. на 2 делится число, когда число единиц делится на 2.

2. Пусть $d = 3$; в этом случае остатки при делении любой степени десяти $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_n = 1$ и $R = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_0$. Имеем общезвестный признак делимости числа на 3.

3. Пусть $d = 4$; при делении на 4 степени десяти выше первой—остаток равен 0; таким образом, $R = a_1 r_1 + a_0$, отсюда правило: если число, записанное двумя последними цифрами¹, делится на 4, то и все число N делится на 4 и т. д.

4. Выведем, исходя из общего признака, признак делимости на 11 (см. далее § 11):

$$\begin{array}{ll} 10 \text{ при делении на } 11 \text{ дает в остатке } r_1 = 10 \text{ (частное } 0) & \\ 10^2 \text{ " " " " " " " } r_2 = 1 & \\ 10^3 \text{ " " " " " " " } r_3 = 10 & \\ 10^4 \text{ " " " " " " " } r_4 = 1 \text{ и т. д.} & \end{array}$$

Следовательно:

$$R = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 + a_3 \cdot 10 + \dots$$

или

$$R = a_0 + 11a_1 - a_1 + a_2 + 11a_3 - a_3 + \dots$$

$$R = \text{крат. } 11 + a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

$R = \text{крат. } 11 + (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$, можно дать запись:

$$R = \text{кратн. } 11 - [(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) + (a_0 + a_2 + a_4 + \dots)].$$

Последние две записи показывают, что число делится на 11, когда разность между суммой цифр¹, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11.

Покажем использование вышеизложенного (в § 3) на уроках арифметики при выводе признаков делимости.

¹ Правильнее сказать: „чисел, записываемых цифрами“.

§ 4. Признаки делимости чисел на 2 и на 5

Обычно учащиеся V класса знают, какое число называется „четным“, т. е. делится на 2. Урок можно провести в таком порядке: предложить ученикам по очереди сказать несколько чисел, делящихся нацело на 2, записать их на доске одно под другим. Затем сказать и также записать несколько чисел, не делящихся на 2.

Учащимся можно предложить такие вопросы: Какую цифру надо изменить в этих числах, чтобы они делились на 2? Какую цифру надо изменить в первых написанных числах, чтобы они не делились на 2? Можно ли достигнуть того же, если изменить в каждом числе цифру десятков? сотен?

Какой цифрой должно оканчиваться число, чтобы оно заведомо делилось на 2? Чтобы оно не делилось на 2? Как называется число, имеющее в конце записи одну из первых указанных цифр? из последних? Можно ли, не производя деления, узнать, делится ли данное число на 2 или нет? Делится ли число 3568 на 2 или нет? (Сказать, не производя деления.) Как узнать? Почему? Учащиеся могут дать один или другой из следующих ответов: 1) в этом числе 356 десятков; так как каждый десяток делится на 2, то все десятки (356) делятся на 2; кроме того, в этом числе 8 единиц, которые тоже делятся на 2 без остатка; поэтому все число 3568 делится на 2 без остатка; 2) тысячи, сотни, десятки данного числа порознь делятся на 2 нацело, 8 единиц этого же числа также делятся на 2 без остатка.

Второе объяснение вытекает из общего признака делимости, изложенного выше; первое же объяснение проще, оно обычно и дается для вывода признака делимости числа на 2 и на 5, а именно: число разбивается только на два слагаемых, причем одно из слагаемых состоит только из десятков (число круглое):

$$N = a \cdot 10 + b; \text{ в остальном — рассуждения те же.}$$

Объяснение признака делимости на 5 проводится аналогично объяснению признака делимости на 2 и дается вслед за ним. При объяснении исходят из того, что каждый десяток делится и на 2 и на 5:

$$10 = 2 \cdot 5$$

Например, число $4568 = 4560 + 8$ делится на 2, но не делится на 5.

Замечания. 1) Обычно в школе даются признаки делимости в иной последовательности: на 2, 4, на 5. Мы считаем полезным для учащихся усвоить ту мысль, что признаком делимости и на 2 и на 5 является делимость числа единиц на 2 и 5.

2) Полезно указать учащимся (если они сами не скажут этого признака), что числа 4682, 6084 и т. п., у которых число единиц каждого разряда—число четное, делятся на 2. (Почему?) Надо отметить, что это признак верный, достаточный, но не необходимый.

§ 5. Признаки делимости числа на 4, на 25, на 8 и на 125

До вывода признаков делимости на 4 и на 25 необходимо выяснить с учащимися следующие вопросы:

1) Когда можно по записи числа сразу сказать, что оно не делится на 4? (Когда число не четное.) Выясняется на примерах.

2) Достаточно ли того, что двузначное число четное, чтобы оно делилось на 4? Учащиеся пишут на доске примеры, из которых ясно, что этого признака не достаточно (70; 22; 54; 46; 18 и т. д.). Учитель следит за тем, чтобы на доске оказались записанные числа, в записи которых последние цифры обозначают различные четные числа и 0, как приведено выше.

3) Какие числа, состоящие только из десятков, делятся на 4? (20, 40, 80, т. е. четное число десятков, делится на 4.)

4. Написать числа, оканчивающиеся на 4 и делящиеся на 4; затем оканчивающиеся на 8 и делящиеся на 4. Ясно, что это будут числа, у которых четное число десятков (единицы 4 и 8 делятся на 4). Выяснив этот признак, надо приучить учащихся быстро писать двузначные числа, делящиеся на 4 и оканчивающиеся на 4 и на 8; например: 44, 68, 24, 84 и т. д.

5) Написать числа, оканчивающиеся на 2, затем на 6 и делящиеся на 4.

Ясно, что число десятков в этих числах должно быть нечетное:

$$32 = 20 + 10 + 2$$

(От 10 при делении на 4 остаются 2 единицы.)

$$72 = 60 + 10 + 2$$

$$56 = 40 + 10 + 6$$

Итак, а) по виду двузначного числа учащиеся определяют, делится ли оно на 4; б) пишут двузначные числа, делящиеся на 4.

Затем в таком же порядке устанавливается, какие двузначные числа делятся на 25.

Проверяется, что сотня делится на 4 и на 25 ($100 = 4 \cdot 25$), что каждая тысяча и т. д. делится без остатка на 4 и на 25.

Вывод признака делимости на 4 и на 25. Снова могут быть даны ученикам два объяснения. Почему, например, число 543716 делится на 4 и не делится на 25. Дается первое объяснение: сотни, десятки и единицы тысяч (II класса) и сотни (I класса) заведомо делятся на 4; потому условием делимости всего числа на 4 и на 25 будет делимость числа, обозначенного последними двумя цифрами.

Или дается второе объяснение: 5437 сотен делятся на 4 и на 25; дальнейшее рассуждение приводит к тому же признаку. Второе объяснение обычно дается в учебнике в виде (не для учащегося):

$$N = a \cdot 100 + (b \cdot 10 + c); \quad 5437 = 54 \cdot 100 + 37.$$

Укажем, что на основании общего признака делимости можно дать и иной признак делимости на 4, а именно: так как от каждого десятка при делении на 4 остаются неразделенными 2 единицы, то на 4 делится число в том случае, если удвоенное число его десятков вместе с числом единиц составляет число, делящееся на 4.

Признаки делимости на 8 (и на 125) практического значения не имеют, так как проще непосредственным делением установить делимость числа на 8, чем пользоваться общеизвестным признаком. Выяснить его можно в порядке внеклассной работы на основании того, что $1000 = 8 \cdot 125$, и число можно представить в виде:

$$N = a \cdot 1000 + (b \cdot 100 + c \cdot 10 + d).$$

Вывод. Проработав с учащимися основные указанные признаки делимости, надо проанализировать метод, которым они выводили признаки делимости; для этого на доске может быть примерно такая запись:

$$\begin{array}{l} \text{Для признака делимости на 2 и на 5: } 3658 = 3650 + 8 \\ \text{ " " " " 4 " " 25: } 3658 = 3600 + 58 \\ \text{ " " " " 8 " " 125: } 3658 = 3000 + 658, \end{array}$$

т. е.

1) всякое число рассматривалось как сумма двух слагаемых, из которых одно заведомо делилось на одно из чисел: 2, 4, 8, 5, 25, 125;

2) если при этом второе слагаемое делилось на одно из чисел: 2, 4, 8, 5, 25, 125, то и сумма делилась на это число;

3) если при этом второе слагаемое не делилось на одно из указанных чисел, то сумма (все число) не делилась на него.

Признак делимости на 10. Выше мы не выделили признака делимости на 10 и степень десяти, так как этот вопрос рассматривается в главе о делении. Если исходить из общей теории признаков делимости, то можно прийти к тому же признаку делимости какого-нибудь числа на 10^m , а именно: наличие в записи этого числа m нулей. Нелишне указать это снова учащимся на примерах.

§ 6. Признаки делимости чисел на 9 и на 3

Решаются, как всегда, с учащимися несколько предварительных упражнений.

Упражнения. 1) Какие числа, состоящие из десятков, из сотен, делятся на 3? (30, 60, 90, 300, 600, 900; также 3000, 6000, 9000 и т. д.) Какие из них делятся на 9?

2) Какие однозначные числа заведомо делятся на 3? (3, 6, 9) Какие двузначные числа делятся заведомо на 3? (33, 36, 39, 63, 66, 69, 93, 96, 99.) Какие из них делятся на 9?

3) Пишутся числа 53, 62, 79 и т. п., которые не делятся на 3; в этом случае одна из цифр показывает число, заведомо делящееся на 3, а другая—

нет. Аналогично для числа 9 пишут числа 95, 49 и т. п., не делящиеся на 9.

4) Какие двузначные числа делятся на 9 (по таблице умножения)? Есть ли среди них числа, не делящиеся на 3?

5) Могут ли быть числа, делящиеся на 9 и не делящиеся на 3? Наоборот? Привести примеры.

6) Какой остаток дают разрядные единицы при делении на 9? при делении на 3?

$10 = 9 + 1$; $100 = 99 + 1$; $1000 = 999 + 1$, причем 9, 99, 999, ... делятся и на 3, и на 9.

Вывод правила лучше дать сначала для делимости чисел на 9 (по общему признаку делимости).

7) Делится ли 7524 на 9? $7524 = 7000 + 500 + 20 + 4$. От каждой тысячи после деления остается одна единица; всего после деления тысяч останется 7 единиц; 5 единиц останется после деления сотен и т. д., т. е. остаток выразится числом $7 + 5 + 2 + 4 = 18$; 18 делится на 9 без остатка, значит, и 7524 делится на 9.

8) После этого можно дать обычную формулировку признака делимости на 3.

Замечания. 1) Не следует жалеть времени на рассуждения, аналогичные указанным, и не следует переходить сразу к формулировке признака делимости на 3 и на 9. Только на упражнениях, подобных указанным, учащийся учится обосновывать свои выводы, вдумываться в формулируемый им признак делимости.

2) Учащийся не должен применять правило для того, чтобы ответить на вопрос, делится ли число 36093 на 3 или нет (частный случай). Он видит, что во всех разрядах даны числа, делящиеся на 3. Так же надо сразу оценить без применения правила, что число 360793 не делится на 3.

3) При определении, делится ли, например, число 345687 на 3, нет необходимости складывать все цифры. Ясно, что тройки, шестерки, девятки можно откинуть при отыскании суммы цифр; следует также откинуть $4 + 5$, как сумму, делящуюся на 3, и т. д.

4) Так же надо, не составляя суммы цифр, сразу оценивать, делятся ли числа 910827, 910826 и т. п. на 9.

5) Подчеркивается, что число, делящееся на 9, непременно делится на 3.

6) Разъясняется учащимся выражение „сумма цифр“ и его условность (цифры складывать нельзя), в действительности в полной формулировке эти слова означают: „Сумма всех единиц чисел, записанных цифрами данного числа, порознь взятыми“.

Упражнения, которые полезно выполнить дополнительно

1) Самостоятельно подбирать двузначные числа, делящиеся на 4, 25, 9 и т. п.

2) Изменять в записанных числах цифры (в середине или в конце записи) так, чтобы после изменения цифры число делилось на 4, 5, 9, 25 и т. д.

3) Подбирать трехзначные или четырехзначные числа, одновременно делящиеся на 3 и на 5 (на 15), на 4 и 3 (на 12), на 9 и 5 (на 45) и т. д., а также делящиеся на 3, но не делящиеся на 5, и т. п.

§ 7. Числа простые (первоначальные) и составные

Теория простых чисел не может быть изложена учащимся V класса; соответствующие положения даются учащимся без доказательства, при очень небольшой затрате времени на эту работу.

Укажем примерную последовательность рассматриваемых вопросов.

1. Исходя из изученных учащимися признаков делимости, рассматриваются некоторые числа, например: 19, 26, 37, 41, 94, 125, 141 и т. д., устанавливается, какие из этих чисел и на какие числа делятся, и дается определение простого (первоначального) числа и составного. Формулируются признаки простого и составного числа, а именно: простое число имеет только два делителя: единицу и самого себя; составное число имеет больше двух делителей; число 1 не причисляется ни к простым, ни к составным числам (оно имеет только один делитель — единицу).

2. Учащимся не дается доказательства теоремы о том, что ряд простых чисел безграничен (доказательство, данное Евклидом, приведено выше), но выполняются следующие упражнения:

1) Написать все простые числа первой сотни: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97; или выписать все простые числа, заключающиеся между данными двумя числами первой сотни. Здесь же можно указать „решето Эратосфена“ как наглядный прием для отбора первоначальных чисел: в натуральном ряде чисел вычеркивают числа, делящиеся на 2 (кроме числа 2), затем на 3 (кроме числа 3), на 5 и т. д. Таким образом устраняются составные числа: оставшиеся незачеркнутыми числа составят ряд простых чисел. Надо создать у учащихся привычку пользоваться таблицей простых чисел, имеющейся и в учебнике, и в задачнике по арифметике.

При массовом обследовании были поставлены учащимся следующие упражнения: „напишите все простые числа от 20 до 60“, „от 30 до 60“, „подчеркните простые числа из чисел 21, 87, 53, 81, 67, 141“, затем тот же вопрос для чисел: 43, 65, 38, 79, 93, 231. Выяснилось, что в большинстве случаев учащиеся считают простыми числами 39, 49, 51, 57, не считают простыми числами 47, 59, 31, подчеркивают как простые числа 87, 81 и 141 и даже числа 21 и 93, 231; также в большинстве случаев не подчеркивают, не принимают за простые числа 53, 67, 43 и 79.

Кроме того, немало отдельных случаев, когда учащиеся пишут нечетное число в ответ на требование написать простое число. Все эти ошибки показывают, что на эти вопросы не обращается при обучении достаточно внимания.

2) Отбираются при помощи проб или по таблице трехзначные простые числа (например, от 100 до 150) и обращается при этом внимание учащихся на то, что имеются и трех- и четырех- и многозначные числа простые¹, например: 269, 431, 563, 641, 877, 2311 и др.

Определять, является ли данное число простым или составным, как сказано, учащиеся будут испытанием, т. е. непосредственным делением на все простые числа, меньшие данного числа, при этом: а) про-

¹ Учащиеся иногда думают, что многозначное число обязательно делится на какое-либо число.

бовать делить следует только нечетные числа, так как четное число, кроме 2, не может быть простым; б) делить следует только на простые числа (если число, например, делится на 7, то этим оно определяется как составное, если же оно не делится на 7, то незачем пробовать делить его на 14, 21, 28, 35 и т. д.). Испытания, есть ли данное число простое или нет, надо продолжать только до тех пор, пока в частном не получится число, меньшее делителя. Например, пусть надо определить, простое или составное число 139. Оно не делится на 2, 3, 5; попробуем делить на 7; убеждаемся, что 139 не делится нацело на семь; на 11 не делится (в частном получается 12 и остается остаток); на 13 это число не делится, но в частном получается уже число, меньшее 13 (частное 10 и остаток 9). Ясно, что испытание можно прекратить: число 139—простое¹.

Надо показать учащимся, как трудно разрешить для многозначного числа вопрос, представляет ли оно собой простое или составное число в том случае, когда среди его сомножителей нет сомножителей 2, 3, 5 и т. д. Действительно, о семизначном числе 1357968 или 4568795 сразу можно сказать, что оно составное; но что сказать о трехзначном числе 481? простое оно или составное (оно делится на 13 и 37)? или о числе 779 (оно делится на 19 и 41)? или о числе 2431 (делится на 11, 13, 17)? или—5561 (делится на 67 и 83)? и т. п.

Учитель подбирает эти упражнения путем перемножения желательных множителей из ряда простых чисел и предлагает учащимся решить обратную задачу—отыскать простые (первоначальные) множители этого числа.

§ 8. Разложение чисел на простые множители.

Показатель степени

1. Выясняется на примерах вопрос, что значит разложить число на множители (представить его в виде произведения) и на слагаемые. Примеры:

¹ Число будет простое (первоначальное), если оно не делится ни на одно из простых чисел, квадраты которых меньше данного числа.

$6 = 2 \cdot 3$; $9 = 3 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; а также $6 = 2 + 2 + 2$; $9 = 3 + 3 + 3$; $10 = 2 + 3 + 5 = 3 + 3 + 4$ и т. д. Противопоставляется понятие „представить в виде произведения“ понятию „представить в виде суммы“. Работа эта очень важна, так как обычно четкости в этом вопросе нет, что сказывается в дальнейшем при изучении алгебры. Указывается, что на слагаемые можно разложить различными способами и простые, и составные числа, например: $7 = 3 + 4 = 5 + 2$; $12 = 9 + 3 = 10 + 2 = 11 + 1$ и т. д., а на множители, отличные от единицы и не равные самому числу (т. е. исключая, например, разложения $7 = 1 \cdot 7$), раскладываются только составные числа.

2. Выполняется разложение составных чисел на множители, например: $24 = 6 \cdot 4$, здесь оба множителя—составные числа; иногда в примере один из полученных множителей может быть составным числом, иногда все полученные множители—числа простые.

Полученные составные множители вновь разлагают на множители и записывают: $24 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$.

Этот же прием применяется и к числам трехзначным и вообще многозначным.

Выполняются с учащимися устно упражнения в разложении на множители двухзначных чисел (по таблице умножения) и некоторых трехзначных чисел: 18, 24, 28, 32, 36 и т. д., 110, 124, 250 и т. п.

Пусть надо разложить на множители $720 = 360 \cdot 2 = 36 \cdot 10 \cdot 2 = 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Разлагая одно и то же число на множители различными способами (в этом вопросе надо возможно более поощрять инициативу учащихся), учащиеся приходят к заключению, что всякое число допускает единственное разложение на первоначальные множители по составу их (порядок их может быть различен). На это положение должно быть обращено внимание учащихся, хотя доказательство его и не дается учащимся V класса.

Упражнения. 1) Дано: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Назвать все делители числа 36. Обычно учащиеся отвечают: 2, 4, 3, 6, только затем некоторые добавляют: 9, 12 и 18 и очень редко называют число 36. Полезно по-

казать, как находят все делители данного числа, не пропустив ни одного из них. Например: $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Делителями числа 36 являются простые числа 2, 3 и составные числа 4, 6, 9, 12, 18, 36, которые получаются перемножением простых делителей числа 36, взятых сначала по 2, затем по 3 множителя и т. д. ($2 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 3$; $2 \cdot 2 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 3$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$).

Когда число состоит из 5—6 множителей, нет необходимости перечислять обязательно все делители данного числа.

При этом учащиеся убеждаются, что делители числа 36—числа как простые, так и составные и что составные делители состоят из тех простых множителей, которые входят в состав числа 36, и только из них; и обратно, если в числе 36 два раза содержится простой множитель 3, то не может у числа 36 быть такой делитель, который содержал бы множитель 3 больше чем 2 раза. Выяснение этих вопросов крайне важно для нахождения общих делителей чисел и проводится на нескольких примерах. Постоянно при разложении чисел на множители надо приучать учащихся термин „делитель“ заменять термином „множитель“ и понимать, что это термины относятся к равнозначимым понятиям.

2) Даны числа 5, 6. Назвать числа, кратные 5, 6.

Ответ. 5, 10, 15 и т. д.; 6, 12, 18 и т. д. Устанавливается наличие бесконечного множества чисел, кратных данным числам.

3) Как можно назвать число 8 по отношению к числу 8—делителем или кратным его? Ответ. Каждое из них и делитель, и кратное другого.

4) Дано: $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Чему равен наименьший делитель числа 20? наибольший? Чему равен наименьший делитель для каждого из чисел 7, 8, 25, 160; для любого числа? Чему равен его наибольший делитель? Чему равно наименьшее кратное каждого из тех же чисел? любого числа? Можно ли назвать наибольшее кратное какого-либо числа?

Часто эти вопросы неясны учащимся. Выяснение понятий: „наименьшие, наибольшие делитель и кратное“ крайне важно для того, чтобы научить учащихся сознательно находить наибольший общий де-

литель и наименьшее общее кратное, и для того, чтобы не допустить смешивания этих понятий.

5) Из каких простых множителей состоит число, записанное единицей с несколькими (последующими) нулями? При рассмотрении этого вопроса вводят понятие показателя степени, а затем записывают разложение нескольких уже записанных на доске примеров (для этого на доске должна быть сохранена запись выполненного разложения нескольких чисел) при помощи показателей степени. Мы считаем необходимым предупредить преподавателей математики от увлечения в использовании показателя степени при разложении числа на простые множители. Прежде всего вводится новый вопрос о показателе степени, обозначающем определенную операцию, вопрос, который ничего общего не имеет с изучаемыми вопросами о нахождении делителей числа и его кратного, вводится новый отвлекающий внимание учащихся вопрос, который обязательно следует выяснить со всей тщательностью, иначе и основной вопрос — разложение на множители — не будет понят, если учащиеся, как это часто бывает, запись 3^2 понимают как $3 \cdot 2$, а 2^3 — как $2 \cdot 3$. Поэтому мы в нашей практике в начале изучения вопроса о разложении числа на множители, нахождении общих множителей чисел и тому подобных вопросов обозначений с показателями степени не вводим.

6) Последним вопросом в ряду указываемых упражнений по разложению числа на простые множители можно ставить вопрос о выработке навыка в определенном расположении вычислений.

В процессе предыдущих упражнений учащиеся могли вести запись:

$$180 = 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

или

$$180 = 18 \cdot 10 = 2 \cdot 9 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$240 = 24 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Таким путем они могут выполнять и разложение на множители четырехзначных и любых многозначных чисел, но в этих случаях лучше разложение записывать (для удобства) в столбец:

3240	10	$3240 = 10 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 9 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
324	4	или для наиболее подготовленных учащихся: $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$.
81	9	
9	9	

Некоторые методисты предпочитают выполнять разложение на множители, испытывая по порядку первоначальные множители 2, 3, 5, 7 и т. д., а именно:

1260	2	В этом случае иногда запись в столбец очень длинна, и особой необходимости в ней нет.
630	2	
315	3	
105	3	
35	5	
7	7	
1		

Показатель степени¹. Простейшие упражнения с показателем степени:

1) Прочитать, записать подробно и вычислить: 2^2 ; 3^2 ; 2^3 ; 3^3 ; $2^2 \cdot 3$; $2^2 \cdot 5$; $2 \cdot 3^2$; $3^2 \cdot 4$; $2^2 \cdot 3^2$; $2 \cdot 3^3$; $5 \cdot 3^2$; 2^4 ; 3^4 и др.

Почему вторая степень числа называется „квадратом“, третья степень называется „кубом“ числа?

2) Прочитать: $10 = 2 \cdot 5$; $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$;
 $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$;
 $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$; $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$; $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$
и др.

§ 9. Общий делитель чисел. Наибольший общий делитель (НОД)²

Уже было сказано, что в рассматриваемом разделе учащимся приходится знакомиться со многими новыми понятиями. Понятие „делитель“ и его опре-

¹ Показатель степени—число натуральное, отличное от 1,—показывает, сколько раз число надо взять сомножителем ($3^2 = 3 \cdot 3$ —это значит: число 3 два раза взято сомножителем), но не означает, сколько раз число надо помножить само на себя (например, $3^2 = = 3 \cdot 3$ —умножить надо только один раз).

² НОД—сокращенная запись термина (наибольший общий делитель).

деление уже известны учащимся. Теперь они должны освоить понятия „общий делитель“ и „наибольший общий делитель“.

Прежде чем переходить к вопросу о нахождении наибольшего общего делителя чисел, необходимо убедиться, что всему классу понятно, что такое общий делитель чисел, что у чисел может быть несколько общих делителей; что может быть и наименьший общий делитель, и наибольший общий делитель. Даны числа 120, 180, 210. Ставится вопрос о простых делителях каждого из этих чисел: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$; $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

В записи подчеркиваются первоначальные (простые) общие делители: 2, 3, 5.

Какой наименьший общий делитель у этих чисел? В данном случае учащиеся могут ответить: число 2. Следует указать, что все числа имеют делителем 1, и наименьшим общим делителем всех чисел служит 1; в данном случае спрашивается о наименьшем общем делителе данных чисел, отличном от 1. Какой наибольший общий делитель этих чисел (простой)? Ответ: 5. Полезно проделать такое упражнение: брать произведения двух, трех (подчеркнутых) общих делителей данных чисел и таким способом выявить, что данные числа имеют общими делителями следующие составные числа: $2 \cdot 3 = 6$; $2 \cdot 5 = 10$; $3 \cdot 5 = 15$; $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Какой из них наибольший общий делитель? Как он получен? Проделав несколько подобных упражнений, учащиеся поймут имеющееся в учебнике определение наибольшего общего делителя данных чисел и способ его нахождения путем перемножения общих простых делителей этих чисел. Так, для чисел 120, 180, 210 общие простые делители 2, 3, 5, поэтому $\text{НОД}(120, 180, 210) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Запись:

$$\begin{aligned} 180 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 540 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 630 &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\text{НОД}(180, 540, 630) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90.$$

В дальнейшем при нахождении наибольшего общего делителя чисел (сначала двух, а затем трех и более чисел) выясняется (и проверяется), что частные, получающиеся от деления данных чисел на их наибольший общий делитель, — числа взаимно простые.

В некоторых случаях, зная свойства чисел, учащиеся сразу могут указать (устно) их наибольший общий делитель. Например, наибольший общий делитель трех чисел: 300, 500, 700 — есть число 100; наибольший общий делитель чисел 150, 300, 450 есть число 150. В частности, к этому следует приучать учащихся в том случае, когда одно из данных чисел есть их наибольший общий делитель, как во втором из приведенных примеров.

На примерах выясняется, что: 1) наибольший общий делитель нескольких чисел не может быть больше меньшего из данных чисел и 2) что всякий общий делитель данных чисел есть делитель их НОД.

На примерах устанавливается существование двух чисел, не имеющих других общих делителей, кроме 1, т. е. чисел, НОД которых равен 1; например, 5 и 7.

Дается определение двух взаимно простых чисел. При этом на примерах тщательно выясняется, что числа взаимно простые не обязательно должны быть простыми; например, числа 25 и 12 взаимно простые, но каждое из них — число составное; числа 10 и 19 — взаимно простые, но одно из них составное. Вопрос нахождения НОД не имеет большого практического значения в школе; им редко пользуются при сокращении дробей, но впоследствии надо показать учащимся, что последовательное деление числителя и знаменателя на общие первоначальные множители при сокращении дроби требует много времени, что лучше сокращать на любые общие множители, что можно сразу делить на наибольший общий делитель числителя и знаменателя дроби, когда он легко находится, и тем самым после сокращения получить сразу дробь, у которой числитель и знаменатель — числа, не имеющие других общих множителей, кроме 1 (дробь несократимая).

Замечание. Иногда употребляют выражение „взаимно простые числа“ и по отношению к нескольким числам, например 3, 5, 7, в том случае, когда их НОД равен 1. Взаимно простыми числами называют и числа 4, 5, 9, 10, 12, 13, хотя некоторые из них числа составные.

Признак делимости на составное число. Вопрос о признаке делимости числа на число составное не может быть обоснован для учащихся данного возраста. Рассматриваются только отдельные случаи, как, например, признак делимости на $6 = 2 \cdot 3$, на $15 = 3 \cdot 5$ (иногда на $14 = 2 \cdot 7$). Исходят при объяснении из того, что если число, например 114, делится на 2 и на 3, то оно делится и на их произведение; если число 225 делится на 3 и на 5, то оно делится и на их произведение. Проверяют на примерах. Надо указать учащимся, что если число делится, например, на 6 и на 3, то оно не обязательно должно делиться на 18, как, например, числа 12, 24 и др.; что на 18 делятся только те числа, которые делятся на 2 и на 9—на взаимно простые множители числа 18¹.

На 12 делятся числа, которые делятся на 3 и на 4; на 24 делятся числа, которые делятся на 3 и на 8, и т. д.

§ 10. Общее кратное чисел. Наименьшее общее кратное (НОК)²

Проведение указанных выше предварительных упражнений для усвоения учащимися понятий и терминов „кратное“, „делитель“, четкая постановка каждого отдельного из указанных упражнений могут не допустить того смещения понятий „кратное“, „делитель“, „найти общее кратное“, „найти общий делитель“, которое выявляется при проведении проверочных работ.

Начинают с решения примеров в тех случаях, когда 1) отыскивается НОК взаимно простых чисел

¹ Если число a делится на два числа b и c , причем b и c —числа взаимно простые, то a делится на произведение bc .

² НОК—сокращенная запись термина „наименьшее общее кратное“.

и 2) отыскивается НОК чисел, из которых одно делится на все остальные числа.

Упражнения. 1) Даны два числа: 5 и 7. Какое число делится (кратно) и на 5 и на 7? Это число называют общим кратным для чисел 5 и 7. Нет ли еще чисел, делящихся и на 5 и на 7? Назвать некоторые из них.

2) Даны два числа: 3 и 4. Написать числа, кратные каждому из них:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, ...
4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

Выбрать из них числа, общие кратные чисел 3 и 4. Назвать числа, кратные 3 и 4, кроме 12 и 24. Какое из всех названных общих кратных—наименьшее общее кратное? Сколько можно назвать общих кратных для этих двух чисел? Сколько можно назвать наименьших общих кратных?

3) Какое число будет общее кратное для чисел 6, 12, 36? Какое будет наименьшее общее кратное?

4) Какое число будет наименьшее общее кратное чисел 7 и 3? 9 и 8? и т. д. Назвать и другие числа, одновременно кратные 7 и 3, 9 и 8. Как находится НОК в этом случае? в предыдущем случае? в третьем упражнении?

5) Назвать несколько общих кратных чисел 2, 3, 4; назвать наименьшее общее кратное этих чисел. Почему в этом случае достаточно искать НОК только для чисел 3 и 4? (Потому что число, делящееся на 4, будет делиться и на 2.) Почему мы не ставим себе задачи найти наибольшее общее кратное для этих чисел?

Замечание. Целесообразно начинать вопрос нахождения НОК с частного приема, изложенного выше. Но так как имеется опасность, что учащиеся, узнав этот прием, будут пользоваться им и в случае не взаимно простых чисел, т. е. будут находить общее кратное чисел, вместо НОК, то учитель должен тщательно выяснить на примерах хотя бы для двузначных не взаимно простых чисел, что их произведение не будет их НОК и что использование общего кратного чисел вместо НОК нерационально, так как значительно усложняет вычисления.

б) Вопрос о нахождении наименьшего общего кратного чисел путем разложения их на множители выясняется с учащимися следующим образом. Надо найти число, кратное 72 и 108, т. е. надо найти число, в состав которого входят все множители чисел 72 и 108. Конечно, этим числом будет произведение $72 \cdot 108$. Но мы хотим найти НОК, для этого не надо брать общие (повторяющиеся) множители обоих чисел. Разложим данные числа на множители, выпишем все множители числа 108 (это удобнее, так как у числа 108 больше множителей, чем у числа 72), а именно: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, и добавим тот множитель 2, который еще дополнительно имеется в числе 72 (без чего найденное число не разделится на 72):

$$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{НОК}(72, 108) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 216.$$

Число 216 делится на 72, так как оно содержит все его множители; по той же причине 216 делится на 108.

Указанным приемом на многих примерах выясняется следующее: для того чтобы число было общим кратным двух чисел (или нескольких), необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все простые множители всех данных чисел.

Полезно здесь же поставить следующий вопрос: если разделить найденное наименьшее общее кратное 216 на данное число, например на 72, то какое получится частное? И учащиеся привыкают не только делением, но и сопоставлением состава чисел 72 и 216 отвечать на поставленный вопрос (72 надо умножить на недостающий множитель 3^1 , чтобы получить 216; 216 надо разделить на 3, чтобы получить 72). Это упражнение облегчит и работу по приведению дробей к общему знаменателю.

7) Общее правило нахождения наименьшего общего кратного двух (и нескольких) чисел дается согласно учебнику. Полезно приучить учащихся сна-

¹ В общем случае недостающих множителей может быть несколько.

чала выписывать множители того числа, в котором их больше, например:

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	Недостающие сомножители:
$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 2 \cdot 3$
$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$	7
$315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 3$
	$2 \cdot 2 \cdot 2$
$\text{НОК} (210, 360, 140, 315) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$	

Пришлось приписать ко множителям числа 360 только один недостающий множитель 7, и легко было сосчитать НОК всех чисел, как только $360 \cdot 7 = 2520$.

Нахождение недостающих сомножителей — полезное упражнение, но не обязательное каждый раз при нахождении НОК чисел.

Полезно показать учащимся и другую запись при нахождении НОК:

210	360	140	315	2	
105	180	70	315	2	
105	90	35	315	2	
105	45	35	315	3	НОК (210, 360, 140, 315) = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 =$ $= 2520.$
35	15	35	105	3	
35	5	35	35	5	
7	1	7	7	7	
1	1	1	1	1	

Указание. Выясняем, входит ли в состав какого-либо из данных чисел множитель 2, и если входит, то сколько раз. Делением на два убеждаемся, что множитель 2 входит три раза в одно из данных чисел (360), значит, в общее кратное данных чисел множитель 2 должен войти не менее трех раз; поскольку мы ищем НОК данных чисел, то одним из его множителей достаточно взять 2^3 ; аналогично поступаем по отношению к остальным множителям.

8) В учебниках арифметики обычно даются 3 случая нахождения НОК:

а) данные числа — взаимно простые (НОК находится как их произведение);

б) одно из данных чисел кратно остальным (служит НОК);

в) общий случай.

Первые два случая рассмотрены нами выше, но должны быть повторены на основании общего правила нахождения НОК. Иначе у учеников может создаться превратное представление, что это особые случаи, а не частные примеры общего случая нахождения НОК, ускоряющие его нахождение.

Одним из основных вопросов теории делимости чисел является алгоритм¹ Евклида нахождения общего наибольшего делителя чисел, или нахождение НОД способом последовательного деления. Этот вопрос подробно рассматривается в любом курсе теоретической арифметики, здесь же мы изложим только практическое его проведение на занятиях с учащимися (в кружковой работе).²

1) Найти наибольший общий делитель чисел 216 и 126.

Делим 216 на 126. Если бы деление совершалось без остатка, то 126 было бы НОД данных чисел (НОД не может быть больше 126), но $216 = 126 \cdot 1 + 90$; значит, 126 не есть искомый НОД. Но $216 - 126 \cdot 1 = 90$, разность 90 должна делиться на все делители чисел 216 и $126 \cdot 1$; т. е. и на их НОД, значит, НОД этих чисел не может быть больше 90, и НОД чисел 216, 126, 90 можно искать как НОД меньшего числа 126 и этого остатка 90. Делим меньшее число 126 на 90; $126 = 90 \cdot 1 + 36$. Рассуждая, как выше показано, видим, что 90 не есть искомый НОД и что искомый НОД чисел 126 и 90 должен делить и число 36 (не может быть больше его). Ищем НОД чисел 90 и 36. Делим число 90 (первый остаток) на 36, получаем: $90 = 36 \cdot 2 + 18$; 36 не есть искомый НОД, но $90 - 36 \cdot 2 = 18$; в этом равенстве уменьшаемое 90 и вычитаемое $36 \cdot 2$ должны делиться на искомый НОД, значит, искомый НОД не может превышать числа 18 (второго остатка) и его можно искать как НОД чисел 36 и 18; $36 = 18 \cdot 2 + 0$.

Запись:

$$216 = 126 \cdot 1 + 90$$

$$126 = 90 \cdot 1 + 36$$

$$90 = 36 \cdot 2 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2 + 0$$

$$216 = 18 \cdot 7 + 18 \cdot 5 = 18 \cdot 12$$

$$126 = 18 \cdot 5 + 18 \cdot 2 = 18 \cdot 7$$

$$90 = 18 \cdot 4 + 18 \cdot 5$$

$$36 = 18 \cdot 2$$

Наибольший общий делитель 216 и 126 равен числу 18. В числе 216 НОД содержится 12 раз, в числе 126—7 раз.

¹ Алгоритмом в средние века называлось правило, по которому выполнялось то или иное из четырех арифметических действий по десятичной системе счисления. Такие правила в IX веке были даны известным хорезмским математиком Мухаммедом ал-Хорезми, от имени которого и произошел термин „алгоритм“. В настоящее время под алгоритмом (или алгоритмом) понимается всякий арифметический (или алгебраический) процесс, который выполняется на основании строго определенного правила, когда порядок вычислений трудно выразить формулой.

² Нахождение НОД способом последовательного деления обычно рассматривается в VIII классе при нахождении общей меры отрезков.

Этот способ нахождения наибольшего общего делителя двух чисел называется способом последовательного деления. Обычно запись ведется так:

$$\begin{array}{r|l}
 216 & 126 \\
 \hline
 126 & 90 \\
 \hline
 90 & 36 \\
 \hline
 36 & 18 \\
 \hline
 18 & 2 \\
 \hline
 0 & 2
 \end{array}$$

или:

	1	1	2	2
216	126	90	36	18
90	36	18	0	

Найти наибольший общий делитель чисел 35, 29; числа 35 и 29—взаимно простые.

$$\begin{aligned}
 35 &= 29 \cdot 1 + 6 \\
 29 &= 6 \cdot 4 + 5 \\
 6 &= 5 \cdot 1 + 1 \\
 5 &= 1 \cdot 5 + 0
 \end{aligned}$$

Для того чтобы найти НОД двух чисел способом „последовательного деления“, надо большее из данных чисел разделить на меньшее. Если остаток равен 0, то меньшее число и будет искомым НОД. Если остаток от деления большего числа на меньшее не равен 0, то надо разделить меньшее число на первый остаток, первый остаток на второй, второй—на третий и т. д. до тех пор, пока не получится остаток, равный 0. Тогда последний делитель (т. е. последний не равный нулю остаток) будет НОД данных чисел.

Особенно при этом следует подчеркнуть ту мысль, что способ последовательного деления дает возможность найти наибольший общий делитель двух или нескольких чисел без разложения их на простые множители.

Для отыскания НОД трех или нескольких чисел способом „последовательного деления“ сначала находят НОД двух данных чисел, затем находят НОД найденного числа и третьего данного числа и т. д.

§ 11. Проверка числом 9

В § 1 настоящей главы даны указания к проведению внеклассных занятий по арифметике. Дополним их.

1. Полезно выполнить упражнение для определения остатка от деления числа на 9. Делится ли число 35687 на 9? Почему не делится? Какой получится остаток?

У к а з а н и е. $35687 = 30000 + 5000 + 600 + 80 + 7$. Если сосчитать остатки от деления разрядных единиц на 9, то, как известно, получится $3 + 5 + 6 + 8 + 7 = 29$. Число 35687 делилось бы на 9, если бы сумма этих остатков (сумма цифр) делилась на 9; но 29 не делится на 9, остаются неразделенными 2 единицы, значит, остаток от деления всего числа 35687 на 9 также равен 2.

Чему равен остаток от деления 5738102 на 9? Остаток равен 81. Любопытные учащиеся могут подметить, что если сумма цифр числа—число многозначное, то для суждения о делимости числа на 9 или об остатке от деления на 9 можно находить вторую сумму цифр, затем третью и так далее, пока не получится однозначная сумма цифр, которая и показывает остаток от деления числа на 9 (включая и остаток, равный 0).

2. Указанные свойства числа 9 неоднократно применялись как для теоретических и практических выводов, так и для составления различных занимательных задач по угадыванию задуманного числа и т. д.

На разобранном в п. 1 свойстве остатка от деления чисел на 9 основана прежде очень распространенная проверка арифметических действий при помощи числа 9, теперь мало употребляемая. Отсылая к соответствующей литературе, приведем проверку девяткой умножения многозначных чисел:

Множимое	Множитель	Произведение	
526438	• 42217	= 22224633046	
28	16	34	сумма цифр
10	7	7	вторая сумма цифр
1			третья сумма цифр

Произведение $1 \cdot 7 = 7$. Ошибка не обнаружена. Все же нельзя ручаться, что умножение выполнено верно: при умножении могла быть сделана ошибка, кратная 9. Эта проверка числом 9 крайне проста, но как раньше уже было сказано, ни одна проверка не дает полной уверенности в правильности выполненного действия (обычно проверка девяткой проводится несколько сложнее, чем указано нами).

П о я с н е н и е. $N_1 N_2 = (9q + r_1)(9q_2 + r_2) =$ кратно $9 + r_1 r_2$, т. е. остаток от деления произведения чисел на 9 равен остатку от деления на 9 произведения остатков от деления каждого из данных чисел на 9.

Проверка девяткой действий сложения (и вычитания) также основывается на равноостаточности суммы (или разности) слагаемых (уменьшаемого и вычитаемого) и суммы (или разности) при делении на 9. Но при вычитании может встретиться случай, когда к остатку уменьшаемого придется добавить 9.

П р и м е р. Правильно ли выполнено вычитание:

$$\begin{array}{r} 2130 \\ - 1988 \\ \hline 142 \end{array}$$

—остаток при делении на 9 равен 6
 8; из 6 нельзя вычесть

8, поэтому к 6 прибавляют 9; затем из 15 вычитают 8. Остаток 7 равен остатку от деления разности 142 на 9. Ошибка в вычитании не обнаружена.

¹ Говорят: „Число и сумма цифр числа равноостаточны по отношению к делителю 9 (или сравнимы по модулю 9)“.

4. Проверка девяткой в случае деления нацело никаких новых трудностей не представляет.

В случае деления с остатком, например, $56879 : 325$, частное 175, остаток 4; $56879 = 325 \cdot 175 + 4$. Остатки при делении на 9 левой и правой частей равенства должны быть или равны, или могут отличаться друг от друга на числа, кратные 9:

$$56879 = \text{кратно } 9 + 8;$$

$$325 \cdot 175 + 4 = \text{кратно } 9 + (1 \cdot 4 + 4) = \text{кратно } 9 + 8.$$

5. В программе средней школы не поставлен вопрос о признаках делимости на 7, 11, 13, 37, так же, как и вопрос о проверке девяткой, и т. д., но в кружковой работе учитель может рассмотреть с учащимися эти вопросы, используя соответствующую литературу. Выше нами было приведено обоснование признака делимости на 11. Но $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, поэтому может быть дан единый признак делимости на все эти 3 числа, а именно: разбить число на грани от правой руки к левой, по 3 цифры в каждой грани; найти сумму чисел в гранях четного и нечетного порядка и вычесть одну сумму из другой.

Если в разности получится 0 или число, делящееся на 7, на 11, на 13, то и данное число разделится на 7, 11 или 13. Например, по этому признаку нетрудно показать и для очень большого числа 14 483 206 331 100, что оно делится нацело на 11, потому что

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 206 \\ \hline 100 \\ + 320 \\ \hline 320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 583 \\ + 331 \\ \hline 914 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 914 \\ - 320 \\ \hline 594 \end{array}$$

594 делится на 11. Это число не делится ни на 7, ни на 13.

Задачи. Очень полезно показать учащимся использование нахождения НОК при решении задач. В V классе обычно дают лишь навык нахождения НОК, не уделяя времени на решение задач. Можно решать эти задачи с учащимися во внеурочное время; многие из них решаются устно, требуют лишь небольшой сообразительности от учащихся. Например:

Задача 1. Из двух сцепляющихся зубчатых колес одно имеет 28, а другое—16 зубьев. До начала движения мелом отмечены два соприкасающихся зубца этих колес. Через сколько оборотов того и другого колеса будут повторяться совпадения этих меток?

Решение. НОК чисел 28 и 16 равно $28 \cdot 4 = 112$; совпадение меток произойдет тогда, когда первое колесо сделает $112 : 28 = 4$ (оборота), а второе колесо $112 : 16 = 7$ (оборотов).

Задача 2. По кругу бегут 4 лошади. Одна лошадь пробегает круг в 20 мин., другая—в 15 мин., третья—в 12 мин., четвертая—в 10 мин. Если бы они вышли одновременно из одного и того же начального пункта круга, то через несколько минут они пронеслись бы опять одновременно через этот пункт. Сколько кругов сделала бы каждая лошадь за это время?

Решение. НОК данных чисел 60; через 60 минут после выхода лошади пронеслись бы одновременно через начальный пункт. Значит, первая сделала бы 3, вторая—4, третья—5 и четвертая—6 оборотов.

Задача 3. Вдоль дороги от пункта *A* поставлены столбы через каждые 45 м. Эти столбы решили заменить другими, поставив их от пункта *A* на расстоянии 60 м друг от друга. На каком расстоянии от пункта *A* находится ближайший пункт *B*, где не придется снимать столб?

Решение. НОК 45 и 60 составляет 180. На расстоянии 180 м. Показать ответ на рисунке.

§ 12. Примерные упражнения для контрольной работы

- 1) Выписать все однозначные, двузначные делители чисел. Например, чисел 64, 96 и др.
- 2) Разложить число на простые множители.
- 3) Найти число, если известны его простые множители.
- 4) Найти общие делители чисел.
- 5) Написать числа, кратные данному числу и данным числам, например, для 7 и 9; 5 и 6; 6 и 8 и т. д.
- 6) Найти наибольший общий делитель трех трехзначных чисел.
- 7) Найти наименьшее общее кратное трех трехзначных чисел.
- 8) Решить задачу.

Вопросы:

- 1) Дать определения и привести числовые примеры: простого числа, составного, делителя, крат-

ного, взаимно простых чисел, общего делителя, общего кратного, наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного чисел.

2) Объяснить, что значит „разложить число на множители“.

3) Сформулировать необходимые и достаточные признаки делимости на 10, 100, 2, 5, 4, 25, 3 и 9.

4) Указать достаточный признак делимости числа на 3, но не необходимый. (Привести пример.)¹

5) Как узнать остаток от деления данного числа на 9, на 3, на 4, не производя деления?

¹ Например, 963.

Глава VIII

ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Порядок изучения вопроса

Учение о дробях, как известно, представляет большие трудности в школьном преподавании в силу тех необходимых абстракций, которые приходится вводить в курс арифметики. В то же время прочное усвоение курса дробей имеет существенное значение для нашей средней школы. Это—основа математического образования; весь последующий курс опирается на знание учащимися дробей.

Спорным вопросом методики дробей является вопрос о порядке изучения дробей обыкновенных и десятичных: должны ли десятичные дроби, как частный случай обыкновенных дробей, изучаться после обыкновенных дробей или изучение десятичных дробей должно предшествовать изучению обыкновенных дробей. Традиционная школа, как известно, в соответствии с основным абстрактно-дедуктивным методом обучения математике решала этот вопрос просто: десятичные дроби изучались вслед за обыкновенными, т. е. сначала давалась теория дробей, а затем применение теории к десятичным дробям. Но на практике эта система не всегда последовательно выдерживалась; так, нередко правило умножения и деления десятичных дробей выводилось не на основе соответствующих правил действий над обыкновенными дробями, а на основании использования свойства изменения произведения в зависимости от изменения сомножителей. На этом направлении в преподавании дробей в дореволюционной школе, несомненно, отразилось крайне ограниченное введение десятичных дробей в распространенных учебниках по элементарной математике еще XVII—XVIII веков, в которых подобное ограничение было вполне понятно ввиду нераспространенности в то время системы десятичных мер, без чего вычисления с десятичными дробями не имели практического применения. Напротив, в западноевропейских программах сторонниками реформы преподавания математики изучение десятичных дробей предпосылалось изучению обыкновенных дробей, и, кроме того, изучение десятичных дробей ставилось в непосредственной связи с изучением

целых чисел, а не дробей¹. (Термин „десятичные числа“ вместо „десятичные дроби“ встречается в руководствах по арифметике еще XVIII в.) Это направление реформаторов все более проникало в практику школ в Западной Европе и у нас до и после Великой Октябрьской революции. Немало было высказываний за ограничение объема изучения обыкновенных дробей; иногда даже высказывались более крайние предположения—изъять курс обыкновенных дробей из программы средней школы, оставив в программе рассмотрение дробей с наиболее часто встречающимися знаменателями: 2, 4, 8, 3, 6, 9, 5, 10, 100.

Какие же соображения выдвигают сторонники предварительного изучения десятичных дробей? В первую очередь то, что действия над десятичными дробями проще соответствующих действий над обыкновенными дробями; затем то, что действия над десятичными дробями выполняются аналогично действиям над целыми числами и что десятичные дроби представляют естественное развитие нумерации, поэтому целесообразно сопоставлять десятичные дроби с целыми числами. При этом сторонники подобного расположения курса не отрицают логических дефектов его построения; например, они не отрицают того, что в случаях умножения и деления на дробь исполняются законы изменения результата неосознанного действия, но они считают, что педагогические преимущества подобного приема говорят за его допущение².

Сторонниками точки зрения крайнего ограничения курса обыкновенных дробей или полного его изъятия являются те, кто единственную цель обучения арифметике (и даже математике) видят в узких практических задачах обучения в школе только таким знаниям, которые учащиеся могут немедленно применить в практической жизни. Отсюда следует вывод, что изучению обыкновенных дробей надо уделить только такое количество времени, какое необходимо, чтобы дать о них первоначальное представление и чтобы можно было их использовать в отдельных случаях для сокращения вычислений. На этом направлении сказался и протест преподавателей против тех замысловатых примеров с громадными знаменателями, которые часто имели место в задачниках по арифметике в разделе действий с обыкновенными дробями. В Америке такие упрощенные курсы дробей вводятся в учебниках, издаваемых для народных школ.

Считая неправильным начинать изучение дробей с десятичных дробей и с исторической, и с научной точки зрения, следует сказать, что предварительное проведение полного курса десятичных дробей было бы возможно в том случае, когда при выяснении существа умножения и деления на десятичную дробь давались бы соответствующие определения и разъяснения независимо от обыкновенных дробей; например, умножение на десятичную дробь опре-

¹ „Сборник программ и инструкций по преподаванию математики в Западной Европе“, под ред. проф. Д. М. Синцова, 1914.

² Мы не приводим здесь других обоснований сторонников предварительного изучения десятичных дробей. Желающих ознакомить с ними отсылаем к „Педагогике математики“ Мрочека и Филипповича, 1910.

делялось бы как повторение слагаемым некоторой десятичной части множимого и т. д. Но вряд ли можно считать целесообразным: 1) перенесение всех трудностей ознакомления с понятием умножения и деления на дробь в курс десятичных дробей и тем самым углубление этих трудностей, так как умножение и деление на обыкновенную дробь проще для восприятия; 2) вряд ли можно считать целесообразным два раза изучать один и тот же вопрос, а именно—умножение и деление на десятичную дробь—частный случай, а затем на обыкновенную дробь—общий случай.

Следует еще указать имевшее место в практике школы параллельное изучение действий с обыкновенными и десятичными дробями и даже такое построение курса, когда умножение и деление десятичных дробей в V классе изучалось одновременно с соответствующими действиями над обыкновенными дробями и на основе их, а сложение и вычитание—в отрыве от них, по аналогии с действиями над целыми числами.

В нашей советской школе постановление ЦК ВКП(б) о школе пресекло все попытки упрощенчества в преподавании арифметики и поставило требование—дать вполне грамотных строителей социализма, владеющих „основами наук“. Согласно программе арифметики в средней школе дается систематический курс обыкновенных и десятичных дробей, причем десятичные дроби рассматриваются как частный случай обыкновенных дробей. В соответствии с принципиальными установками обучения в советской средней школе (см. гл. I) ниже детально излагается вопрос преподавания раздела о дробях в V классе.

§ 2. Исторические сведения. Внеклассные занятия

Как и при повторении нумерации целых чисел, полезно при постановке курса дробных чисел дать учащимся исторические сведения о дробях (литературные источники те же). Интересно показать то общее и то различное, что имелось во всех известных центрах развития учения о дробях: у египтян, вавилонян, римлян и индусов.

Общим было то, что у всех народов дроби возникли в процессе практической деятельности людей измерения. Измерение, так же как и счет, имело место у всех народов с самых древних времен; измерение было непосредственно связано со счетом. Потребности более точного измерения явились причиной того, что единицы мер стали раздроблять на 2, на 3 и более частей. Этим более мелким мерам давали особые наименования, и в дальнейшем величины измерялись уже этими более мелкими единицами, однородными с ними. Так возникли первые конкретные дроби. Отвлеченных дробей тогда еще не знали. Длинен был путь перенесения названия какой-либо части одной меры на такую же часть другой меры,—это был путь создания абстрактного понятия дроби. Так, у нас на Руси была земельная мера „четверть“ и более мелкая — „полчетверть“, которая называлась „осьмина“,—это были конкретные дроби—единицы для измерения площади земли, но „осьминой“ нельзя было измерять время, или ско-

рость, или др., только значительно позднее осьмина¹ стала обозначать отвлеченную дробь $\frac{1}{8}$, которой можно выразить любую величину. Различны были единицы мер и системы счисления у различных народов, и в процессе развития понятия дроби у каждого народа создавалась своя система и теория дробных чисел.

Учащиеся знают, что вавилонские математики пользовались шестидесятеричной системой счисления, причем, что особенно важно, они пользовались поместным значением цифр, в противоположность, например, египтянам. Поместное значение цифр у вавилонян распространялось и на цифры, стоящие вправо от единицы, т. е. они записывали дроби в шестидесятеричной системе так же, как в настоящее время записываются наши десятичные дроби.

Дробь $\frac{1}{2}$ записывалась как дробь, имеющая числитель 30, а знаменатель 60; дробь $\frac{1}{3}$ — в виде дроби с числителем 20; дробь $\frac{7}{90}$ записывалась в виде суммы дробей $\frac{4}{60} + \frac{40}{60^2}$ (учащиеся могут проверить равенство). Интересно привести пример записи числа вавилонскими математиками:

$$10 \frac{4}{60} < 11 \frac{32}{60^2}$$

где между слагаемыми дробями $\frac{4}{60}$ и $\frac{11}{60^2}$ помещен знак $<$, который, повидимому, означает отсутствие дроби со знаменателем 60^2 , т. е. играет роль нашего нуля.

Это введение порядковой записи дробей сильно облегчило вавилонянам пользование ими, в особенности при сложении и вычитании, при отыскании общего знаменателя. Все 4 действия с дробями были хорошо известны вавилонским математикам, и шестидесятеричные дроби вавилонян сослужили громадную службу как орудие научных вычислений греческих астрономов, арабских и средневековых ученых

[угол $a^\circ b' c''$, время $a^h b^m c^s$ читаются $(a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2})$]; в XVI веке

они уступили свое место десятичным дробям, более соответствовавшим требованиям практики при десятичной системе нумерации.

Полезно также ознакомить учащихся с своеобразными приемами вычисления с дробями, которые были выработаны египтянами в отдаленнейшем прошлом.

Они изложены в древних памятниках египетской математики — папирусах. Самый древний из них, составленный за 2000 лет до на-

¹ В России XVI—XVII веков некоторые дроби произносились с окончанием *-ина* ($\frac{1}{7}$ — сдьмина, $\frac{1}{10}$ — десятина). Дроби в русских рукописях сначала назывались долями, затем „ломаными числами“.

шего летосчисления хранится в Московском музее изящных искусств им. А. С. Пушкина. Другой папирус Ринда, расшифрованный в последнюю четверть XIX века, хранится в настоящее время в Британском музее. Своеобразие системы счисления египтян в области дробей заключается в том, что, выделив две конкретные дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$, египтяне все остальные дроби приводили к так называемым „основным“ дробям, имеющим числитель единицу. Для обозначения дроби египтяне писали знаменатель и ставили значок дроби или точку. Во всех случаях, в которых получалась дробь с числителем, отличным от единицы, полученную дробь представляли в виде суммы основных дробей. Так, $\frac{2}{5}$ египтяне представляли в виде суммы $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{15}$ и записывали эти дроби рядом, не пользуясь знаком сложения; дробь $\frac{2}{13}$ записывалась $\frac{1}{8} \frac{1}{52} \frac{1}{124}$, дробь $\frac{5}{6}$ записывалась: $\frac{1}{2} \frac{1}{3}$ и т. п.

Подобные упражнения в разложении дробей на слагаемые, где каждое слагаемое представляет собой дробь с числителем единица, крайне полезны для учащихся и могут быть проведены с большим успехом в кружковой работе (ниже указаны простейшие примеры). Для облегчения вычисления египетскими учеными были составлены таблицы разложения дробей вида $\frac{2}{2n+1}$, т. е. с числителем 2 и нечетным знаменателем от 3 до 99, т. е. от $n=1$ до $n=49$, и все дроби сначала представляли в виде дробей с числителем 2 и 1, а затем, пользуясь указанной таблицей, разлагали все дроби на сумму основных дробей. Приведем решение задачи, пользуясь современными обозначениями цифр и знаков: скобок, + и =.

Задача. Разделить 7 хлебов между 8 работниками поровну—решается по-древнеегипетски так:

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} &= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \\ &+ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Ответ. 4 хлеба разделить пополам;

2 хлеба „ на четвертые части;

1 хлеб „ „ восьмушки.

Каждый работник получит $\frac{7}{8}$ хлеба¹.

¹ Интересно, что одна и та же дробь вида $\frac{2}{2n+1}$ разлагалась египтянами на дроби с числителями, равными единице, разными способами.

Египетский метод вычислений получил большое распространение среди греков, затем среди арабов. В период средневековья он был положен в основу коммерческих вычислений в Италии и других странах. Интересно отметить это стремление древних изображать дроби или с одинаковыми числителями (Египет), или с составленными по определенному закону знаменателями (Вавилон). У вавилонян любая дробь выражалась:

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3} + \dots; \text{ у египтян: } \frac{m}{n} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \dots$$

Простота египетской записи дробей только кажущаяся. Операции с дробями значительно легче выполнить с записями вавилонскими, с ними легче производить арифметические действия. Выполнение действий с дробями при записи их в египетской системе очень громоздко, когда они сопровождаются приведением дробей к общему знаменателю. Поэтому вавилонская система и вытеснила египетскую. Преимуществом египетского разложения дробей является то, что любую дробь можно привести к требуемому виду. При вавилонском способе вычислений дробных выражений имеют место случаи, когда дробь не может быть выражена в виде конечного ряда дробей, как, например, дробь

$$\frac{2}{7} = \frac{17}{60} + \frac{8}{60^2} + \frac{34}{60^3} + \frac{17}{60^4} + \frac{8}{60^5} + \dots^1,$$

где 17, 8, 34—периоды. В этом случае можно найти приближенное значение данной дроби, как в случае наших десятичных дробей, предшественниками которых они являются.

И наконец, в кратких исторических заметках, даваемых учащимся о зарождении дробей, следует указать, что римляне пользовались двенадцатеричными дробями. Исходя из конкретных потребностей, римляне предпочитали двенадцатеричные дроби, так как они дают возможность наиболее удобно выражать чаще всего встречающиеся на практике 2-е, 3-и, 4-е, 6-е доли. Отметим, что римские педагоги применяли интересный методический прием при обучении дробям, пользуясь конкретными примерами мер веса, длины, денег и т. д. Римский „as“ (асс)—первоначальная медная монета, весившая 1 фунт, разделялась на 12 унций. Отвлеченная дробь $\frac{11}{12}$ назы-

$$^1 \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \cdot 60 = \frac{17 \cdot 1}{7} = \frac{17}{60} + \frac{1}{7} \cdot 60 = \frac{17}{60} + \frac{8}{60^2} = \frac{17}{60} + \frac{8 \cdot 4}{7} = \frac{17}{60} + \frac{4}{7} \cdot 60 = \frac{8}{60^2} + \frac{4}{60^3} + \dots$$

валась „асс без унции“, $\frac{6}{12}$ — половина, $\frac{4}{12}$ — треть, $\frac{3}{12}$ — четверть и т. д., т. е. каждая римская дробь носила определенное название. Складывать, вычитать эти дроби было нетрудно, и в римских школах основным вопросом преподавания арифметики были действия сложения и вычитания дробей. Постепенно эти дроби асса потеряли свое конкретное значение и стали употребляться как обозначение отвлеченной дроби. При выполнении умножения—деления как в научных, так и в практических, в частности в землемерных вычислениях, пользовались таблицами, без чего вычисления бывали крайне сложны и трудны.

Можно указать учащимся еще 4-ю родину зарождения дробей и приема вычисления с ними, а именно Индию. Надо отметить, что индусский способ записи дробей был почти таким же, как наш,—отсутствовала лишь черта, отделяющая члены дроби; так $\frac{3}{7}$

записывалось $\frac{3}{7}$, а $4\frac{3}{5}$ так: $\frac{4}{5}$. Четыре действия выполнялись ими по правилам, достаточно близким к нашим правилам. Следы всех указанных источников видны у старейших писателей, которые послужили образцами для позднейших авторов.

Известна роль народов Ближнего Востока, как посредников при ознакомлении Запада с методами древних. Правила действий с дробями вида $\frac{a}{b}$, где a и b —любые натуральные числа, $b \neq 0$, вошли в европейские учебники арифметики через работы среднеазиатских узбекских и таджикских ученых. Среди этих ученых были и творцы новых методов¹.

Следует подчеркнуть, что в учебниках даже XVIII века, излагавших учение о целых и дробных числах, приводились в большей части правила, которые следовало заучивать наизусть и механически применять. Лишь в самом конце XVIII века выдвигается требование обосновывать правила и теоремы, справедливые для целых чисел, при использовании их для вычислений с дробями, и только в начале XIX века соответствующие требования ставятся в преподавании арифметики.

Но в оригинальной самобытной „Арифметике“ Магницкого, изданной в России в самом начале XVIII века (1703 г.), как выше показано (гл. I, § 16), много внимания уделяется методическим приемам при обучении арифметике, в частности при изучении дробей.

¹ Учащиеся должны знать имя ранее уже упоминавшегося Мухаммеда ибн Мусы ал-Хорезми (Магомета сына Мусы из Хорезма), жившего в IX веке и написавшего замечательную книгу „Альджебр альмукабала“, оказавшую огромное влияние на дальнейшее развитие математики в Европе. Само слово „алгебра“ произошло от слова „альджебр“. Далее будет сказано о другом знаменитом узбекском математике, жившем в начале XV века, ал-Каши, который является изобретателем десятичных дробей.

§ 3. Из теории вопроса в связи с методикой преподавания

1. В современном научном изложении все обобщения понятий о числе делаются всецело на основе целых (положительных) чисел. Новые числа вводятся для того, чтобы удовлетворить специально поставленной цели; например, для того чтобы выразить результаты обратных действий в том случае, когда эти результаты не могут быть выражены числами из той же области, к которой принадлежат данные числа; в рассматриваемом нами случае имеет место невозможность выразить результат деления одного числа (a) на другое (b) в натуральных числах в случае, когда b отлично от нуля и a не представляет суммы слагаемых, равных b . В науке имеются различные теории дробей. Наиболее распространена теория пар. Дробные числа определяются как числовые пары второй ступени, состоящие из двух целых чисел a и b [a, b], взятых в неизменяемом порядке. Налагается ограничение: второй компонент не может равняться 0. Известными предполагаются только совокупность целых чисел и действия над ними. Даются определения понятий равенства, больше и меньше, суммы и произведения двух дробей; остальные операции выводятся из принятых определений. Определенные таким образом действия в этой расширенной числовой области должны подчиняться тем же основным законам, которые имеют место при действиях с целыми числами. В этом состоит так называемый принцип перманентности (постоянства) основных законов.

$$[a, b] \text{ или } \frac{a}{b}.$$

Определение I. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ тогда и только тогда, когда $ab' = a'b$.

С л е д с т в и я: 1) Если $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ и $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, то $\frac{a}{b} = \frac{a''}{b''}$

(свойство транзитивности)¹.

2) $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, $m \neq 0$ (главное свойство дроби)

Определение II. $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ тогда и только тогда, когда $ab' > a'b$.

С л е д с т в и я: 1) $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ тогда и только тогда, когда $a > a'$

2) $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ тогда и только тогда, когда $b < b'$.

¹ „Переносность“, если $[a, b] = [a'b']$ и $[a'b'] = [a''b'']$, то $[a, b] = [a''b'']$

Свойство рефлексивности (возвратности): $[a, b] = [a, b]$.

Свойство симметричности (обратимости): если $[a, b] = [a', b']$, то $[a', b'] = [a, b]$.

3) Если $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ и $\frac{a'}{b'} > \frac{a''}{b''}$, то $\frac{a}{b} > \frac{a''}{b''}$ (свойство транзитивности).

Определение III. $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a+a'}{b}$ (все дроби могут быть приведены к одинаковому знаменателю b на основании главного свойства).

Правило вычитания. $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} = \frac{a-a'}{b}$ при $a > a'$.

Определение IV. $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$.

Правило деления. $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{ba'}$ при $a' \neq 0$.

Определение V. $\frac{a}{1} = a$.

Следствия: 1) $\frac{a}{b} \cdot b = a$; 2) $\frac{1}{1} = 1$; 3) $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$.

Формально-логическое изложение теории (даже с конкретными иллюстрациями) дробных чисел может быть дано только учащимся старших классов в порядке обзора, дополнения и систематизации ранее приобретенных знаний.

Целые числа рассматриваются как частный случай дробей; операции над целыми числами как частный случай операций над дробями.

2. При изложении курса арифметики в V классе, в соответствии с возрастом и математической подготовкой учащихся, мы исходим из конкретного истолкования дроби, выясняя на конкретных примерах целесообразность вводимых определений и постепенно вырабатывая у учащихся абстрактное понятие о дроби.

Конкретное истолкование дробного числа: $\frac{a}{b}$ есть b -я часть числа a или a b -х частей единицы: $\frac{a}{bn}$ есть n -я часть числа $\frac{a}{b}$;

умножить $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}$ — значит найти n -ю часть числа $\frac{a}{b}$; умножить $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$ то же самое, что найти $\frac{m}{n}$ частей числа $\frac{a}{b}$.

4. Первоначальное наглядное представление об одной доле и совокупности долей (дроби) получают учащиеся в начальной школе. Впервые приступая к ознакомлению с дробью, они исходят из на-

1 Изображением числа $\frac{a}{b}$ на числовой оси служит точка, отстоящая от начала на a b -х частей единицы масштаба (или отрезок). Целые числа вначале противопоставляются дробным, затем выступают как частный случай дробей ($\frac{a}{1} = a$).

глядного представления доли и дроби, выясняют простейшие преобразования и действия с долями. В V классе в систематическом курсе арифметики существенно меняются те наглядные образы, которыми поясняются дробные числа и операции с ними. Все сообщаемые правила и доказательства обосновываются и выводятся на основании известных учащимся свойств действий с целыми числами, признаков делимости, разложения чисел на простые множители и т. д.

Изучение каждого преобразования или действия с дробными числами (гл. VIII, IX) сопровождается ретроспективным обзором соответствующих разделов теории целых чисел.

§ 4. Введение дробного числа

1. При рассмотрении числа как результата счета отдельных (неделимых) объектов или результата счета элементов совокупности (множества) было установлено, что деление в пределах операции с целыми числами не всегда выполнимо. Эта невозможность выполнения операции деления имеет в своей основе неделимость объектов счета. Учащиеся знают, что нельзя, например, распределить поровну 3 яблока между 4 ребятами так, чтобы не был уничтожен объект—яблоко (индивид)—как объект счета. Распределяются поровну не яблоки, а вещество яблок; можно три мешка овса распределить поровну между 4 лошадьми; 3 л воды (объем) перелить в 4 сосуда так, чтобы во всех сосудах воды было поровну, и т. п. Во всех этих случаях исчезает прежний объект счета, прежняя единица счета—яблоко, мешок, литр—и вместе с тем появляется новая единица счета—четверть $\left(\frac{1}{n} \cdot n = 1\right)$; новая единица, повторенная n раз, дает прежнюю единицу).

Таким образом, расширяется понятие числа как единицы счета на основе того же процесса счета отдельных объектов, и операция деления становится выполнимой точно. Но в подобных случаях для выполнения деления приходится „дробить“ отдельный объект, как, например, разрезать яблоко, лист бумаги и т. п., что не всегда возможно в области предметных чисел (нельзя, например, разделить три пера или стрелы между 4 мальчиками и др.)¹, но всег-

¹ Если, конечно, не переводить распределение 3 перьев или 3 стрел между 4 участниками на вопрос о времени пользования ими.

да возможно в области отвлеченных чисел. Таким образом, расширяется понятие операции деления путем введения приема деления объекта на части, разбивается понятие числа путем введения дробного числа—сначала одной доли, а затем собрания долей (несколько долей) единицы¹.

Несмотря на то, что учащимся сказанное должно быть известно из курса арифметики начальной школы, небесполезно повторить кратко вопрос получения дробного числа.

2. С введением дробных чисел ставится вопрос и о выполнении над ними тех же действий, которые выполнялись над прежде известными целыми числами. В главе о целых числах действия над целыми числами рассматривались с точки зрения процесса счета. С этой же точки зрения можно рассматривать действия и над дробными числами, кроме случаев умножения и деления на дробь. Случаи

$$4\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4}; 5\frac{1}{2} \cdot 3; 3:4; 5\frac{1}{2} : 3; 7:3$$

имеют смысл, хотя до введения определений действий с дробными числами не могут быть выполнены. Постановка вопроса во всех этих случаях учащимся совершенно ясна, но задача $7 \cdot 4\frac{1}{3}$, т. е. 7 взять $4\frac{1}{3}$ раза, или задача $7:4\frac{1}{3}$, т. е. 7 разделить на $4\frac{1}{3}$ равные части,—эти задачи с ранее рассматриваемых точек зрения не имеют смысла и не могут возникнуть. Источником этих действий является другой известный процесс, в результате которого получается число, а именно—процесс измерения (деление по содержанию). Результат измерения в огромном большинстве случаев не может быть выражен точно целым числом (рассмотрено с учащимися, гл. II, § 4). Таким образом, возникает потребность расширить понятие числа и наряду с изученными целыми числами ввести другие числа—дробные, которые дадут возможность выразить результат измерения (вели-

¹ „Дробью называется одна доля или собрание нескольких одинаковых долей единицы“ (Киселев, Арифметика, изд. 1938 г. и более поздних лет, § 116).

чин) вполне точно или с достаточной степенью точности.

Замечание. Трудности изучения дробей в V классе средней школы связаны с теми новыми идеями, которые должны усвоить учащиеся. Первая трудность, имеющая принципиальное значение, возникает тогда, когда учащиеся должны понять число $\frac{2}{7}$ как результат деления 25 на 7, как точный ответ; затем, когда они узнают, что целые числа и введенные новые числа (дробные) выражаются не однозначно, так, $3 = \frac{6}{2} = \frac{12}{4}$ и т. д.; $\frac{1}{2} = \frac{7}{14} = \frac{17}{34}$ и т. д. При выполнении действий с дробными числами особые трудности, как известно, возникают при изучении умножения и деления на дробь, когда учащимся приходится по-новому понимать смысл действий умножения и деления. При выполнении действий сложения и вычитания дробей учащиеся встречают только технические трудности при нахождении общего знаменателя.

§ 5. Получение дробного числа при измерении¹

Можно продолжить опыт, указанный в § 5, гл. II: взять отрезок прямой a ; для того чтобы измерить его длину, выбирают за единицу некоторую постоянную величину того же рода b (метр, сантиметр) и последовательно откладывают эту величину b на отрезке a , начиная от его начальной точки (рис. 21).

При этом может случиться, что: 1) длина b отложится на отрезке точно целое число раз, например 4 раза, и если мерой служил 1 см, то можно сказать, что длина отрезка a равна 4 см и результат измерения величины — число целое,

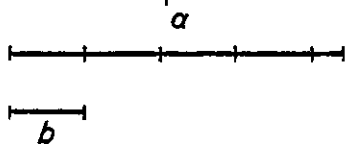


Рис. 21.

¹ „...что подход к построению рациональных и действительных чисел с точки зрения измерения величин нисколько не менее научен, чем, например, введение рациональных чисел в виде пар. Для школы же он имеет несомненные преимущества“. (Из предисловия редактора А. Н. Колмогорова к книге Г. Лебега „Об измерении величин“.)

2) если, откладывая на прямой a , начиная от ее конца, длины, равные b , увидим, что конечная точка окажется между концами отрезков, равных по длине 4 и 5 раз взятой длины b , в этом случае можно единицу измерения разделить (раздробить) на некоторое число равных частей, пусть на 10 (на n частей), и определить затем, сколько раз одна такая часть содержится в отрезке a . При этом может случиться, что: 1) длина, равная $\frac{1}{10}$ доли отрезка b , содержится точное число раз в отрезке a , например 43 раза; тогда говорят, что отрезок a содержит 43 десятые части (доли единицы) или что длина его измеряется дробным числом $\frac{43}{10}$.

(Заметим, что в этом случае применение дробей для измерения величины сводится к изменению единицы измерения. Так, если принять за единицу измерения b 1 дециметр, то длина отрезка a выразится числом: 43 десятые доли дециметра, или 43 сантиметра—новые единицы).

Если последовательно откладывая от начальной точки отрезка a длины, равные $\frac{1}{10}$ доле отрезка b , мы не попадем в его конечную точку (пусть эта конечная точка приходится между 43 и 44 десятыми) и длина отрезка выражается $\frac{43}{10}$ долями b , то $\frac{1}{10}$ единицы измерения снова раздробляют на n равных частей (пусть на 10 частей) и определяют, сколько раз одна такая часть ($\frac{1}{100} b$), или миллиметр, содержится в отрезке a ; пусть это будет $\frac{432}{100}$, или 432 мм.

Продолжая дробление единицы b на очень большое число равных частей, так что каждая часть будет очень мала, можно измерить данную величину, сделав ошибку настолько малую, что на практике эта ошибка не будет иметь значения¹.

¹ При измерении находят отношение величины к однородной величине, принятой за единицу; отношением двух величин a и b , которое записывается $\frac{a}{b}$, где a и b —обозначения величин, называют число целое или дробное, которым измеряют a , если за единицу принята b .

Уже в главе о величинах было сказано, что без указания единицы измерения число, полученное в результате измерения, не дает представления о данной величине. Результат измерения величины во всех случаях называется числом. При выборе одной единицы результат измерения может быть выражен одним числом—целым или дробным, при другой единице измерения—другим числом:

$$4 \text{ дм} = 40 \text{ см} = 400 \text{ мм};$$

$$4 \text{ дм} = \frac{40}{10} \text{ дм} = \frac{400}{100} \text{ дм}.$$

1) Если измеряемая величина кратна величине, принятой за единицу измерения, то число, определяющее величину,—число целое.

2) Если величина кратна какой-нибудь известной части единицы, то число, определяющее ее, называется дробным числом, или дробью; дробь образуется тогда, когда единица разделяется на какое-нибудь число равных частей и берут одну или несколько таких частей.

Если результат измерения выражается числом целым, то оно показывает, сколько раз единица измерения содержится в измеряемой величине; если результат измерения выражается числом дробным, то оно показывает, какая доля единицы и сколько раз содержится в измеряемой величине.

Если результат измерения выражается числом целым с дробью, то оно показывает, сколько единиц и сколько каких долей единицы содержится в измеряемой величине. Таким образом, делится ли единица счета или единица измерения, тот и другой процесс приводит к развитию понятия числа, к введению дробного числа. Во всей совокупности дробных чисел содержатся как частный случай дроби со знаменателем единица или вся совокупность целых чисел.

Весь вышеизложенный процесс измерения величин (хотя бы длины отрезка), получение приближенных значений с точностью до $\frac{1}{10}$, до $\frac{1}{100}$, до $\frac{1}{n}$, выражение результата измерения различными числа-

ми в соответствии с выбранной единицей измерения— все это должно быть выполнено с учащимися на практике.

§ 6. Получение дробного числа при делении

Переходя к выяснению понятия дроби, получаемой от деления одного числа на другое, также полезно использовать отрезок в качестве наглядной иллюстрации:

1) у учащихся имеется представление о дроби как о сумме долей одной и той же единицы; на рисунке 22 изображена дробь $\frac{3}{4}$;

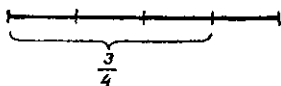


Рис. 22.

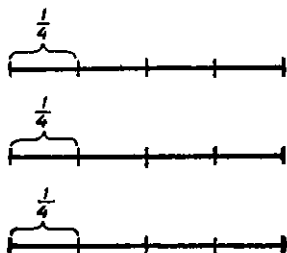


Рис. 23.

2) на рисунке 23 дана та же дробь, но получившаяся от деления трех равных единиц на 4 равные части, причем от каждой единицы взята только одна часть (эти части надо соединить);

3) можно и иным путем разделить 3 на 4; например, 3 отрезка на 4 равные части: разделить один отрезок пополам, а от двух других отрезать по $\frac{1}{4}$

и прибавить эти четвертушки к каждой половине первого отрезка; можно поступить и иначе: 2 отрезка разделить пополам, а третий разделить на 4 равные части, и таким путем разделить 3 отрезка на 4 равные части. Также различными способами можно пересыпать 3 мешка сахару в 4 меньших мешка, перелить воду из 3 бутылок в 4 меньшие бутылки. Выяснив возможность деления 3 на 4 равные части различными способами, переходят еще к одному приему, который и является целью урока, а именно 4-му приему, когда 3 единицы рассматриваются как одно целое и это целое делится на 4 равные части

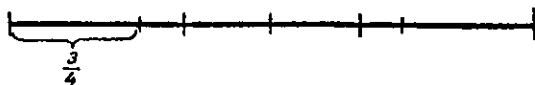


Рис. 24.

(рис. 24). Каждая часть будет содержать три четверти единицы.

После этого учащиеся упражняются в делении $5:6$, $8:9$, $7:12$ и т. д.; надо помочь учащимся понять, что в этом случае дробь $\frac{5}{6}$ есть только одна часть пяти единиц, принятых за целое, и т. д. Неправильную дробь, например $\frac{13}{5}$, учащиеся также наглядно представляют:

1) как состоящую из всех пятых долей одной единицы, затем из всех пятых долей второй единицы и еще из трех пятых долей третьей единицы;

2) как сумму пятых долей, взятых по одной от 13 единиц, и

3) как $\frac{1}{5}$ долю от 13 единиц, рассматриваемых как одно целое.

Последнее, конечно, труднее. Но крайне важно значение, которое имеет такое представление дроби; поэтому необходимо проводить с учащимися указанные упражнения, для чего может быть использована любая из обыкновенных дробей.

Постепенно учащиеся осваиваются с мыслью, что при делении одного целого числа на другое и в том случае, когда деление не выполняется нацело, можно дать точный результат, который также выражается дробным числом:

$$7:9 = \frac{7}{9}; 11:6 = \frac{11}{6} \text{ и т. д.}$$

§ 7. Чтение и запись дроби.

На занятиях по арифметике следует, кроме слова „дробь“, употреблять слова „дробное число“, так как учащиеся часто употребляют слово „число“ только в применении к целым числам. Надо повторить с учащимися и обозначение дроби и обращать

внимание на то, чтобы черта писалась горизонтально, знак равенства против черты дроби, цифры целого числа были бы в 2 раза крупнее, чем цифры, обозначающие дробь; надо повторить употребляемые термины: доля, часть, члены дроби — числитель и знаменатель (что они показывают), дробь правильная и неправильная (путем сравнения с единицей) и смешанное число. Надо требовать от учащихся четкого чтения дроби с ударением на знаменателе, показывающем, какие доли содержатся в числе, и четкой записи прочитанной дроби (только слово „половина“ при чтении не характеризует ни размера взятых долей, ни числа их). При проведении занятий небесполезно привлекать дидактический материал в виде кругов, разделенных на секторы, квадратов, прямоугольников, разделенных на части, и т. п. Наглядное изображение дроби отрезком имеет тот недостаток, что отдельные части отрезка по виду не отличаются от всего отрезка (единицы), поэтому при пользовании отрезком в качестве иллюстрации дроби надо указать взятый масштаб. Чем больше конкретных представлений будет связано у учащихся с понятием дроби, тем более успешно пойдет дальнейшая работа. Для этой цели пользуются различными упражнениями. В зависимости от подготовки класса некоторые из указанных нами упражнений могут быть излишни, тогда их надо опустить. Но полезно, например, спросить (устно) и убедиться в том, что, учащиеся знают, что

$$\frac{1}{2} \text{ м} = 50 \text{ см}, \quad \frac{1}{5} \text{ кг} = 200 \text{ г}, \quad \frac{1}{4} \text{ т} = 250 \text{ кг},$$

и обратно. Полезно и записать процесс дробления:

$$1 = \frac{3}{3} = \frac{6}{6} = \frac{12}{12} \text{ и т. д.},$$

также

$$4 = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} \text{ и т. д.}; \quad 5 = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \frac{20}{4} \text{ и т. д.}$$

Подчеркивается мысль, что единица и всякое целое число могут быть выражены в любых долях.

Целесообразно давать упражнения на нахождение частного при делении целых чисел:

$$3 : 5 = \frac{3}{5}; 15 : 7 = \frac{15}{7}, 11 : 13 = \frac{11}{13}; 27 : 14 = \frac{27}{14} \text{ и т. д.}$$

Можно дать запись дробного числа в общем виде на буквах: $\frac{a}{b}$.

§ 8. Равенство и неравенство дробных чисел

Следующим этапом в работе является рассмотрение вопроса о равенстве и неравенстве дробей.

Для этого необходима предварительная подготовка по вопросу сравнения дробей. Это особенно важно для усвоения основного свойства дроби.

Два дробных числа считаются равными, если они выражают равные между собой величины (при одной и той же единице измерения); из двух неравных дробных чисел большим считается то число, которое получено от измерения большей величины (при одной и той же единице измерения). Учащиеся понимают, что дроби, измеряющие одну и ту же величину, не могут быть $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$ или $\frac{7}{10}$ и $\frac{8}{10}$, и не затрудняются в том случае, когда дроби с одинаковыми

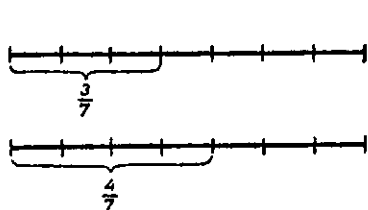


Рис. 25.

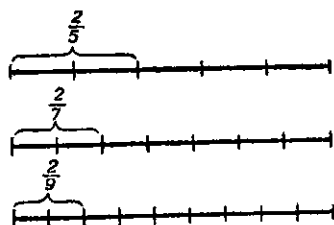


Рис. 26.

знаменателями, ответить на вопрос, какая из дробей больше: $\frac{4}{7}$ или $\frac{3}{7}$ (рис. 25). Слабее обстоит дело со сравнением более крупных и более мелких долей, т. е. дробей с различными знаменателями и одинаковыми или различными числителями, например:

$$\frac{2}{5}, \frac{2}{7} \text{ и } \frac{2}{9} \text{ (рис. 26); } \frac{3}{4} \text{ и } \frac{3}{5} \text{ и т. п.}$$

Этот вопрос должен быть еще раз просмотрен при помощи наглядных пособий¹, пока учащиеся не умеют выражать данные дроби в одинаковых долях (используется истолкование дроби как собрания нескольких одинаковых долей единицы).

При сравнении дробей полезны упражнения по дополнению дроби до единицы, до половины (в том случае, когда это целесообразно) или смешанного числа — до ближайшего целого числа.

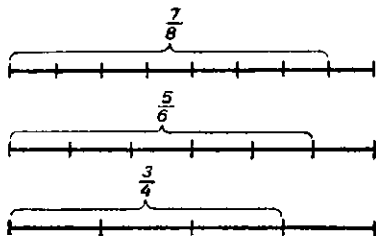


Рис. 27.

Даются понятия правильной и неправильной дроби: 1) сравнением ее с единицей, 2) сравнением ее членов (числителя и знаменателя).

Дается понятие смешанного числа. Эти вопросы не затрудняют учащихся.

Упражнения. 1) Даны дроби: $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$ (рис. 27). Какая из этих дробей больше? Почему эти дроби называются правильными? Сколько долей в каждом случае не хватает до единицы?

2) Даны дроби:

$\frac{6}{5}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{4}{3}$ (рис. 28).

Какая из этих дробей больше? На какую долю каждая из этих дробей больше взятой единицы? Почему эти дроби называются неправильными?

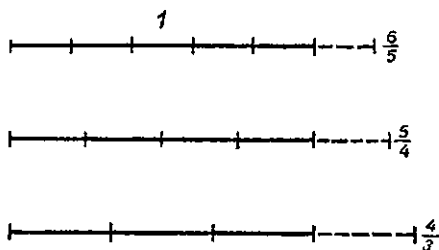


Рис. 28.

¹ Иногда сравнение дробей с одинаковыми числителями или одинаковыми знаменателями выполняют на основании истолкования дроби как частного, полученного при делении целого числа на другое (равны делимые или делители). Этот прием в данном случае логически не обоснован, так как изменение частного в зависимости от изменения одного из компонентов действия учащиеся пока знают лишь для случая, когда частное — число целое.

$$\text{Запись: } \frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{3}{4} \quad \frac{6}{5} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3}$$

3) Даны две дроби: $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$. Показать на чертеже, что вторая дробь больше первой, сравнением их с половиной.

4) Даны смешанные числа: $2\frac{5}{6}$; $2\frac{4}{5}$; $2\frac{8}{9}$. Сколько надо прибавить, чтобы округлить каждое из данных чисел до ближайшего целого числа? Какая из этих дробей больше?

5) Сколько и каких долей надо прибавить, чтобы округлить данные ниже смешанные числа до ближайшего целого числа:

$$7\frac{8}{9}; 7\frac{11}{12}; 11\frac{13}{14}; 8\frac{5}{7}; 4\frac{7}{9}; 10\frac{8}{11}?$$

Назвать ближайшие целые числа для каждого из этих смешанных чисел.

Подобные упражнения обычно проводятся устно, а иногда записываются для того, чтобы и зрительным восприятием помочь закреплению приобретаемых представлений.

§ 9. Преобразования смешанного числа и неправильной дроби

На упражнениях, приведенных выше и аналогичных им, учащиеся легко усваивают понятия „правильная дробь“, „неправильная дробь“, „смешанное число“. Надо неоднократно подчеркивать ту мысль, что число дробное получается в результате деления одного числа на другое и выражает результат деления (частное), что благодаря введению этих новых чисел можно дать ответ для всех случаев деления (за исключением деления на 0) и для тех, для которых при помощи только целых чисел ответа не находили. Например:

$$6 : 3 = \frac{6}{3} = 2; 4 : 9 = \frac{4}{9}; 12 : 5 = \frac{12}{5} \text{ и т. д.}$$

В ответах получили целое число (2), правильную дробь ($\frac{4}{9}$) и неправильную дробь ($\frac{12}{5}$).

Ставится вопрос об обращении смешанного числа в неправильную дробь, и обратно—об исключении целого числа из неправильной дроби. В большинстве случаев выполнение соответствующих преобразований не затрудняет учащихся, но очень важно, чтобы по возможности все преобразования сопровождалось рассуждениями о составе каждой единицы из долей и дробной части числа из тех же долей. При этом обращается внимание учащихся, что эти рассуждения аналогичны тем, которые ведутся при обращении более крупных мер в более мелкие, и наоборот.

Примеры. 1) Выразить число 1 или 4 в виде дроби. Прежде всего устанавливается, что эти числа могут быть выражены только в виде неправильной дроби. Можно разбить каждую единицу на 5 частей (долей), тогда $1 = \frac{5}{5}$, $4 = \frac{20}{5}$; можно каждую единицу разделить на 7 долей, тогда $1 = \frac{7}{7}$, $4 = \frac{28}{7}$ и т. д.

2) Обратить $7\frac{2}{9}$ в неправильную дробь. В единице содержится 9 девятых долей, в 7 единицах 63 девятые доли; имеются еще 2 девятые доли, всего $(9 \cdot 7 + 2)$ девятых долей или $\frac{65}{9}$; записываем в виде дроби:

$$7\frac{2}{9} = \frac{9 \cdot 7 + 2}{9} = \frac{65}{9}.$$

3) Исключить из неправильной дроби $\frac{9}{9}$, $\frac{45}{9}$ целое число.

4) Исключить из $\frac{58}{9}$ целое число, т. е. узнать, сколько в неправильной дроби $\frac{58}{9}$ содержится целых единиц и сколько девятых долей, не составляющих ни одной единицы. Объяснение: в одной единице 9 девятых долей, а в 58 девятых столько целых единиц, сколько раз 9 содержится в 58, т. е. 6 еди-

ниц целых, и останется $\frac{4}{9}$; $\frac{58}{9} = 6 + \frac{4}{9} = 6\frac{4}{9}$; $\frac{58}{9}$ есть точное частное, полученное от деления 58 на 9.

Правила этих преобразований громоздки и не всегда точно формулируются учениками. Так, обычно в правиле обращения смешанного числа в неправильную дробь учащиеся опускают слова „и подписать тот же знаменатель“. Следует уделять на каждом уроке 5—7 минут для устных упражнений и ответов на вопросы о происхождении той или иной дроби, о содержании терминов „числитель“ и „знаменатель“, для устного обращения целого и смешанного числа в неправильную дробь, и обратно (с подробным объяснением).

Замечания. 1) При исключении из неправильной дроби целого числа выясняется получение дроби в результате деления с остатком.

Выше дана дробь $\frac{58}{9}$, т. е. надо выполнить деление $\frac{58}{4 \overline{) 6}}$. В этом случае учащиеся иногда пытаются рядом с цифрой 6 в частном поставить цифру 0 и редко при такой записи деления дают ответ $6\frac{4}{9}$, в то время как запись $\frac{58}{9} = 6\frac{4}{9}$ их не затрудняет. Большинство из учащихся, которых мы проверили в этом вопросе, в том случае, когда деление было записано в столбик, приписали 0 к цифре 6 в частном, а при устном опросе, за исключением одного из 32 учащихся, ответ дали правильный. Поэтому полезно провести упражнения на исключение целого числа из дроби (как-то: $\frac{19}{5}$; $\frac{27}{4}$; $\frac{15}{7}$; $\frac{135}{16}$ и др.) путем записи деления при помощи знака \lfloor .

2) Надо обратить внимание учащихся на то, что $6\frac{4}{9}$ они получают в результате сложения $6 + \frac{4}{9}$, так как нередко в старших классах учащиеся, по аналогии с выражением $6\frac{a}{b}$, понимают $6\frac{4}{9}$ как $6 \cdot \frac{4}{9}$.

3) В старших классах иногда учащиеся затрудняются в записях деления с остатком: $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$; $\frac{a-r}{b} = q$; обычно умеют записать, что $a = b \cdot q + r$, где a и b —данные числа, q —частное, r —остаток. Здесь надо приучить к записи, например: $\frac{100}{7} = 14 + \frac{2}{7} = 14\frac{2}{7}$ (при делении 100 на 7 в частном получится 14 целых единиц и останутся 2 единицы, которые при делении на 7 дают в частном точно $\frac{2}{7}$).

§ 10. Увеличение и уменьшение дроби

При рассмотрении этого вопроса опираются исключительно на имеющиеся представления учащихся о более или менее крупных долях единицы и о большем или меньшем числе их¹.

Проводится сравнение дробей: сначала с одинаковыми знаменателями, затем с одинаковыми числителями и, наконец, любых дробей как в случае установления равенства, так и неравенства дробей. Но в этом случае не только устанавливается, какая из дробей больше или меньше, как прежде, но и количественно оценивается результат сравнения. Например, во сколько раз $\frac{8}{9}$ больше $\frac{4}{9}$ (8 девяток больше 4 девяток)? Какие доли взяты в первой дроби? во второй дроби? Какой вывод можно сделать при сравнении тех и других долей? Сколько долей взято в первой дроби? во второй? Что можно сказать о числе равных долей в обеих дробях? И, наконец, во сколько раз дробь $\frac{8}{9}$ больше дроби $\frac{4}{9}$? Полезно снова указать учащимся на аналогию с именованными числами и иллюстрировать на наглядных пособиях. Если сравниваются дроби $\frac{2}{15}$ и $\frac{2}{3}$, то для выяснения, какая дробь больше и во сколько раз,

¹ Дополнительно об умножении и делении дроби на целое число см. гл. IX, § 3 и 4.

к поставленным выше вопросам добавляется вопрос: почему пятнадцатые доли меньше третьих долей? сколько пятнадцатых долей содержится в единице? сколько третьих долей содержится в единице? во сколько раз одна пятнадцатая ($\frac{1}{15}$) меньше ($\frac{1}{3}$) одной трети? сколько раз $\frac{2}{3}$ содержится в 2 единицах? в 4 единицах? как изменяется величина дроби, если в ней отбросить знаменатель?

Наметим последовательность в проведении упражнений.

Предлагается учащимся написать дроби, в несколько раз большие или меньшие данной, или, как условно говорят, увеличить или уменьшить данную дробь в целое число раз. При этом пользуются знаками умножения (\cdot) и деления ($:$). Большинство упражнений выполняется устно.

Прежде всего предлагают увеличить дробь в несколько раз в том случае, когда увеличение дроби возможно выполнить только изменением (умножением) числителя, а не изменением знаменателя, т. е. сначала не надо брать примера, допускающего сокращения в результате изменения числителя; например, $\frac{5}{7}$ можно предложить увеличить в любое число раз, кроме увеличения в 7, 14 и т. д. раз.

Затем переходят к уменьшению дроби в случае деления числителя на целое число, причем на этой ступени обучения следует подобрать пример так, чтобы числитель нацело делился на данное число; например, $\frac{6}{3}$ уменьшить в 2 или 3 раза. Это ограничение может быть снято позднее, когда учащиеся поймут, что действие деления всегда возможно, что разделить на n — значит умножить на $\frac{1}{n}$.

После этого переходят к вопросу уменьшения дроби в несколько раз путем изменения (умножения), знаменателя, причем во взятом примере числитель дроби должен быть числом взаимно простым с числом, показывающим, во сколько раз надо умень-

шить дробь; например, дробь $\frac{1}{3}$ можно уменьшить в 2 раза, взяв в 2 раза меньшие доли.

И наконец, последним по трудности случаем будет увеличение дроби в несколько раз путем деления знаменателя на соответствующее число раз; например, $\frac{3}{8}$ можно увеличить в 2 раза, если взять доли, в 2 раза более крупные, чем в данном числе, а число долей оставить то же: $\frac{3}{4}$.

Затем переходят к случаю увеличения и уменьшения дроби в любое целое число (допускающее сокращение дроби).

Замечания. 1. Надо следить за тем, чтобы, решая упражнения, учащиеся не механически применяли правила, а выбирали наиболее рациональный прием; например, надо $\frac{5}{28}$ увеличить в 7 раз; при этом предпочтень следует решение $\frac{5}{28:7}$, т. е. укрупнение взятых долей.

2. Еще раз отметим, что на данной стадии работы рассматривается изменение дроби от умножения и деления ее на целое число (увеличения дроби, уменьшение в целое число раз).

3. Часто для выяснения характера изменения дроби в зависимости от изменения числителя и знаменателя используют изменение частного при соответствующих изменениях делимого и делителя. Этот прием возможен только с оговоркой, что в данном случае без доказательства на дробное частное переносится известное свойство частного, выраженного целым числом.

4. Не следует откладывать решение двух простых задач на дроби—нахождение дроби числа и числа по известной величине его дроби—до того времени, когда ученики приступят к изучению действий умножения и деления на дробь; необходимо значительно раньше в порядке устных упражнений решать их с учениками; это будет также способствовать более глубокому усвоению нового числа (дробного).

Примеры. 1) Найти $\frac{1}{5}$ числа 135; $\frac{1}{12}$ числа 180; $\frac{3}{5}$ от 35; $\frac{5}{13}$ от 65 и т. д. 2) Найти число, $\frac{1}{4}$ которого составляет 9; $\frac{1}{25}$ которого составляет 8; $\frac{7}{11}$ которого составляет 14; $\frac{6}{13}$ которого составляют 18, и т. д. 3) Найти $\frac{1}{100}$ от 500; от 2000 и т. д. Найти 1% от 300; от 3000 и т. д.

5. В классе полезно вывесить таблицы, показывающие, например, дроби, из которых последующая дробь больше или меньше предыдущей в 2 или в 3 раза:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54} \text{ и т. д.}; \frac{5}{2}, \frac{5}{6}, \frac{5}{18}, \frac{5}{24} \text{ и т. д.}$$

$$\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15} \text{ и т. д.}$$

6. Следует обратить внимание учащихся на характер изменения дроби при изменении числителя и знаменателя на одинаковое число единиц. Учащиеся склонны считать, судя по большинству полученных ответов, что и в этом случае, как в случае увеличения членов дроби в одно и то же число раз, величина дроби не изменится. Полезно провести исследование этого вопроса и зафиксировать в таблице (хотя бы на занятиях кружка).

1. При прибавлении к членам правильной дроби по одному и тому же числу дробь увеличивается и остается правильной.

а) Увеличение числителя и знаменателя дроби на 1:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \dots$$

б) Увеличение числителя и знаменателя дроби на 3:

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{10}{11} < \frac{13}{14} < \dots$$

II. При прибавлении к членам неправильной дроби по одному и тому же целому числу дробь уменьшается, но остается неправильной (случай, когда дробь равна единице, не рассматривается).

в) Прибавление к членам дроби по единице:

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \frac{6}{5} > \dots$$

г) Прибавление к членам дроби по 3:

$$\frac{2}{1} > \frac{5}{4} > \frac{8}{7} > \frac{11}{10} > \dots$$

§ 11. Основное свойство дроби

Основное свойство дроби впервые также выясняется на конкретном представлении дроби в виде отрезка, разделенного на равные части, из рассмотрения процесса измерения одной и той же величины различными долями меры. Реже при объяснении основываются на свойстве частного не изменяться при изменении делимого и делителя в одно и то же число раз. Учащиеся конкретно могут проверить, что

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{16}, \text{ и обратно: } \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ и т. д.}$$

(рис. 29). Эта идея по существу совершенно нова для учащихся, а именно: новая мысль, что равные дроби могут быть представлены с различными числителями и различными знаменателями. Поэтому полезно, чтобы учащиеся давали пояснение:

1) записанные дроби равны, потому что в тех случаях, когда взятые доли в 2 раза или в 4 раза меньше взятых вначале, число их соответственно больше, и обратно, 2) или объяснение может быть дано на основании ранее усвоенного, а именно, что от умножения числителя дроби $\frac{3}{4}$ на 2 дробь увеличилась в 2 раза, а затем она уменьшилась в 2 раза от умножения ее знаменателя на 2. В результате изменились числитель и знаменатель дроби, но сохранилась ее величина.

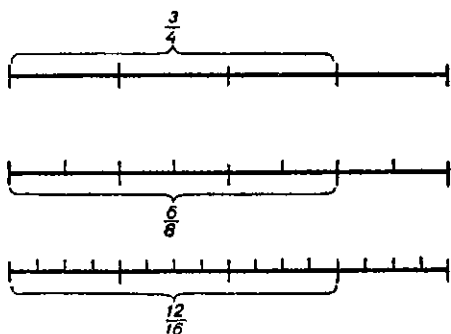


Рис. 29.

Упражнения могут даваться учащимся в различной форме:

1) Дается дробь, например $\frac{2}{3}$, и число, на которое надо умножить числитель и знаменатель этой дроби, например 8, и предлагается объяснить, почему вновь полученная дробь равна данной.

2) Дается дробь, числитель и знаменатель которой надо умножить на одно и то же число; например, дается дробь $\frac{2}{3}$ и другая дробь, например $\frac{16}{24}$, к виду которой надо привести данную дробь; предлагается выполнить преобразование и формулировать словами процесс преобразования.

При решении каждого из вышеуказанных упражнений обращается внимание учащихся на то, что преобразованная дробь выражена в более мелких долях, чем данная, а число долей у нее соответственно больше.

3) Тщательно прорабатывается вопрос, в каких более мелких долях могут быть выражены третьи доли, пятые и т. д., и делается вывод, что такое преобразование возможно только в том случае, когда новый знаменатель—число, кратное данному знаменателю.

Вопросы. а) Можно ли дробь $\frac{3}{8}$ выразить в виде $\frac{x}{24}$, т. е. в двадцать четвертых долях?

б) Какой должен быть знаменатель тех дробей в которых можно выразить восьмые доли; например $\frac{3}{8}$?

в) Предлагается подобрать несколько таких дробей, которыми можно заменить дробь $\frac{3}{8}$ и т. д.

Должно быть выполнено достаточное число упражнений, аналогичных вышеуказанным, и сделан вывод, что при умножении знаменателя на какое-либо число (кратное увеличению) надо и числитель умножить на то же число, чтобы величина дроби

не изменялась. Эту мысль в более подготовленных классах можно записать в виде формулы на буквах:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

§ 12. Сокращение дроби. Несократимая дробь

1. Ставится вопрос, обратный выше рассмотренному, а именно: в каких более крупных долях могут быть выражены дроби, если первоначально они выражены в восьмых долях, в шестых и т. д.? Можно рассматривать этот вопрос, используя конкретное

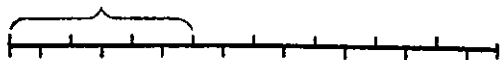


Рис. 30.

представление дроби отрезком (рис. 30); можно использовать выше решенные упражнения; например, имели:

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16}, \text{ запишем } \frac{6}{16} = \frac{3}{8} \text{ или}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{9}{24}, \text{ запишем } \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \text{ и т. д.}$$

После тщательно проведенных наблюдений делается вывод о том, что данную дробь можно выразить в более крупных долях только в том случае, когда числитель ее и знаменатель имеют общие множители. Соответствующему преобразованию дают название — сокращение дробей. Из рассмотрения примеров уславливают, что сокращение дроби позволяет заменить данную дробь дробью с меньшими членами:

$$\frac{18}{24} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Подчеркивается целесообразность вводимого упрощения, например, в случае, когда дробь $\frac{87}{116}$ представляют в виде $\frac{3}{4}$ и т. п. Обращается внимание

учащихся на то, что в этом случае мы имеем дело с преобразованием, а не с действием, что при сокращении дроби (и при приведении ее к другому знаменателю) дробь не увеличивается и не уменьшается. Обычно же учащиеся говорят: „Сократить дробь—это значит ее уменьшить“.

Практика сокращения дробей должна быть достаточная. В процессе работы учащиеся убеждаются в том, какое значение имеет знание свойств чисел, признаков делимости и разложения числа на множители¹. В результате работы учащиеся должны проводить сокращение дроби не только путем последовательного деления числителя и знаменателя на их общие делители, но и путем деления числителя и знаменателя на произведение их общих делителей или на их наибольший общий делитель. Надо следить, чтобы учащиеся сокращение дроби доводили до конца, т. е. получали несократимую дробь.

Часты случаи, когда учащиеся при сокращении оставляют в ответах сократимые дроби: $\frac{66}{154} = \frac{33}{77}$
(а дальше?); $\frac{195}{273} = \frac{65}{91}$; $\frac{210}{294} = \frac{35}{49}$; $\frac{144}{234} = \frac{72}{117}$ и т. д. Нередки случаи, когда даже в очень простых примерах ответ остается в таком виде: $\frac{4}{8}$, $\frac{3}{6}$ и т. п.

Особенное внимание следует уделить сокращению дробей с трехзначными числителем и знаменателем, так как эти упражнения вызывают большие затруднения у учащихся, при этом целесообразно приучать учащихся пользоваться таблицей простых чисел.

Подытоживая работу по вопросу сокращения дроби, можно дать более подготовленным классам запись на буквах:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}.$$

Сокращение дроби выполняется тогда, когда у числителя и знаменателя дроби имеется общий множитель, обозначенный в данном случае буквой m .

¹ Здесь уместно повторить все указанные вопросы, а также нахождение НОД и НОК.

2. Дается понятие несократимой дроби, как дроби, числитель и знаменатель которой числа взаимно простые. Решают соответствующие упражнения для приведения дроби к виду несократимой дроби.

Устные упражнения. Представить в виде несократимой дроби: 5%, 20%, 4%, 25% и т. д., 15%, 40% и т. д.

Формулировки определений и правил как по этому разделу, так и в дальнейшем изучаются по принятому в школе учебнику.

§ 13. Приведение дробей к общему знаменателю

После того как учащиеся выяснили основное свойство дроби и научились выражать ее со знаменателем, бóльшим или меньшим данного, ставятся перед учащимися примеры и задачи для сравнения дробей. В дальнейшем надо будет брать примеры (более сложные случаи) для сложения и вычитания дробей, на которых выясняется необходимость выражать дроби в одинаковых долях, или, как говорят, приводить дроби к общему (к одному) знаменателю. На нескольких сделанных примерах учащиеся приходят к осознанию того: 1) что общий знаменатель есть число, кратное знаменателям всех данных дробей;

2) что во избежание больших вычислений полезно взять общим знаменателем наименьшее общее кратное знаменателей (можно предоставить учащимся убедиться в этом, предлагая брать общим знаменателем различные числа, кратные наименьшему общему кратному знаменателей);

3) что все 3 случая нахождения наименьшего общего кратного чисел имеют место при отыскании наименьшего общего знаменателя и что следует пользоваться соответствующими приемами нахождения НОК.

Упражнения можно подбирать в такой системе:

1) По числу дробей, приводимых к общему знаменателю: две дроби, три дроби и т. д.

2) По приему нахождения НОК:

а) один из знаменателей—число, кратное числам, выражающим остальные знаменатели, например:

$$\frac{3}{8} ; \frac{5}{32} ; \frac{7}{64} \text{ или } \frac{5}{12} ; \frac{4}{9} ; \frac{1}{108} ;$$

б) все знаменатели—числа взаимно простые, например:

$$\frac{4}{5} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{11} \text{ или } \frac{3}{4} ; \frac{5}{7} ; \frac{8}{9} ;$$

в) общий случай приведения к общему знаменателю дробей:

$$\frac{3}{5} ; \frac{9}{16} ; \frac{1}{30} ; \frac{7}{40} ;$$

$$\begin{array}{l} 5 \\ 16=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 30=2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$$

$$\text{НОК}(5, 16, 30, 40)=2^4 \cdot 3 \cdot 5=240, \text{ или } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5=240$$

Общий знаменатель 240. Почему нецелесообразно брать общим знаменателем числа 480, 720 и т. д.?

Учащимся ставятся вопросы: какой знаменатель у первой дроби? на какое число надо умножить 5, т. е. каков будет дополнительный множитель, чтобы получить требуемый знаменатель 240? что надо сделать в таком случае с числителем дроби, чтобы величина дроби не изменилась? и т. д. для каждой дроби. Ошибка, которую допускают здесь учащиеся, заключается в том, что они говорят: „Надо умножить числитель“ или „Надо умножить дробь“. То и другое неправильно. Надо настаивать, чтобы учащиеся говорили: „Надо умножить и числитель, и знаменатель дроби на дополнительный множитель“.

Следует упражнять учащихся в устном нахождении **общего** знаменателя, когда общий знаменатель не превышает 100, и в устном решении упражнений вида а) и б).

§ 14. Примерные вопросы для контрольной работы

1) Какую часть составляет 17 см от метра? 31 мин. от часа? 102 кг от центнера?

2) Выписать неправильные (или правильные дроби) из ряда данных дробей:

$$\frac{13}{4} ; \frac{7}{15} ; \frac{18}{18} ; \frac{48}{33} ;$$

или: написать недостающий член дроби (x) с тем, чтобы дробь была неправильной (правильной):

$$\frac{15}{x}; \frac{x}{13}; \frac{11}{x}; \frac{x}{31}.$$

3) Поставить знаки равенства или неравенства (больше или меньше) между числами:

$$\frac{3}{7} \text{ и } \frac{21}{7}; \frac{11}{14} \text{ и } \frac{15}{14}; \frac{63}{48} \text{ и } 1; \frac{7}{8}; \frac{4}{13} \text{ и } \frac{7}{13}; \frac{15}{7} \text{ и } \frac{15}{11}.$$

4) Написать в виде смешанного числа:

$$\frac{32}{9}; \frac{156}{25}; \frac{312}{7}.$$

5) Обратить в неправильную дробь:

$$3\frac{2}{7}; 15\frac{5}{9}.$$

6) Найти значение x в выражениях:

$$9 = \frac{x}{11}; 1 = \frac{x}{27}; \frac{x}{13} = 8.$$

7) Написать число, в 3 раза большее, чем

$$\frac{2}{7}; \frac{2}{9}; 1\frac{3}{5};$$

в пять раз меньшее, чем $\frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{10}{11}$ и $10\frac{1}{2}$.

8) Во сколько раз $\frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{27}$? $\frac{1}{16}$ меньше $\frac{1}{4}$?
 $2\frac{1}{5}$ больше $\frac{1}{5}$? $3\frac{3}{4}$ больше $\frac{3}{4}$?

7 больше $\frac{2}{7}$? 5 больше $\frac{1}{3}$? $\frac{5}{7}$ меньше 5?

9) Сократить дроби:

$$\frac{63}{99}; \frac{70}{175}; \frac{288}{468}.$$

10) Привести дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \text{ и } \frac{4}{5}; \frac{5}{12}, \frac{11}{72} \text{ и } \frac{25}{144}; \frac{1}{180}, \frac{1}{135} \text{ и } \frac{1}{108}.$$

Глава IX

ДЕЙСТВИЯ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

§ 1. Сложение и вычитание дробных и смешанных чисел. Устные вычисления

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями.

Рассмотрение вопроса о сложении дробей начинают со случая сложения целого числа и правильной дроби. Затем рассматривают случай сложения дробей с одинаковыми знаменателями, давая конкретное истолкование выполняемой операции, при этом еще раз подчеркивают сущность сложения как продолжения счета и уясняют необходимость при сложении дробей с разными знаменателями заменять их равными дробями, у которых один и тот же знаменатель. С этой целью сначала используют аналогию дробей и именованных чисел.

Так, например, читают $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ как 5 девятых $+ 2$ девятых $= 7$ девятых, по аналогии со сложением именованных чисел $5 м + 2 м = 7 м$. При этом, читая пример, делают ударение не на наименовании долей, а на числе их. Эти приемы предохраняют учащихся от встречающейся ошибки при сложении дробей, а именно: от сложения их знаменателей¹.

¹ В „Арифметике“ Л. Ф. Магницкого учение о дробях сближается с учением об именованных числах, благодаря чему действия с целыми числами распространяются на действия с дробными числами.

Сложение дробей с различными знаменателями.

Не задерживаясь на первом вопросе, переходят к сложению дробей с различными знаменателями. На основании предыдущего обращают внимание учащихся на то, что нельзя складывать дроби с различными знаменателями, как нельзя соединять единицы различных наименований.

Для сложения $\frac{5}{9} + \frac{1}{3}$ выражают оба слагаемые в девятых долях и, сложив 5 девятых + 3 девятых = 8 девятых, получают: $\frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$. Эта мысль не представляет трудностей для учащихся.

Работа подытоживается указанием, что процесс сложения дробных чисел так же, как сложения целых чисел, состоит в том, что данные числа соединяются в одно число—сумму, содержащее в себе все единицы и все доли единицы всех слагаемых, или к одному числу присчитываются все единицы и все доли других чисел (слагаемых) (см. гл. III, § 2).

Отличие от сложения целых чисел в том, что присчитываются (соединяются) и доли единицы; сумма может быть и числом целым, и дробным (смешанным).

Пособием для наглядного представления суммы и разности дробей могут служить 2 линейки (они могут применяться в качестве наглядного пособия при сложении и вычитании целых чисел), представленные на рисунке 31а¹.

Указания к конструкции линейки (самодельной). На картон размером 30 см × 3,5 см (рис. 31а) наклеиваются сверху и снизу картонные полоски АВ и СД размером 30 см × 1 см. В промежуток СА вдвигается картонная полоска ЕF размером 30 см × 1,5 см. На полоски АВ, СД и ЕF наклеивается миллиметровая бумага, на которой нанесены деления (единицы или доли единицы).

Для демонстрации в классе изготавливается та же линейка из дерева длиной в 1—1,5 м, шириной в 25—30 см.

На рисунке 31б изображено сложение дробей $\frac{1}{3}$ (отложено на верхней неподвижной шкале, разделенной на 3 равные части) и $\frac{1}{4}$ (отложено на неподвижной линейке); ответ $\frac{7}{12}$ дан на нижней не-

¹ Упражнения с линейкой готовят к пользованию логарифмической линейкой.

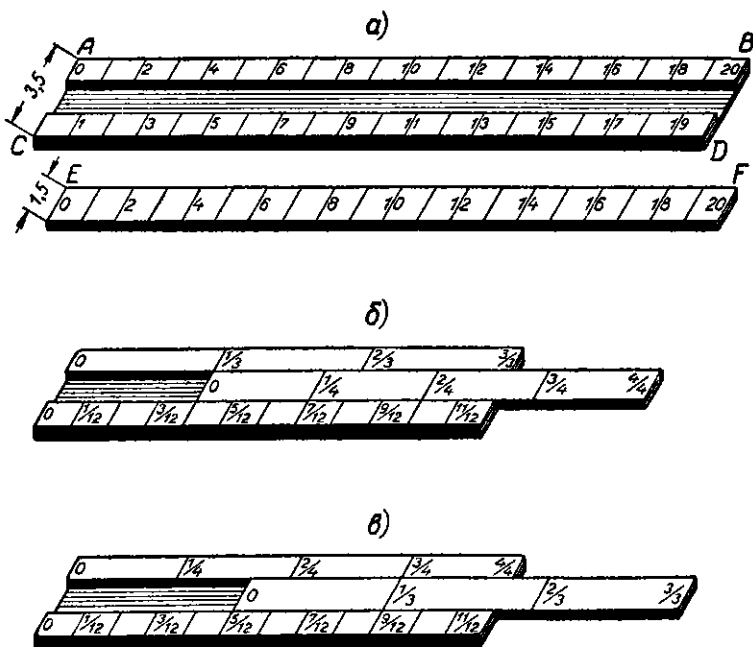


Рис. 31.

подвижной шкале, разделенной на 12 равных частей. На рисунке 31 а показано вычитание $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$.

Каждый учащийся может изготовить линейки из картона для индивидуального пользования, например, линейку для наглядного изображения суммы, разности пятых и восьмых долей, четвертых и девятых долей и т. п. Масштаб наносится на клетчатой или миллиметровой бумаге.

Вычитание дробей. Определение вычитания, а затем порядок объяснения вычитания дробей с одинаковыми и различными знаменателями тот же, что при изучении соответствующих случаев сложения. Вычитание дробей не представляет для учащихся новых логических трудностей.

Необходимо тщательно следить, чтобы учащиеся при сложении и вычитании дробей действительно оперировали с понятиями суммы и разности, и не позволять, по крайней мере в первые часы занятий, механически говорить о подписывании общего зна-

менателя. В дальнейшем учащиеся должны знать и четко формулировать определения и правила сложения и вычитания дробей и смешанных чисел, решать упражнения на сложение и вычитание дробных и смешанных чисел с многозначными знаменателями. Надо приучить учащихся располагать записи в заранее установленном порядке.

Примерная запись сложения и вычитания дробных и смешанных чисел:

$$1) \frac{11^2}{36} + \frac{7^3}{24} + \frac{5^6}{12} = \frac{22+21+30}{72} = \frac{73}{72} = 1 \frac{1}{72};$$

$$2) 4 \frac{7^3}{15} + 1 \frac{11}{45} + 8 \frac{4^5}{9} = 13 \frac{21+11+20}{45} = 13 \frac{52}{45} = 14 \frac{7^1}{45};$$

$$3) 35 \frac{9^9}{64} + 18 \frac{1^{12}}{48} + 10 \frac{5^{16}}{36} = 63 \frac{81+12+80}{576} = 63 \frac{173}{576}.$$

$$\begin{array}{l} 64=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 48=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 36=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ \hline \text{НОК } 2^6 \cdot 3^2 = 576 \end{array}$$

$$4) 5 \frac{4^4}{9} - 1 \frac{11^3}{12} = 4 \frac{16-33}{36} = 3 \frac{52-33}{36} = 3 \frac{19}{36}.$$

В частности, обращается внимание на осмысленную расстановку знака равенства учащимися.

Нередки случаи таких неверных записей:

$$4 \frac{2}{9} + 3 \frac{5}{12} = 4+3=7 \frac{8+15}{36} = \frac{23}{36} = 7 \frac{23}{36};$$

Дополнительный множитель при записи можно опускать, можно помещать его не справа, а слева. Иногда отдельно складываются целые числа, отдельно — дроби и дается запись:

$$4 \frac{7}{15} + 1 \frac{11}{45} + 8 \frac{4}{9} = 14 \frac{7}{45}; 4+1+8=13;$$

$$\frac{7}{15} + \frac{11}{45} + \frac{4}{9} = \frac{21+11+20}{45} = \frac{52}{45} = 1 \frac{7}{45}.$$

$$2\frac{4}{9} + 5\frac{7}{12} = \frac{16+21}{36} = \frac{37}{36} = 1\frac{1}{36}.$$

Для избежания пропуска целого числа, как это имеет место в последнем из приведенных примеров, полезно предлагать учащимся делать прикидку получаемого результата, округляя данные числа.

Замечания. 1) Ответ в результате действий с дробями всегда дается в простейшем (нормальном) виде, т. е. выполняется сокращение дроби и исключение целого числа из неправильной дроби. Дробь, получаемая в ответе, должна быть правильной и несократимой.

2) При сложении и вычитании дробей надо приучать учащихся находить по возможности общий знаменатель по соображению, не прибегая без нужды к общему приему, например, в случае

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{24} + \frac{5}{16}; \quad \frac{7}{18} + \frac{5}{9} + \frac{1}{27} \text{ и т. п.}$$

3) Выясняется нецелесообразность обращения смешанных чисел в неправильную дробь при сложении и при вычитании. Для этого рассматривается с учащимися несколько примеров, ярко подчеркивающих указанный факт, например:

$$39\frac{7}{24} + 67\frac{11}{12}; \quad 5689\frac{9}{10} - 316\frac{1}{5} \text{ и т. п.}$$

Обследования показывают, что целые классы учащихся и в настоящее время выполняют сложение и вычитание смешанных чисел обращением их в неправильные дроби.

4) Как при решении упражнений с целыми числами, так и при сложении и вычитании дробных чисел следует приучать учащихся по возможности выполнять проверку получаемого ответа (двумя способами).

Последовательность упражнений.

При подборе примеров на сложение и вычитание дробей: 1) Соблюдается последовательность в подборе дробей с знаменателями от более простых

¹ При сложении двух чисел, из которых одно больше 2, другое больше 5, не может в сумме получиться число $1\frac{1}{36} < 2$.

комбинаций к комбинациям более сложным (знаменатели 2, 4, 8, 16; 5, 10, 15 и др.).

2) Соблюдается последовательность в подборе упражнений на сложение и вычитание дробных и смешанных чисел, так, например, рассматриваются: сложение и вычитание целого числа (или целых чисел) и дробного числа, и обратно, сложение дробного числа и целого (или целых):

$$4 + \frac{2}{3}; 7 - \frac{4}{5}; \frac{4}{5} + \frac{2}{3} + 7 \text{ и т. д.};$$

сложение и вычитание смешанного числа и целого, целого и смешанного; сложение дробных чисел и смешанного числа; сложение нескольких дробных чисел; вычитание дробных и смешанных чисел без раздробления единицы уменьшаемого; вычитание дробных и смешанных чисел с раздроблением единицы уменьшаемого; совместные действия сложения и вычитания дробных и смешанных чисел.

В примерах последнего рода следует избегать примеров вида:

$$4 \frac{5}{7} - 6 \frac{2}{3} + 3 \frac{1}{2},$$

где имеет место случай вычитания из меньшего числа большего. Хотя на основании свойств суммы учащиеся и могут сначала выполнить действие сложения, затем вычитания и получить результат, но справедливость подобного преобразования не будет обоснована для учащихся на этой ступени их математических знаний до знакомства с теорией отрицательных чисел, и тем самым не будет достигнуто сознательное отношение учащихся к выполнению преобразования, о чем было сказано в гл. IV.

3) В процессе упражнения в сложении и вычитании дробных и смешанных чисел учащиеся все время упражняются в отыскании наименьшего общего кратного знаменателей данных дробных чисел. Надо брать примеры из задачникков так, чтобы учащиеся выполнили достаточно упражнений на все 3 случая нахождения НОК (гл. VII, § 10) и сознательно применяли тот прием, который скорее ведет к цели. Надо помнить, что только в процессе выполнения

действий сложения и вычитания дробных чисел учащиеся практически используют умение находить НОК чисел и этим закрепляют прежде приобретенные знания и навыки как по отысканию наименьшего общего кратного чисел, так и по вопросу отыскания дополнительных множителей для приведения дроби к определенному знаменателю, углубляя тем самым свое понимание свойств чисел.

На практике не следует полностью заканчивать одну группу указанных примеров, а затем переходить ко второй. Полезнее разнообразить упражнения.

4) Буквенную запись можно дать только для сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями: $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m}$.

Дополнительные указания.

1) Решая пример, в котором дано несколько дробей для сложения, складывают первые 2 дроби, к сумме их прибавляют третью дробь и т. д., при этом могут иметь место упрощения в том случае, когда при сложении части слагаемых получается целое число или смешанное число, причем получается дробь с более удобным знаменателем, и т. п. При использовании этого приема можно и изменять порядок слагаемых, если с учащимися на числовых примерах уже выяснена справедливость переместительного и сочетательного свойств сложения для дробных чисел.

$$\text{Пример: } \frac{28}{57} + 5\frac{1}{114} + 3\frac{1}{64} = 8\frac{33}{64};$$

$$\text{Решение: } \frac{28}{57} + 5\frac{1}{114} = 5\frac{56+1}{114} = 5\frac{57}{114} = 5\frac{1}{2};$$

$$5\frac{1}{2} + 3\frac{1}{64} = 8\frac{33}{64};$$

Само собой разумеется, что в примере вида

$$15\frac{1}{2} + 35\frac{3}{4} + 17\frac{1}{8} + 38\frac{2}{3} + 29\frac{1}{9} + 10\frac{3}{18}$$

удобнее сначала сложить слагаемые, дробная часть которых имеет знаменателями числа 2, 4, 8, а потом те слагаемые, дробная часть которых имеет знаме-

натели 3, 9, 18. Эти операции можно выполнить устно. Затем придется сложить только два смешанных числа: $68\frac{3}{8} + 78\frac{1}{18}$.

2) Все сделанные выше указания даны нами вместе для действий сложения и вычитания, но понятно, что с учащимися сначала рассматриваются вопросы сложения, затем вопросы вычитания, затем решаются упражнения на совместное применение действий сложения и вычитания с использованием скобок.

3) Как следует подходить к выяснению правила сложения, а затем вычитания дробных чисел: исходя из числового примера или из задачи? Выше мы останавливали внимание главным образом на последовательности в подборе упражнений. Мы считаем основной задачей этого раздела осознание учащимися правила сложения и вычитания дробных и смешанных чисел и прочный навык в выполнении этих действий. Что касается задач, решаемых сложением и вычитанием, то они по содержанию не представляют чего-либо нового по сравнению с задачами, решаемыми тем же действием на целых числах. Поэтому учитель может с равным правом брать и числовой пример для выяснения теории и какую-либо из простых (основных) задач.

4) Решение разнообразных задач с текстом в несколько действий на сложение и вычитание дробных чисел чередуется с решением числовых примеров.

Обычно учитель без труда подбирает сам примеры и упражнения для учащихся. Наибольшие трудности представляет для учителя подбор примеров на сложение и вычитание таких дробей, которые в сумме и разности дают несложные (сократимые) результаты.

Устные упражнения. 1) Надо приучить учащихся в тех случаях, когда вычисление может быть произведено устно, непременно устно его и выполнять. Для этого упражняют учащихся в устном сложении, а затем—вычитании простейших дробей. Такие упражнения полезно проводить каждый раз на уроке, постепенно усложняя упражнения как при изучении действия сложения и вычитания,

так и при изучении остальных действий. Устные вычисления должны применяться и при письменном решении сложных примеров (см. гл. I), и при решении задач. Надо предоставить самим учащимся оценивать, какой прием в том или ином случае—устное или письменное выполнение действия—следует предпочесть, и в результате учащиеся должны приобрести прочный навык складывать, а затем и вычитать устно дробные числа в тех случаях, когда знаменатели слагаемых или уменьшаемого и вычитаемого—вторые, четвертые, восьмые, шестнадцатые доли или когда слагаемые—пятые и десятые доли, шестые и двенадцатые доли и т. п.

2) При требовании устно выполнить действие в более сложных случаях полезно выполнять работу полуписьменно; например, в случаях:

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30}; \quad \frac{9}{40} - \frac{11}{80} + \frac{7}{20} \text{ и др.,}$$

условие выписывают на доске, а действия выполняют устно.

3) В случае сложения целого числа с дробным или смешанным числом сложение выполняется устно, то же—в случае вычитания дроби или смешанного числа из целого или целого числа из смешанного. Например:

$$1) 9 + 6\frac{4}{5} \quad 4) 46\frac{2}{3} + 19 \quad 7) 14 - 5\frac{3}{8}$$

$$2) 45 + 17\frac{9}{4} \quad 5) 19 + 31\frac{16}{19} \quad 8) 100 - 49\frac{5}{21}$$

$$3) 3\frac{2}{7} + 25 \quad 6) 52\frac{3}{4} - 17 \quad 9) 90 - 40\frac{3}{7} \text{ и т.п.}$$

4) Среди упражнений на вычитание и сложение двух или нескольких дробных чисел должны встречаться и упражнения с нулем: $a \pm 0$, $0 + a$.

Частные приемы. Во многих случаях при выполнении сложения и вычитания дробей для быстроты и удобства пользуются всевозможными частными приемами. Пусть надо вычитать

$$11\frac{7}{18} - 8\frac{23}{24}.$$

Трудность данного примера, заключающаяся в том, что дробь уменьшаемого меньше дроби вычитаемого, может быть обойдена.

Решение.

$$а) 11\frac{7}{18} - 8\frac{23}{24} = (11 - 8\frac{23}{24}) + \frac{7}{18} = 2\frac{1}{24} + \frac{7}{18} = 2\frac{3+28}{72} = 2\frac{31}{72};$$

б) тот же пример можно решить и другим приемом:

$$11\frac{7}{18} - 8\frac{23}{24} = (11\frac{7}{8} - 9) + \frac{1}{24} = 2\frac{7}{18} + \frac{1}{24} = 2\frac{28+3}{72} = 2\frac{31}{72}.$$

Сначала приучают учащихся пользоваться этими приемами на небольших числовых примерах, например:

$$(устно): 1\frac{7}{8} + 1\frac{7}{8} = 4 - \frac{2}{8} = 3\frac{3}{4};$$

$$1\frac{1}{4} + \frac{7}{8} = 2\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 2\frac{1}{8}.$$

Особенно убедительны примеры вида:

$$3\frac{1}{6} - 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}; 10\frac{1}{2} - 9\frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8};$$

$$3\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Решение этих примеров основывается на округлении дроби до ближайшего целого числа.

При изучении действий сложения и вычитания обыкновенных дробей, а затем десятичных, так же как при изучении умножения и деления дробей,

каждый раз на числовых примерах надо показывать учащимся, что для дробных чисел сохраняются все законы и свойства действий, имевшие место для целых чисел. И каждый раз следует ставить упражнения и вопросы, основанные на соответствующей теории¹. Так, в данном случае надо ставить упражнения для установления того, что сумма дробных

¹ Повторяется все известное учащимся о сложении целых чисел, о свойствах суммы и соответствующих следствиях, об изменении суммы в зависимости от изменения слагаемых, о проверке сложения и т. д. Аналогично проводится повторение при изучении всех операций с дробными числами (обыкновенными и десятичными).

чисел обладает свойствами переместительности и сочетательности; для понимания учащимися действий сложения и вычитания как взаимнообратных действий; для исследования изменения суммы и разности от изменения данных; для выяснения следствий из свойств действия, а именно: для того, чтобы к сумме прибавить какое-либо число (или отнять), достаточно прибавить его к одному из слагаемых (или отнять); чтобы к какому-либо числу прибавить сумму (или отнять), можно последовательно прибавлять к нему каждое слагаемое (или отнимать от него). План работы тот же, что рекомендован в главе III и главе IV для целых чисел. Время, затрачиваемое на эту работу, и детализация ее зависят от того, насколько класс овладел этими вопросами при рассмотрении их в действиях с целыми числами.

Указывается, что относительно сложения дробного числа с нулем ($a+0=a$; $0+a=a$) и вычитания нуля ($a-0=a$) придерживаются того же условия, что и при целых числах: число остается без изменения.

Кроме того, как указано выше в соответствующей главе действий с целыми числами, учитель может использовать любую простую задачу с текстом, чтобы, изменив числовые данные в условии, исследовать изменение результата, для того чтобы сделать проверку на основании зависимости между данными и результатом действий.

§ 2. Примеры для контрольной работы

Контрольная работа на сложение и вычитание дробей, как обычно, не может быть очень сложной; поэтому надо выделить для проверки путем контрольной работы основные знания и умения учащихся.

Выполнение действий:

- 1) $3\frac{4}{5} + 7\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$; 2) $\frac{7}{15} + 8\frac{1}{24} + 3\frac{13}{40} = ?$;
 3) $15 - 9\frac{7}{8} = ?$; 4) $4\frac{5}{48} - \frac{7}{12} = ?$; 5) $\frac{5}{30} - \frac{8}{45} = ?$;
 6) $9\frac{1}{15} + 7\frac{3}{20} - 11\frac{19}{30} = ?$; 7) $(5\frac{3}{4} - 2\frac{7}{8}) + (13\frac{1}{6} - 9\frac{5}{12}) = ?$.

Ответить на вопросы:

- 1) На сколько $\frac{5}{9}$ меньше $1\frac{1}{3}$?
- 2) Известна сумма двух слагаемых $1\frac{8}{9}$ и одно из слагаемых $1\frac{1}{3}$; найти другое слагаемое; или: сколько надо прибавить к $1\frac{1}{3}$, чтобы получить $1\frac{8}{9}$?
- 3) Разность двух чисел $\frac{1}{3}$; большее из этих чисел $\frac{5}{9}$; найти меньшее число; или: разность двух чисел $\frac{1}{3}$; уменьшаемое $\frac{5}{9}$, найти вычитаемое.
- 4) Выполнить проверку вычитания $1\frac{3}{7} - \frac{9}{14} = \frac{11}{14}$ двумя способами.
- 5) К одному из слагаемых прибавлено $\frac{2}{3}$, а от другого отнято $\frac{1}{6}$. Как изменилась сумма?
- 6) Ученик выполняет работу в течение 3 час., опытный рабочий может выполнить ту же работу в 2 часа. Какую часть этой работы выполняют оба в течение одного часа, если они работают вместе?

§ 3. Умножение дробного числа на целое число

Теория Действие умножения дробного числа на целое определяется так же, как и действие умножения целого числа на целое, т. е. как сложение равных слагаемых (конечного числа их):

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \cdot n &= \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b} = \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ слагаемых}} \\ &= \frac{a+a+a+\dots+a}{b} = \frac{a \cdot n}{b} \end{aligned}$$

Из сказанного следует, что действие умножения дроби на целое число однозначно и возможно при любом дробном значении множимого и любом целом значении множителя.

При этом сохраняются названия: $\frac{a}{b}$ — множимое, n — множитель; $\frac{a}{b} \cdot n$ — произведение; сохраняется и знак умножения (который следует помещать на одной высоте с чертой дроби). Правило умножения дроби на целое число дается учащимся. Как и при умножении целых чисел, условно применяют это правило к случаю, когда множитель 1 или 0, и согласно определению в первом случае произведение $\frac{a}{b} \cdot 1$ будет равно самому множимому, во втором случае произведение будет равно 0 (см. гл. V, § 1).

Примечание. Выполнение действия может быть упрощено в том случае, когда множитель (целое число) имеет общих делителей со знаменателем дроби, выражающей множимое. Пусть надо

$$\frac{a}{b} \cdot n, \text{ причем } n = mk \text{ и } b = rk, \text{ тогда } \frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{rk} \cdot m \cdot k =$$

$$\frac{a \cdot m \cdot k}{r \cdot k} = \frac{a \cdot m}{r}.$$

Следствие. В случае, когда знаменатель дроби, выражающей множимое, есть число кратное множителю, а именно:

$$b = k \cdot n, \text{ то } \frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{k \cdot n} \cdot n = \frac{a \cdot n}{k \cdot n} = \frac{a}{k},$$

т. е. при умножении дроби на целое число можно, вместо умножения числителя дроби на целое число, разделить знаменатель дроби на целое; применять этот прием удобно в случае, когда деление знаменателя на целое число выполняется точно. В частном случае, когда множителем является число, равное знаменателю дроби множимого, произведение дроби на ее знаменатель равно числителю этой дроби:

$$\frac{a}{b} \cdot b = \frac{a}{1} = a.$$

Если рассматривать дробь $\frac{a}{b}$ как результат измерения некоторой данной величины, то произведение этой дроби на целое число n будет соответствовать величине, в n раз большей, чем данная (или иначе: которая получится от увеличения данной величины в n раз).

Определение. В практике преподавания, как показывают просмотренные работы по математике, случай умножения дроби на целое число вовсе опускается или крайне бегло просматривается с точки зрения вопроса „увеличения дроби в несколько раз“, уже раньше известного учащимся. Но для того чтобы

ученики могли в дальнейшем сознательно подойти к усвоению нового смысла умножения на дробь, необходимо: 1) предварительно повторить с учащимися все то, что им известно о действии умножения, и, кроме того, 2) дать навык в преодолении тех трудностей, которые связаны с техникой выполнения действия умножения (сокращение и упрощение). Для этого полезно решить с учащимися несколько примеров и задач на все случаи умножения на целое число.

На примере повторяют определение умножения целых чисел: $3 \cdot 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$; затем применяют его к умножению дроби на целое число в простейшем случае; например:

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3+3+3+3+3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4}.$$

Учащиеся упражняются в чтении записи $\frac{3}{4} \cdot 5$ разными приемами:

„5 раз $\frac{3}{4}$ “, или „ $\frac{3}{4}$ взято 5 раз“, или „дробь $\frac{3}{4}$ умножить на 5“, или „дробь $\frac{3}{4}$ взять 5 раз слагаемым“, или „взять сумму пяти дробей, равных $\frac{3}{4}$ “, или „найти произведение дроби $\frac{3}{4}$ и 5“ и т. п.

Потом переходят к рассмотрению тех случаев умножения смешанного числа на целое, в которых легко сразу вычислить ответ, как-то: $3\frac{1}{2} \cdot 4$. Из определения умножения на целое число имеем:

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} &= 3 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{2} = \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 12 + 2 = 14. \end{aligned}$$

На этих примерах можно показать, что в случае умножения смешанного числа на дробь остается справедливым распределительный закон умножения по отношению к сложению, которым и пользуются в дальнейшем при вычислениях.

Также легко вычислить ответ в случае, когда исключение целого числа, а иногда и сокращение дробей не требует особых выкладок, как в примерах:

$$3\frac{1}{2} \cdot 5 = 3 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 15 + 2\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2};$$

$$3\frac{1}{4} \cdot 12 = 3 \cdot 12 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 36 + 3 = 39.$$

Затем переходят к общему случаю умножения (см. ниже), когда в процессе умножения требуется выполнить сокращение, например: $\frac{5}{8} \cdot 12 = \frac{5 \cdot 12}{8} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$

Замечания. 1) Даже после вывода общего правила умножения дробей и смешанных чисел учащиеся должны по возможности при умножении смешанного числа на целое отдельно находить произведение целой части множимого и отдельно произведение дробной части на множитель; это целесообразно как для упрощения работы, так и для развития наблюдательности учащихся и умения решать вопросы в отдельных частных случаях.

2) Во всех приведенных примерах сравнивают получаемое произведение со множимым и указывают учащимся, что при умножении на целое число (за исключением множителя 1) получаемое произведение всегда больше множимого.

С другой стороны, необходимо, чтобы *Упрощения.* учащиеся приобрели достаточный навык в тех упрощениях при выполнении действия умножения, которые указаны в настоящем параграфе т. е. должны решать примеры вида:

1) $\frac{5}{14} \cdot 21 = \frac{5 \cdot 21}{14} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$, причем ответ всегда дает-

ся в нормальном виде; 2) $\frac{5}{7} \cdot 7 = 5$; 3) $\frac{5}{21} \cdot 7 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Упражняя учащихся в делении числителя и знаменателя дроби на их общий множитель, надо требовать от учащихся не только прочного навыка в подобных преобразованиях, но и понимания смысла

преобразования, а именно: они должны понимать, что в записи дроби $\frac{5 \cdot 21}{14}$ произведение $5 \cdot 21$ есть числитель, выраженный целым числом, а 14—знаменатель, тоже выраженный целым числом. Учащимся известно, что величина дроби не изменяется при делении числителя и знаменателя на одно и то же целое число, в данном случае на 7. Надо еще обратить внимание учащихся на то, что числитель в данном случае есть произведение $5 \cdot 21$ и числитель уменьшается в 7 раз путем уменьшения только одного из сомножителей в 7 раз. Разбор подобного рода вопросов крайне важен; в главе об умножении целых чисел были указаны ошибки учащихся при делении и умножении произведения на какое-нибудь число, и не следует пропускать ни одной возможности закрепить соответствующие правила путем разбора и повторения их сущности.

§ 4. Деление на целое число (нахождение одной доли числа).

Вопрос о делении на целое число (нахождение одной доли числа) надо повторить с учащимися до того, как они перейдут к изучению вопроса об умножении и делении на дробь¹.

Надо указать учащимся, что определение деления остается то же, как и при делении целых чисел.

**Деление
целого числа
на целое.**

Вначале следует остановиться на случае деления целого числа на целое, когда результат не может быть выражен точно целым числом, несмотря на то, что эти упражнения имели место при выяснении понятия дробного числа. Выше, в главе VIII, § 6, уже было указано, что учащиеся не скоро привыкают к мысли, что деление $9:7$ или $7:9$ можно выполнить точно, выразив ответ дробным числом $\frac{9}{7}$ или $\frac{7}{9}$, т. е. не скоро осваиваются с распространением понятия числа на числа дробные (так же

¹ Задачу нахождения дроби (части) числа и обратную ей следует решать значительно раньше, чем вопросы умножения и деления на дробь.

обстоит дело впоследствии и при введении отрицательного числа).

Для облегчения понимания этого вопроса полезно приучить учащихся пользоваться определением действия деления, как действия, обратного умножению; в самом деле $9 : 7 = \frac{9}{7}$ и $\frac{9}{7} \cdot 7 = 9$ (точно); даже в случае $20 : 4$, когда 20 кратно 4, ответ можно записать дробью $\frac{20}{4} = \frac{5 \cdot 4}{4} = 5$ и $5 \cdot 4 = 20$.

Деление дроби на целое число. Следует повторить с учащимися примеры деления дроби на целое число (см. гл. VIII) как уменьшение дроби в некоторое (целое) число раз. При повторении уточнить некоторые вопросы и указать возможные упрощения.

Можно провести упражнения такого рода:

1) Как уменьшить дробь $\frac{3}{4}$ в 5 раз? $\frac{10}{7}$ в 5 раз?

Что сделается с дробью, если знаменатель ее умножить на 5? Числитель разделить на 5?

2) Какая дробь в 5 раз больше дроби $\frac{3}{4 \cdot 5}$?

Ответ: $\frac{3}{4}$. Объяснение: $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \cdot 5}$.

3) Можно ли найти еще другую такую дробь, чтобы от повторения ее слагаемым 5 раз тоже получилась дробь $\frac{3}{4}$? Отрицательный ответ ясен, ибо от повторения слагаемым дроби, большей чем $\frac{3}{4 \cdot 5}$, получится больший результат, в противном случае — меньший чем $\frac{3}{4}$. Надо упражнять учащихся в возможных упрощениях (аналогично случаям умножения дроби на целое число) при отыскании результата деления:

$$\frac{6}{11} : 2 = \frac{6 \cdot 2}{11} = \frac{3}{11}; \quad \frac{6}{11} : 6 = \frac{1}{11};$$

$$\frac{6}{11} : 2 = \frac{6}{11 \cdot 2} = \frac{3}{11}; \quad \frac{6}{11} : 8 = \frac{6}{11 \cdot 8} = \frac{3}{44},$$

причем учащиеся должны обосновывать право сокращать дробь, деля числитель (выраженный целым числом) и один из целых сомножителей знаменателя на одно и то же число.

Нахождение доли дробного числа.

От задачи деления на целое число (уменьшения в несколько раз) переходят к формулировке вопроса деления как „нахождения части (доли) от числа“, что является основой учения об умножении дробей и уже отчасти знакомо учащимся из предыдущего курса. Пояснения могут быть даны на величинах: пусть дробь выражает известную длину, надо разделить эту длину на несколько равных частей, например на 3 или 5 частей; тогда любая из этих частей выражается результатом, который получится от деления дроби на 3 или 5, и будет третьей, пятой и т. д. частью данной длины.

Нахождение доли смешанного числа.

Затем учащиеся упражняются в нахождении доли смешанного числа (деление смешанного числа на целое).

Начинают со случаев, допускающих различные упрощения. Таков, например, случай: найти девятую часть числа $72\frac{9}{11}$ или четверть числа $32\frac{1}{2}$, т. е. когда и целое число и числитель дроби — числа, кратные делителю.

Решение. $72\frac{9}{11} : 9 = 8\frac{1}{11}$ или $32\frac{1}{2} : 4 = 8\frac{1}{8}$

(проверить ответ умножением).

Общий прием, как известно, заключается в обращении смешанного числа в неправильную дробь и в последующем делении по правилу:

$$5\frac{7}{11} : 9 = \frac{62}{11 \cdot 9} = \frac{62}{99}.$$

Его должны знать учащиеся, но крайне полезно упражнять их сообразительность на приведенных выше частных приемах.

Если необходимо для повторения, учитель может рассмотреть с учащимися устно условие двух простых задач: деления на части и деления по содержанию,

хотя бы в случае деления смешанного числа на целое
а) разделить $7\frac{1}{2}$ на 5 частей, б) узнать, сколько раз
в $7\frac{1}{2}$ содержится 5.

Учитель должен постоянно обращать внимание на случай деления дроби на целое число, несмотря на то, что этот случай легко усваивается учащимися. Не контролируя своего ответа приведенными выше соображениями, учащиеся часто механически переставляют числа. Обычны неверные ответы, как, например:

$\frac{8}{9} : 4 = \frac{4 \cdot 9}{8}$; $\frac{5}{7} : 6 = \frac{6 \cdot 7}{5}$ и т. п. Некоторые учащиеся даже пишут: $\frac{8}{9} : 4 = 4 : \frac{8}{9}$; $\frac{5}{7} : 6 = 6 : \frac{5}{7}$ и т. д.

§ 5. Умножение на дробь.

Переходим к основному вопросу, самому трудному для понимания учащихся вопросу,—к умножению (а за тем и делению) на дробное число. Здесь ученик встречается с таким фактом, когда некоторому известному ему слову — умножить — придается новый смысл (расширяется понятие действия умножения). При умножении на правильную дробь произведение меньше множимого. Оно не может показывать, сколько раз множимое следует повторить слагаемым, так как нельзя взять число $\frac{2}{3}$ раза слагаемым, ничего нельзя

сделать $\frac{2}{3}$ раза¹, необходимо новое определение умножения. И надо сказать, что методика этого вопроса до настоящего времени не установлена, и вопрос, как преподавать умножение на дробь, должен быть еще подвергнут экспериментальной проверке для установления педагогической целесообразности того или другого подхода. Действительно, противоречие, имеющее место в случае умножения на дробь, представляет большие затруднения для понимания учащихся, что ясно и из того, что во многих руководствах, начиная со средневековых, постоянно ставился этот вопрос (первый, выдвинувший его, был Лука Пачиоли в 1494 г. в труде „Summa“) и искали пути обойти его различными остроумными предложениями.

В теоретических курсах (о чем уже была речь выше) умножение дроби на дробь выполняется согласно даваемому определению, что не применимо в школьном преподавании в силу своей абстрактности. Для уяснения вопроса учащимся надо дать ответ на вопросы:

¹ Условно в обиходе употребляется выражение „взял $3\frac{1}{2}$ раза“

или почему, или для чего, или на основании чего делается то или иное. Для них не будет убедительно формальное определение умножения. В школе для учащихся 11—12-летнего возраста необходима конкретизация нового понятия. Поэтому и вышеприведенное рассмотрение дроби как результата деления или измерения дает большие возможности в методическом отношении для школьного преподавания.

Укажем некоторые методические установки в вопросе об умножении на дробь.

1. Прежде всего следует остановиться на той точке зрения, которая господствовала в традиционной школе, а именно: на определении, которым ставилась задача установить единство между умножением на целое число, на дробное и т. д. Это определение читалось так: „умножить—значит из множимого составить новое число, называемое произведением, так же как множитель составлен из единиц“ (из положительной единицы).

1) Рассуждение для случая целых чисел. Пусть надо $7 \cdot 5$; число 5 составлено из единицы следующим образом: была взята единица, повторена слагаемым 5 раз, тогда получили: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$; возьмем множимое 7, из него составим точно так же произведение, как 5 составлено из единицы: $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$.

2) Рассуждение для случая умножения на дробь. Пусть надо $8 \cdot \frac{3}{4}$; число $\frac{3}{4}$ составлено из единицы следующим образом: была

взята единица, разделена на 4 части, получилась $\frac{1}{4}$ и т. д., запишем процесс рассуждения:

$$1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

возьмем множимое и составим произведение:

$$8; \frac{8}{4}; \frac{8}{4} + \frac{8}{4} + \frac{8}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Приведем для учителя немного из тех споров, которые велись вокруг этих вопросов. Умножая, например, 8 на $\frac{3}{4}$, можно рассуждать не так, как указано выше. Например, как $\frac{3}{4}$ могли получиться из единицы? Могла быть взята 1; повторена слагаемым 3 раза $1 + 1 + 1 = 3$.

Поступим так же и для составления знаменателя: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$;

$$\frac{3}{4} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1 + 1 + 1}$$

Таким путем также может быть составлен множитель из единицы. Выполним то же со множимым 8; $8 + 8 + 8 = 24$ (согласно сказанному выше правилу); $8 + 8 + 8 + 8 = 32$; $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$. Ответ не-

рен. Да и для умножения целых чисел, например $2 \cdot 16$, можно 16 составить из единицы различным способом; например, можно взять 1; $1 \times 4 = 4$; $4^2 = 16$ и затем проделать над множимым 2 то же самое, а именно: $2 \times 4 = 8$; $8^2 = 64$, и получится, что $2 \cdot 16$ должно равняться 64, что конечно, не соответствует истине.

II. Отдельные авторы дают следующее определение умножения на дробь: „умножить на дробь — значит часть множимого, определенную знаменателем множителя, взять столько раз слагаемым, сколько единиц в числителе множителя“¹. Основным недостатком приведенного определения является то, что неизвестно, когда следует употреблять соответствующее действие.

В примерах это ясно. Пусть надо умножить:

$$7 \cdot \frac{3}{4}; 8 \cdot \frac{2}{5}; 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{ и т. д.}$$

Согласно предложенному определению умножения ответ получится верный; но пусть надо решить конкретный вопрос: 1 кг кофе стоит 8 руб., сколько стоят $\frac{3}{4}$ кг. Какое действие нужно сделать

для решения этой задачи? Неизвестно, почему надо делать именно умножение. В современной методике вводится определение умножения на дробь как нахождения части числа, указываемой множителем, и, умея находить часть числа двумя действиями, выводят правило умножения на дробь (см. ниже).

Ввиду важности вопроса умножения на дробь и спорности его остановимся еще на других методических приемах до того, как перейти к методическим указаниям для непосредственного проведения работы в V классе нашей средней школы.

III. Укажем, что на практике (в частности, в нашей дореволюционной школе) и в советской школе распространено замалчивание трудности вопроса и необходимости введения нового определения. В этом случае рассуждения ведутся так, как будто по смыслу умножение на дробь совпадает с умножением на целое число, и без всяких оговорок свойства действия умножения на целое число переносят на случаи умножения на дробь. Рассуждения примерно

таковы: надо 8 умножить на $\frac{3}{4}$, умножаем 8 на 3, получаем результат, в 4 раза больший требуемого, потому что множитель 3 в 4 раза больше множителя $\frac{3}{4}$. Для получения правильного ответа уменьшаем полученное произведение в 4 раза и т. д.

Эта постановка вопроса производится главным образом тогда, когда рассматривают умножение на дробь как умножение на частное, причем вместо того, чтобы умножить на частное, умножают на делимое и полученное произведение делят на делитель.

При этом объяснении действие умножения лишается конкретного смысла, и опять-таки неизвестно, в каких задачах следует применять действие умножения на дробь.

¹ В основе рассматриваемых определений лежит истолкование числа как оператора (операторная теория дробного числа). См. Арнольд „Теоретическая арифметика“, Учпедгиз, 1938).

IV. Теперь остановимся на том методическом направлении, которое считает необходимым ввести новое условное определение умножения, соответствующее расширенному пониманию числа, и дает его в конкретной форме. Здесь мы также имеем различные методические приемы.

В „Методике арифметики“ Ф. Егорова обучение умножению дробей основывается на определении: „Нахождение части числа считается умножением на дробь“, и на числовых примерах выводятся правила умножения. Ф. Егоров стоял на той точке зрения, что в школе можно останавливать для умножения на дробь самостоятельное определение, наиболее просто и ясно указывающее конкретный смысл этого действия, а затем выяснить, что умножение дробей, как и умножение целых чисел, подчиняется и коммутативному (переместительному), и ассоциативному (сочетательному), и дистрибутивному (распределительному) законам. Придерживаясь в основном изложенной точки зрения Ф. Егорова на этот вопрос, Шохор-Троцкий совершенно справедливо говорит в своей методике, что можно предложить учащимся на веру принять это сообщение нового условного термина, „но можно к этому сообщению подойти и путем некоторых упражнений, как бы оправдывающих появление нового названия“, и т. д. И в практике школ сейчас к объяснению сущности умножения на дробь действительно подходят в большинстве случаев от решения конкретной задачи.

Следует отметить, что еще В. А. Евтушевский (тот же прием приведен у Борель-Штекеля) в своей методике подходил к умножению на дробь из решения задачи. Он брал задачу на целые числа, которая решается умножением, и, постепенно меняя в ней числа, переходил от нее к задаче, для решения которой приходится умножать на смешанное число и на правильную дробь.

Возражение, которое здесь делается, заключается в том, что по существу задача, решаемая умножением на целое число,— задача простая (решается одним действием), при дробном множителе—эта задача сложная (решается двумя действиями: делением и умножением). Не останавливаясь дольше на оценке того или иного из приемов объяснения умножения на дробь (при знакомстве с подлинниками читатель найдет много своеобразного и ценного у многих методистов), перейдем к соответствующим методическим указаниям для использования их в практической работе.

§ 6. Нахождение доли числа есть умножение¹

Прежде всего следует еще раз повторить с учащимися, как находится одна доля от целого числа,

¹ В журн. „Математика в школе“, в № 1 за 1949 г. и № 6 за 1950 г. помещены в дискуссионном порядке статьи „Об умножении на дробь“. По существу все предлагаемые приемы используют для вывода правила (целесообразно подобранную задачу) и принципиально не отличаются от приема, предлагаемого нами.

Некоторые авторы считают излишним предварение работы „нахождением доли числа“. Повторенный нами эксперимент подтверждает целесообразность (но не обязательность) рассмотрения этого вопроса.

от правильной дроби, от смешанного числа¹. Затем можно поступить двояко:

1) или сообщить учащимся, что вместо того, чтобы сказать: „найти одну седьмую долю числа“, говорят: „умножить число на одну седьмую“, и, проделав упражнения в случае, когда данное число целое, смешанное, дробное, вывести правило умножения на дробь;

2) или выяснить с учащимися вопрос на задаче. Например, 1 кг крупы стоит 2 руб. 60 коп. Каким действием узнается стоимость некоторого количества крупы, например 2 кг? 3 кг? 5 кг? Ответ: умножением. Какова будет стоимость $\frac{1}{2}$ кг? $\frac{1}{4}$ кг? Ответ: 1 руб. 30 коп.; 65 коп. Как узнали стоимость $\frac{1}{2}$ кг? $\frac{1}{4}$ кг? Ответ: нашли $\frac{1}{2}$ от 2 руб. 60 коп.; $\frac{1}{4}$ от 2 руб. 60 коп.

Таким же способом рассматривают еще несколько аналогичных задач по определению стоимости ткани, керосина и др. и выясняют, что стоимость определенного количества товара вычисляется действием умножения, когда количество товара выражено целым числом, а аналогичная задача, когда количество товара выражено дробным числом, сводится к нахождению части стоимости единицы товара (деление на целое число). Целесообразно и в этом случае действие, которым находится стоимость покупки, называть умножением. Первые упражнения решаются только устно, но затем переходят к записи решения, чтобы установить, что вместо того, чтобы писать $\frac{1}{2}$ от 260; $\frac{1}{4}$ от 260 (260 : 2; 260 : 4; или на других примерах:

¹ Повторяем, эти задачи крайне полезно начать решать с учащимися (в 2 действия) с первых дней обучения в V классе, беря, конечно, примеры, в которых находится дробь от целого числа и результат выражается целым числом (устные упражнения); например, найти $\frac{1}{9}$ от 360, 540 и т. д.; найти $\frac{1}{7}$ от 49, 217, 490 и т. п.

$\frac{3}{4} : 5$ или $2 \frac{1}{2} : 8$), пишут решение этой задачи при помощи действия умножения, а именно: $260 \cdot \frac{1}{2}$; $260 \cdot \frac{1}{4}$;
 $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}$; $2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$ и т. д.

И вместо того чтобы говорить, например: „Найти $\frac{1}{4}$ часть 260“ (260 разделить на 4 части), говорят: „260 надо помножить на одну четвертую“.

Надо решить много упражнений с учащимися, чтобы они научились находение доли числа понимать как умножение и называть умножением, и только после этого можно перейти к следующему вопросу— умножению на любую дробь.

§ 7. Нахождение нескольких долей числа двумя действиями

Учащиеся находили часть числа двумя действиями. Но, несмотря на это, следует четко и последовательно повторить в классе этот вопрос для установления в дальнейшем понятия умножения на любую дробь.

1. Вначале упражнения выполняются устно; например, надо найти $\frac{1}{4}$ от 320; $\frac{1}{5}$ от 400; $\frac{1}{7}$ от 63; $\frac{3}{4}$ от 16; $\frac{4}{5}$ от 40; $\frac{8}{9}$ от 180 и т. п. Во всех этих случаях ответом является целое число¹.

2. Затем переходят к случаям нахождения дроби целого числа при любом ответе: например $\frac{3}{4}$ от 15. Так как $\frac{1}{4}$ от 15 составляет $\frac{15}{4}$, $\frac{3}{4}$ от 15 равны

¹ Казалось бы, что эти простейшие вопросы должны быть известны учащимся V класса. Но не единичен факт, когда на вопрос, чему равняется $\frac{1}{6}$ от 24, учащийся V класса отвечает: „23 $\frac{5}{6}$ “, отнимая $\frac{1}{6}$ от 24.

$$\frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{15 \cdot 3}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}.$$

При последовательном выполнении действий учащиеся дают детальные объяснения, как они находят одну часть (долю) от числа, как находят несколько долей от числа или дробь числа.

3. Есть еще один навык, на который было обращено внимание выше, а именно—путем упражнения и здесь закрепляется понимание того, что одна четвертая часть от 15 равна 15 четвертям от единицы, а три четверти составляют $\frac{15}{4} \cdot 3$.

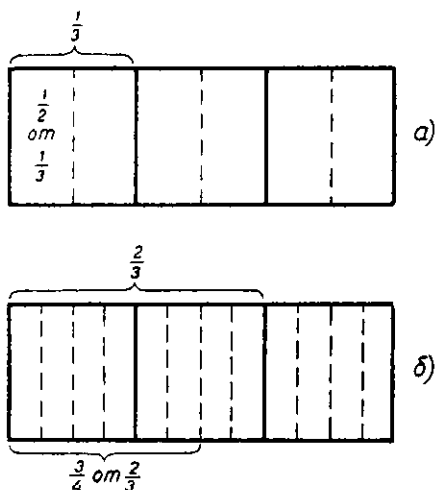


Рис. 32.

4. Затем переходят к рассмотрению случая нахождения дроби от смешанного числа в простейших случаях. Пусть надо найти $\frac{2}{3}$ от $2\frac{1}{4}$. Находят $\frac{1}{3}$ от $2\frac{1}{4}$, т. е. от $\frac{9}{4}$; получают $\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4} \cdot 2 = 1\frac{1}{2}$.

5. Решают задачи на нахождение процента от числа двумя действиями (в простейших случаях); например, найти 3%, 5%, 10%, 25% от 400, 1700 и т. д.

Наглядное изображение нахождения доли от доли, дроби от дроби показано на рисунке 32:

$$\frac{1}{2} \text{ от } \frac{1}{3} \text{ составляет } \frac{1}{6};$$

$$\frac{3}{4} \text{ от } \frac{2}{3} \text{ равны } \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

§ 8. Нахождение дроби числа умножением.

Умножение на правильную дробь

Учащиеся уже усвоили, что когда надо найти какую-либо долю числа, то говорят, что это число надо умножить на данную долю единицы. Теперь они подготовлены к усвоению следующего этапа работы. Вместо того чтобы говорить и писать: „Надо найти, чему равна любая часть (дробь) числа“, например $\frac{3}{5}$ или $\frac{4}{7}$, говорят и пишут: „Это число надо умножить на дробь, выражающую часть числа, которую надо найти“, а именно на $\frac{3}{5}$, на $\frac{4}{7}$.

Интересно отметить последовательность, с которой Л. Ф. Магницкий в своей „Арифметике“ приводил пояснительные примеры для действий с дробями, сближая изучение их с изучением действий над именованными числами. Пусть надо найти $\frac{3}{5}$ от $\frac{7}{8}$. Берется пуд (40 фунтов): $\frac{7}{8}$ пуда это 35 фунтов. Надо найти $\frac{3}{5}$ от 35 фунтов; получается 21 фунт, а 21 фунт составляет $\frac{21}{40}$ пуда. Значит, $\frac{3}{5}$ от $\frac{7}{8}$ составляют $\frac{21}{40}$; а $\frac{21}{40}$ можно получить перемножением числителей и знаменателей данных дробей.

1. Решают задачи с конкретным содержанием для того, чтобы выяснить цель, которую ставят себе, вводя условное определение умножения как нахождения дроби числа. Приведем пример.

Задача. Поезд проходит в 1 час 40 км. Сколько километров поезд пройдет за 3 часа? 6 час.? за $\frac{1}{2}$ часа? $\frac{3}{4}$ часа? $\frac{4}{5}$ часа?

Решение. За 3 часа— $(40 \cdot 3)$ км = 120 км—задача решается умножением;
за 6 час.— $(40 \cdot 6)$ км = 240 км— задача решается умноже-

нием; за $\frac{1}{2}$ часа— 20 км— задача решается нахождением $\frac{1}{2}$ числа;

за $\frac{3}{4}$ часа— 30 км— задача решается нахождением $\frac{3}{4}$ числа;

за $\frac{4}{5}$ часа— 32 км— задача решается нахождением $\frac{4}{5}$ числа.

Можно (но не обязательно) показать учащимся, что в последних трех случаях по существу они также решали задачу „умножением“. Действительно, если поезд за 1 час проходит 40 км, то за 1 мин. он проходит $40 : 60 = \frac{2}{3}$ (км); $\frac{1}{2}$ часа = 30 мин; $\frac{3}{4}$ часа = 45 мин.; $\frac{4}{5}$ часа = 48 мин., тогда

$$\text{за } \frac{1}{2} \text{ часа поезд пройдет } \frac{2}{3} \cdot 30 = 20 \text{ (км);}$$

$$\text{за } \frac{3}{4} \text{ " " " } \frac{3}{4} \cdot 45 = 30 \text{ (км);}$$

$$\text{за } \frac{4}{5} \text{ " " " } \frac{4}{5} \cdot 48 = 32 \text{ (км). Ответы те же.}$$

Рассматривая вышеприведенную запись, выясняют, что задачи одинакового содержания решали иногда действием умножения (когда время выражено целым числом), иногда—нахождением дроби числа (когда время движения поезда выражено дробным числом). Целесообразно и в этом последнем случае (когда находится дробь от числа) сказать, что задача решается умножением, но умножать приходится на дробь.

Поэтому можно записать:

$$\text{Найти } \frac{1}{2} \text{ от } 40 \text{ — значит } 40 \cdot \frac{1}{2};$$

$$\text{" } \frac{3}{4} \text{ от } 40 \text{ — значит } 40 \cdot \frac{3}{4};$$

$$\text{" } \frac{4}{5} \text{ от } 40 \text{ — значит } 40 \cdot \frac{4}{5}.$$

Умея находить дробь числа в два действия, пишут $\frac{3}{4}$ от 40, или $40 \cdot \frac{3}{4} = \frac{40}{4} \cdot 3 = \frac{40 \cdot 3}{4}$; $\frac{4}{5}$ от 40, или $40 \cdot \frac{4}{5} = \frac{40}{5} \cdot 4 = \frac{40 \cdot 4}{5}$. Аналогично (условно) можно записать, что $\frac{1}{2}$ от 40, или $40 \cdot \frac{1}{2} = \frac{40}{2} \cdot 1 = \frac{40 \cdot 1}{2}$.

Дается формулировка правила умножения целого числа на дробь.

2. Затем основную мысль выясняют на других задачах в тех случаях, когда на дробь (правильную) приходится умножать дробное число. Например: 1 куб. см сосны весит $\frac{7}{10}$ г. Сколько граммов весят 3 куб. см сосны? 8 куб. см? $\frac{3}{4}$ куб. см? $\frac{4}{5}$ куб. см? и т. д.

Запись:

1 куб. см весит $\frac{7}{10}$ г, или для общности $(\frac{7}{10} \cdot 1)$ г;

3 " весят $(\frac{7}{10} \cdot 3)$ г;

8 " " $(\frac{7}{10} \cdot 8)$ г;

$\frac{3}{4}$ куб. см " $\frac{3}{4}$ от $\frac{7}{10}$, или $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{4}$,

т. е. $(\frac{7}{10} : 4) \cdot 3 = \frac{7}{10 \cdot 4} \cdot 3 = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 4}$, и т. д.

Снова выясняется целесообразность введения нового определения: „Нахождение дроби числа есть умножение числа на эту дробь“.

Умножением на дробь решаются задачи, когда требуется найти дробь или часть какого-либо числа (целого или дробного).

Таким образом на примерах выясняется, что при умножении на дробь надо взять такую долю множителя, какую показывает знаменатель множителя, и повторить ее слагаемым столько раз, сколько долей во множителе.

На основании полученных записей $(\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 4}$ и др.) дается правило умножения дробных чисел.

Умножить на дробь—значит выполнить 2 действия: деление на ее знаменатель и умножение на числитель.

3. Надо решить 3-ю задачу, в которой придется умножать на смешанное число. Например, вопрос к задаче 1: „Сколько километров пройдет поезд за $2\frac{1}{2}$ часа, за $3\frac{3}{4}$ часа?“ Ни ответ, ни объяснение не затруднят учащихся. Чаще всего учащиеся скажут: „Надо $40 \cdot 2\frac{1}{2}$ “; „ $40 \cdot 3\frac{3}{4}$ “—и дадут ответы: 100 км; 150 км.

Порядок упражнений тот же, какой был указан при выяснении правила умножения на дробь.

Конечно, начинают с более простых числовых значений и затем переходят к общему случаю умножения дробей и смешанных чисел.

Найти $\frac{3}{4}$ от $5\frac{1}{2}$; вместо того, чтобы говорить: „найди $\frac{3}{4}$ от $5\frac{1}{2}$ “, можно сказать:

„ $5\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ “—это значит: $5\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11 \cdot 3}{2 \cdot 4}$ и т. д.

Решив достаточное число упражнений и задач, учащиеся сами смогут формулировать правило умножения дробей и смешанных чисел.

Особенно важно обратить внимание на аккуратность записи учащимися в случае нахождения части дробного числа, например:

$$\text{найти } \frac{7}{8} \text{ от } \frac{5}{14}; \quad \frac{5}{14} \cdot \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 7}{14 \cdot 8} = \frac{5}{16},$$

и на своевременное сокращение дроби (множителей числителя и знаменателя).

Мы еще раз подчеркиваем, что каждый этап работы, указанный нами, должен быть крайне тщательно рассмотрен, и к следующему этапу можно переходить только тогда, когда прочно усвоен предыдущий, на котором базируется последующий. И в то же время, разбирая каждый последующий вопрос, надо тщательно рассматривать все детали, давать пояснения той теории, на которой базируется выяснение данного вопроса, и надо тщательно следить за правильностью, последовательностью и аккуратностью всех записей.

4. Укажем еще один прием решения той же задачи, который заключается в составлении предварительного плана решения сложной задачи. При этом приеме запись ведется иначе, чем было указано выше.

Задача. Привезли 3 ящика пряников по $4\frac{1}{4}$ кг пряников в каждом, причем 1 кг пряников стоит $9\frac{1}{2}$ руб. В школу выдали 12 кг пряников. На сколько рублей осталось пряников?

Надо узнать?

Каким действием:

- | | | |
|---|---|------------|
| { | 1) сколько весят все пряники? | умножением |
| | 2) сколько осталось пряников (по весу)? | вычитанием |
| | 3) сколько стоят оставшиеся пряники? | умножением |

Учащиеся без труда составят числовую формулу решения задачи:

$$9\frac{1}{2} \cdot (4\frac{1}{4} \cdot 3 - 12).$$

Затем следуют вычисления: $9\frac{1}{2} \cdot (12\frac{3}{4} - 12)$, и получается

$$9\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4},$$

этого умножения на дробь учащиеся выполнить не могут. Учащиеся видят необходимость умножения дробных чисел, видят, что их затруднение произошло от того, что они предполагали, что останется целое число килограммов пряников. Учащиеся могут на практике рассчитать стоимость оставшихся $\frac{3}{4}$ кг пряников, если 1 кг стоит $9\frac{1}{2}$ руб.; для этого им надо найти $\frac{3}{4}$ от $9\frac{1}{2}$, но, когда

составляли план, они не знали, что придется находить дробь (часть) числа, не могли предвидеть, что число килограммов оставшихся пряников получится дробное. Но ведь у них ясно написано, что 3-е действие, а именно стоимость оставшихся пряников, узнается умножением, другими словами, умножение на дробь и нахождение дроби числа выполняются в задачах для решения одинаковых вопросов.

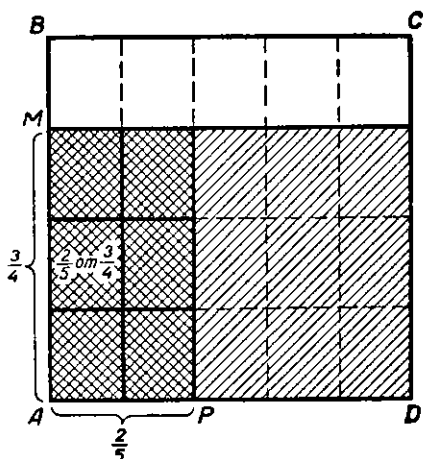


Рис. 33.

Графическая
иллюстрация¹.

Применение условного определения умножением можно показать на практике—в случае, когда надо определить площадь прямоугольника, длина которого $\frac{2}{5}$ м, а высота $\frac{3}{4}$ м (рис. 33). Вспоминают случай, когда длина и ширина прямоугольника выражены целыми числами; например, длина прямоугольника 2 см, высота 7 см: 1) Устанавливают, что площадь прямоугольника первоначально вычислялась непосредственным счетом квадратных единиц (меры площади). Таким образом получали, что площадь данного прямоугольника 14 см². 2) Потом на следующей ступени своего математического развития учащиеся вычисляют площадь прямоугольника косвенным путем, а именно получают результат перемножением чисел, выражающих линейные размеры прямоугольника.

Найдем площадь искомого прямоугольника счетом квадратов. Квадрат $ABCD$ в уменьшенном масштабе изображает 1 м². Сторона AD квадрата разделена на пятые доли метра; сторона AB —на четвертые доли; прямые, проведенные параллельно сторонам квадрата, разбивают его на 20 малых прямоугольников. Малый прямоугольник равен $\frac{1}{20}$ части 1 кв. м. Искомая площадь малого прямоугольника, длина которого $AP = \frac{2}{5}$ м и ширина $AM = \frac{3}{4}$ м, составляет 6 малых прямоугольников, т. е. непосредственным подсчетом мы получаем, что площадь искомого прямоугольника равна $\frac{6}{20}$ м² = $\frac{3}{10}$ м² ($\frac{2}{5}$ от $\frac{3}{4}$ составляют $\frac{3}{10}$). Если по аналогии с целыми числами мы будем косвенным путем вычислять площадь искомого прямоугольника, то $\frac{2}{5}$ придется умножить на $\frac{3}{4}$, т. е. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

¹ Лука Пачиоли (XV—XVI вв., Италия) так объяснил наглядно умножение на дробь: „Если $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$ суть стороны квадрата, то $\frac{1}{4}$ представляет площадь этого квадрата“.

§ 9. Упражнения на умножение дробных чисел

1. Сопоставляя случаи умножения на целое число, на дробь и на смешанное число, надо повторить с учащимися, что показывает целый множитель, что показывает дробный множитель и множитель, являющийся смешанным числом.

2. Выяснить на примерах, что хотя слову „умножение“ в случае умножения на дробь придается новое значение по сравнению с тем, какое оно имеет в случае множителя, выраженного целым числом, но что основные свойства произведения целых чисел остаются справедливыми и для случая умножения дробей (см. главу V), а именно: переместительный, сочетательный и распределительный (относительно сложения) законы умножения; правило изменения произведения с изменением сомножителей сохраняется.

3. Еще раз указать учащимся об умножении числа на единицу и на нуль, например:

$$73 \cdot 1 \text{ и } 1 \cdot 73; 25 \cdot 0 \text{ и } 0 \cdot 25; \frac{3}{4} \cdot 1 \text{ и } 1 \cdot \frac{3}{4};$$

$$\frac{2}{5} \cdot 0 \text{ и } 0 \cdot \frac{2}{5}.$$

4. Тщательно выяснить, в каком случае и почему произведение больше множимого, в каком случае — равно множимому, в каком случае — меньше множимого. С этой целью очень полезно вывесить в классе таблицу примерно такого вида:

$$60 \cdot 3 = 180; 60 \cdot 2 = 120; 60 \cdot 1 = 60; 60 \cdot \frac{3}{4} = 45;$$

$$60 \cdot \frac{1}{2} = 30; 60 \cdot \frac{1}{4} = 15 \text{ (запись в столбец).}$$

5. При вычислении произведения нескольких сомножителей сначала обозначают все действия над числителями и знаменателями, затем производят возможные упрощения и только после этого выполняют действия, например:

$$3 \cdot \frac{2}{5} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} \cdot 10 = \frac{17 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 10}{5 \cdot 2 \cdot 15} = \frac{51}{5} = 10 \frac{1}{5}.$$

6. Рассматривая случаи умножения дробей, учащиеся могли бы вывести несколько соответствующих правил, но, конечно, не следует давать учащимся большого числа правил. Запоминают и формулируют словами общее правило умножения двух дробных чисел. Полезно приготовить стенную таблицу и в виде числового примера, и в виде буквенной записи, как, например:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Полезно в качестве упражнения предоставить самим учащимся применить общее правило к частным случаям умножения дробного числа на целое (правило было известно) и целого числа на дробь, для которого особого правила не было дано. Но после того (но не ранее) как учащиеся убедились в справедливости переместительного свойства произведения для случая умножения дробных чисел, можно вывести правило умножения целого числа на дробь на основании того, что

$$\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}.$$

Общее правило будет применено к указанным частным случаям, если рассматривать целое число как дробь, числитель которой равен этому целому числу, а знаменатель равен одной единице.

Для случаев умножения смешанного числа на дробь, на целое, на смешанное и т. д. не дается особых правил. Достаточно указать, как общий случай, возможность обратить смешанное число в неправильную дробь для выполнения действия умножения.

В случае умножения смешанного числа на целое, и обратно, учащиеся часто поступают, как было указано выше (§ 3).

7. Наконец, крайне полезно упражнять учащихся в самостоятельном составлении задач на различные случаи умножения. Следует решать примеры и задачи на сложение, вычитание, умножение, применение скобок.

Замечания. 1) Повторяем: сокращение дроби должно производиться в процессе умножения, а не в результате; так, не следует писать:

$$\frac{10 \cdot 7 \cdot 92}{25 \cdot 8} = \frac{6440}{200} = 32 \frac{40}{200} = 32 \frac{1}{5},$$

а надо писать:

$$\frac{10 \cdot 7 \cdot 92}{25 \cdot 8} = \frac{7 \cdot 23}{5} = 32 \frac{1}{5}.$$

Несоблюдение этого правила приводит к крайне громоздким вычислениям. Подобный недочет в выполнении умножения крайне распространен.

2) В случае, когда надо выполнить последовательно несколько раз действие умножения, надо писать сразу (не вычисляя $2\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}$):

$$2\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot 10 = \frac{13 \cdot 2 \cdot 10}{5 \cdot 7} = \frac{52}{7} = 7\frac{3}{7}.$$

3) Во избежание встречающихся впоследствии ошибок при делении дробей¹ не следует разрешать и при умножении дробей сокращать дроби до того, как записано умножение числителей и знаменателей, а именно, не следует писать:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{16}{25} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{25},$$

а надо написать:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{16}{25} = \frac{5 \cdot 16}{8 \cdot 25} = \frac{2}{5}.$$

4) Следует обратить внимание на ошибку, которую допускают учащиеся, перемножая отдельно целые числа и отдельно дроби при требовании перемножить смешанные числа, например:

$$4\frac{4}{5} \cdot 10\frac{1}{3} = 40\frac{4}{15} (?)$$

¹ При делении $\frac{5}{6} : \frac{12}{5}$ неправильно сокращают $\frac{1}{1} : \frac{2}{1}$.

Разъяснить, что в данном случае надо умножить $(4 + \frac{4}{5}) \cdot (10 + \frac{1}{3})$, и указать на аналогичную задачу с целыми числами: $(4 + 3) \cdot (10 + 2) = 7 \cdot 12 = 84$, а при умножении $4 \cdot 10 + 3 \cdot 2$ они получили бы неправильный ответ 46.

5) Обращаем внимание на часто имеющую место ошибку, когда в случае

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2}{8 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

учащиеся в ответе пишут обратное число 9 вместо $\frac{1}{9}$.

6) Можно предлагать учащимся упражнение в такой форме: дать множимое, например $7, \frac{3}{4}, 2\frac{1}{2}, 1$, и предложить учащимся самим написать такой множитель, чтобы произведение было равно, больше или меньше множимого.

7) Принимая $1\% = \frac{1}{100}$, решают с учащимися простейшие задачи: 1) на нахождение процента числа и 2) на нахождение процентных денег, которые приносит сумма за некоторое (данное) время (см. главу XI „Проценты“).

В какую сумму обратятся 870 руб., приносящих 2% годовых, через год? через 8 мес.?

8) Решают задачи на 3 действия (см. главу XII „Задачи“) с дробными числами. Среди решаемых задач должны быть задачи с геометрическим содержанием.

§ 10. Примеры для контрольной работы

1) Вычислить: 2) Найти произведения:

а) $\frac{7}{8}$ от 72

а) $3\frac{1}{12} \cdot 16 =$

б) $\frac{9}{16}$ от $\frac{14}{27}$

б) $12 \cdot 4\frac{1}{3} =$

в) $\frac{3}{11}$ от $\frac{3}{11}$

в) $6\frac{2}{5} \cdot 1\frac{9}{10} =$

$$г) \frac{4}{9} \text{ от } 7\frac{1}{5}$$

$$г) 3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{7} =$$

$$д) 7 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$е) 14 - 2\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2} =$$

3) Ответить на вопросы:

а) Будет ли произведение больше или меньше множимого: $7 \cdot 4\frac{2}{3}$; $9 \cdot \frac{4}{5}$; $\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2}$.

б) Чему равен пропущенный сомножитель:

$$x \cdot 6\frac{1}{3} = 6\frac{1}{3}; \quad x \cdot 1 = 1.$$

4) Задача. Длина прямоугольного участка земли равна 280 м, а ширина составляет $\frac{3}{7}$ длины. Сколько семян потребуется для засева $\frac{2}{5}$ этого участка, если на 1 м² требуется $11\frac{1}{5}$ г семян?

§ 11. Нахождение числа по известной величине его дроби

Прежде чем переходить к действию деления на дробь, с учащимися повторяют нахождение неизвестного числа по известной величине его дроби (части), т. е. когда известно, какая именно часть дана и сколько она составляет.

Начинают с нахождения числа по известной доле его; эти упражнения известны учащимся для случая, когда часть числа выражена целым числом; например, если $\frac{1}{3}$ известного числа составляет 16, в этом случае учащийся сразу говорит, чему равно все число. Особенно важно в этом случае проверять решение как при помощи деления, так и при помощи умножения:

$$\frac{1}{3} \cdot x = 16; \quad x = 16 \cdot 3 = 48. \quad \text{Проверка: } 48 : 3 = 16.$$

Затем переходят к случаям, когда дробь числа выражена правильной и неправильной дробью и смешанным числом, и требуют устного и письменного решений, например:

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}; \text{ устно: } x = 1\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3}x = 2\frac{1}{2}; \text{ устно: } x = 7\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{4}x = 3\frac{1}{3}; \quad x = 3\frac{1}{3} \cdot 4 = 12 + \frac{4}{3} = 13\frac{1}{3}$$

или письменно:

$$\frac{1}{3}x = \frac{6}{7}; \quad x = \frac{6}{7} \cdot 3 = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}.$$

Затем можно перейти к нахождению числа по любой известной величине его дроби двумя действиями. Для наглядности следует условие иллюстрировать чертежом (см. главу о задачах); решать с учащимися задачи конкретного содержания (на вычисление стоимости, расстояния, возраста и т. п.). Запись вести в такой форме:

$$\frac{3}{4} \text{ неизвестного числа равны } 96, \text{ или } \frac{3}{4}x = 96;$$

$$\frac{1}{4} \text{ неизвестного числа равна } \frac{96}{3}, \text{ или } \frac{1}{4}x = \frac{96}{3};$$

$$\frac{4}{4} \quad " \quad " \quad \text{равны } \frac{96 \cdot 4}{3}, \text{ или } \frac{4}{4}x = \frac{96 \cdot 4}{3}.$$

Затем можно перейти к решению более сложных задач.

§ 12. Деление дробных чисел

Определение деления дробных чисел следует дать, как и в случае деления целых чисел, следующее: деление есть действие, обратное умножению; разделить одно число на другое—значит по произведению двух сомножителей и одному из них найти другой сомножитель. В силу переместительного

свойства умножения, частное не зависит от того, что узнается—множимое или множитель.

1. Учитель может вывести правило деления на дробь в таком же порядке, в каком эта работа проводится в случае умножения на дробь, а именно: на конкретной задаче показать, что изученный вопрос нахождения числа по известной его части (по величине дроби) решается делением, а именно—делением на дробь.

Если 4 м ткани стоят 4 руб. 80 коп., то 1 м	} задачи решают- ся деле- нием
ткани стоит $(480 : 4)$ коп. = 1 руб. 20 коп.	
„ 3 м ткани стоят 4 руб. 80 коп., то 1 м	
ткани стоит $(480 : 3)$ коп. = 1 руб. 60 коп.	
„ 2 м ткани стоят 4 руб. 80 коп., то 1 м	
ткани стоит $(480 : 2)$ коп. = 2 руб. 40 коп.	
Если $\frac{1}{2}$ м ткани стоит 4 руб. 80 коп., то 1 м	
ткани стоит 9 руб. 60 коп.; $\frac{1}{2}x = 4$ руб.	
80 коп., где x —стоимость 1 м.	

Пусть $\frac{3}{4}$ м ткани стоят 4 руб. 80 коп. Сколько стоит 1 м этой ткани (x)? Вопрос последней задачи аналогичен рассмотренным выше: и эта задача решается делением; $\frac{3}{4}$ м ткани стоят 4 руб. 80 коп; $\frac{3}{4}x = 480$; $x = \frac{480 \cdot 4}{3}$ (и эту задачу решаем делением: $x = 480 : \frac{3}{4}$. Ответ нашли двумя действиями).

Другими словами, условное определение деления как нахождения числа по известной величине его дроби имеет определенную цель—все задачи одного рода решать одним действием, независимо от чисел, данных в условии (целые, дробные). Отсюда и правило деления на дробь. Можно составить, как и в случае умножения на дробь, план решения более сложной задачи и прийти к тому же выводу. Но можно предпочесть другой путь сведения вопроса о нахождении числа по известной величине его дроби к делению на дробь.

2. Пусть надо разделить целое число на дробь: $17 : \frac{2}{3}$, т. е. надо найти число, которое, будучи умножено на $\frac{2}{3}$, дает в результате 17. Так как умножить число на $\frac{2}{3}$ — это значит найти $\frac{2}{3}$ этого числа, то

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \text{ искомого числа составляют } 17; \\ \frac{1}{3} \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \frac{17}{2}; \\ \frac{3}{3} \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \frac{17}{2} \cdot 3 = \frac{17 \cdot 3}{2}, \text{ или} \\ 17 : \frac{2}{3} = \frac{17 \cdot 3}{2} = \frac{51}{2} = 25 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

При решении этого примера и в дальнейшем надо ставить вопросы: „Ожидали ли вы получить в ответе число $(25 \frac{1}{2})$, большее, чем данное (17)?“ „Почему?“

О т в е т. „17 составляло только $\frac{2}{3}$ искомого числа, значит, искомое число должно быть больше, чем 17“

3. Известно, что $\frac{3}{4}$ числа равны 19. Это означает, что неизвестное число, умноженное на $\frac{3}{4}$, равно 19; $x \cdot \frac{3}{4} = 19$. Что надо найти?

О т в е т. Неизвестное множимое.—Что известно?

О т в е т. Произведение и множитель.—Чему равно произведение? О т в е т. 19.—Назовите множитель.

О т в е т. $\frac{3}{4}$.—Каким действием находят один из сомножителей, когда известно произведение и другой сомножитель? О т в е т. Делением. Запись: $19 : \frac{3}{4}$. — Как найти ответ на поставленную задачу?—Надо найти число, если известно, что $\frac{3}{4}$ его равно 19 (двумя действиями). О т в е т. $\frac{19 \cdot 4}{3}$.

Запись: $19 : \frac{3}{4} = \frac{19 \cdot 4}{3} = \frac{76}{3} = 25 \frac{1}{3}$.

4. Пусть надо разделить дробь на дробь: $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$.
Это значит найти число x при условии $x \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$, т. е. при условии, что, умножив его на $\frac{2}{3}$, получим в произведении $\frac{5}{7}$; это значит, что $\frac{2}{3}$ искомого числа составляют $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}x = \frac{5}{7}$; $\frac{1}{3}x = \frac{5}{7 \cdot 2}$; $\frac{3}{3}x = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2}$; т. е. $\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 2} = \frac{15}{14} = 1 \frac{1}{14}$.

При решении этих примеров полезно обращать внимание учащихся на то, как составляется частное из чисел, которые являются числителями и знаменателями делимого и делителя.

На этих примерах учащиеся уже могут заметить связь деления на дробь с нахождением числа по известной величине его части (правильной дроби) и понять возможность получения частного, большего чем делимое.

5. Затем выполняют упражнения, взяв делимым смешанное число: $\frac{3}{4}$ неизвестного числа равны $2 \frac{1}{2}$; найти неизвестное число. Путем такого же ряда вопросов, как выше было указано, получают запись деления, которое требуется выполнить:

$$x = 2 \frac{1}{2} : \frac{3}{4}.$$

С другой стороны, x находится как число, если известно, что часть (дробь) его $\left(\frac{3}{4}\right)$ составляет $2 \frac{1}{2}$, — двумя действиями: $\frac{3}{4}x = 2 \frac{1}{2}$ ($\frac{3}{4}$ неизвестного числа равны $\frac{5}{2}$);

$$\frac{1}{4}x = \frac{5}{2 \cdot 3}; x = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3}$$

т. е. неизвестное число $x = 2 \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 3} =$
 $= \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}.$

Замечания. 1) Необходимо проделать с учащимися достаточное число упражнений подобного рода, сопоставлять данные и результат, выяснять, какую задачу решают делением на правильную дробь.

2) В процессе работы полезно противопоставлять 2 вопроса: а) умножить на правильную дробь—значит найти часть (дробь) числа (результат меньше множимого); б) разделить на правильную дробь—значит найти число по известной величине его части (дроби) (результат больше делимого). Например, предлагается поставить вопросы к следующим упражнениям и дать ответ (устно): $9 \cdot \frac{2}{3}$; $9 : \frac{2}{3}$; $10 \cdot \frac{2}{5}$; $10 : \frac{2}{5}$ и т. п.

3) Надо решать упражнения (например, найти $\frac{7}{9}$ числа, $\frac{2}{3}$ которого составляют 54, и аналогичные), в которых требуется выполнить и умножение и деление на правильную дробь.

4) Приучить учащихся выполнять проверку правильности ответа обратным вопросом; например, в тех случаях, когда требуется найти дробь числа, проверку делают нахождением числа по известной величине его дроби, и обратно.

§ 13. Правила деления дробных чисел

1. Сопоставляются и подытоживаются результаты проделанной работы:

1) случай деления на целое число:

$$68 : 4 = 17; 4 \frac{3}{8} : 4 = \frac{35}{8} : 4 = \frac{35}{8 \cdot 4} = \frac{35}{32} = 1 \frac{3}{32};$$

$$\frac{5}{6} : 4 = \frac{5}{6 \cdot 4} = \frac{5}{24};$$

2) случай деления на правильную дробь:

$$69 : \frac{1}{4} = 69 \cdot 4 = 276; \frac{1}{4} \text{ неизвестного числа равна } 69;$$

$$69 : \frac{3}{4} = \frac{69 \cdot 4}{3} = 92; \frac{3}{4} \quad " \quad " \quad \text{равны } 69;$$

$$4 \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 6; \frac{3}{4} \quad " \quad " \quad " \quad 4 \frac{1}{2};$$

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}; \frac{3}{4} \quad " \quad " \quad " \quad \frac{2}{5};$$

3) случай деления на смешанное число:

а) $32 \frac{1}{2} : 2 \frac{1}{2}$; что значит разделить $32 \frac{1}{2}$ на $2 \frac{1}{2}$?

Это значит найти такое число x , чтобы $x \cdot 2 \frac{1}{2} = 32 \frac{1}{2}$, т. е. если взять его 2 раза слагаемым и еще взять $\frac{1}{2}$ его, тогда получится $32 \frac{1}{2}$; т. е. 5 половинок неизвестного числа составляют $32 \frac{1}{2}$, и число равно 13.

Действительно,

$$\frac{5}{2}x = 32 \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2}x = \frac{65}{2 \cdot 5}; \quad x = \frac{65 \cdot 2}{2 \cdot 5} = 13;$$

б) $14 : 1 \frac{2}{3}$, или $14 : \frac{5}{3}$; $x \cdot \frac{5}{3} = 14$;

$\frac{5}{3}$ неизвестного числа составляют 14; неизвестное число

$$\frac{14 \cdot 3}{5}, \text{ т. е. } 14 : 1 \frac{2}{3} = 14 : \frac{5}{3} = \frac{14 \cdot 3}{5} = \frac{42}{5} = 8 \frac{2}{5}.$$

Замечание. В некоторых методиках и методических статьях по арифметике предлагают объяснять деление дробей по аналогии с делением именованных чисел, т. е. делением по содержанию:

1) надо $15 : \frac{3}{8}$; это значит узнать, сколько раз $\frac{3}{8}$ содержится в 15, или в $\frac{120}{8}$; $\frac{120}{8} : \frac{3}{8} = 40$;

2) $\frac{5}{9} : \frac{1}{12} = \frac{20}{36} : \frac{3}{36} = 6 \frac{2}{3}$;

3) $\frac{5}{17} : 2 \frac{1}{4} = \frac{5}{17} : \frac{9}{4} = \frac{20}{68} : \frac{153}{68} = \frac{20}{153}$ и т. п.

Прежде всего в этом приеме выполняются лишние операции—приведения дробей к общему знаменателю, и у учащихся создается впечатление, что при делении дробей необходимо приводить их к общему знаменателю. Кроме того, вопрос задачи, который ставится, вызовет большие недоразумения, так как в последних двух

примерах придется дать ответ, что дробь $\frac{1}{12}$ содержится $6\frac{2}{3}$ раза в дроби $\frac{5}{9}$, и придется дать совсем не имеющий смысла ответ, что число $2\frac{2}{4}$ содержится $\frac{20}{153}$ раза в $\frac{5}{17}$.

Деление на единицу.

а) Учащиеся знают, что умножить на 1—это значит получить в произведении само множимое, а что же означает требование разделить на 1?

На основании определения деления как действия, обратного умножению, следует уяснить, что $35 : 1 = 35$, ибо $35 \cdot 1 = 35$;

$$2\frac{1}{4} : 1 = 2\frac{1}{4}, \text{ ибо } 2\frac{1}{4} \cdot 1 = 2\frac{1}{4}.$$

б) Иначе: $35 : \frac{7}{7}$ — это значит $\frac{7}{7}x = 35$; ясно, что

в этом случае данная часть числа есть все число.

Во многих случаях при делении $\frac{4}{5} : \frac{4}{5}$ учащиеся

пишут 0 или говорят: „Ничего не получится“. Умножением, проверкой результата в случае деления $a : a$ надо не допускать этой ошибки.

Из рассмотрения всех случаев можно:

1) установить, что при делении на дробь (правильную или неправильную); узнается число, когда известна величина его дроби

2) установить, что имеют место случаи, когда

$$\left. \begin{array}{l} 60 : 6 = 10 \\ 60 : 4 = 15 \\ 60 : 2 = 30 \\ 60 : 1 = 60 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{частное меньше делимого} \\ \text{частное равно делимому} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} 60 : \frac{3}{4} = 80 \\ 60 : \frac{1}{2} = 120 \\ 60 : \frac{1}{4} = 240 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{частное больше делимого.} \\ \text{Почему?} \end{array}$$

Подобную таблицу полезно иметь в классе.

3) $0 : a = 0$; деление на 0 исключается.

3. Выводится правило деления дробных и смешанных чисел. Формулировки даются по принятому в школе учебнику. При делении смешанного числа на целое часто нецелесообразно смешанное число обращать в неправильную дробь, например:

$$36\frac{1}{2} : 2 = 18\frac{1}{4} \text{ (устно) или } 35\frac{1}{4} : 2 = 17\frac{5}{8} \text{ (устно) и т. п.}$$

4. Окончательно правило деления дробей полезно дать как умножение делимого на число, взаимно обратное делителю. Взаимно обратные числа определяют как числа, дающие в произведении единицу.

Не мешает провести небольшие упражнения устно и письменно:

1) по отысканию числа, взаимно обратного с данным; пусть даны числа: $4; \frac{2}{3}; \frac{1}{5}; 1; 3\frac{1}{2}$; взаимно обратные с ними числа: $\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; 5; 1; \frac{2}{7}$ (произведение двух взаимно обратных чисел равно 1; проверить);

2) по сопоставлению равенств следующего вида:

$$\text{а) } 6 : 4 = \frac{3}{2}; 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}; \text{ б) } 6 : \frac{2}{3} = 9; 6 \cdot \frac{3}{2} = 9;$$

$$\text{в) } 6 : \frac{1}{5} = 30; 6 \cdot 5 = 30; \text{ г) } 6 : 3\frac{1}{2} = 1\frac{5}{7}; 6 \cdot \frac{2}{7} = 1\frac{5}{7}$$

и т. п.

Из рассмотрения этих упражнений устанавливают правило деления дробных чисел как умножения делимого на число, обратное делителю.

5. Частные случаи деления целого числа на дробь и, наоборот, дроби на целое число рассматривают как частные случаи общего правила деления дроби на дробь.

6. Из общего правила выводят следующие упрощения:

1) деление дробей, имеющих одинаковые знаменатели, обязательно выполнять делением числителя первой дроби на числитель второй;

2) деление дробей в случае, когда числителем и знаменателем делимого являются числа, кратные числителю и знаменателю делителя, можно выполнять делением числителя и знаменателя делимого соответственно на числитель и знаменатель делителя, например:

$$\frac{10}{21} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3}.$$

7. На основании правила деления дробных чисел упражнять учащихся в выполнении ряда умножений и делений чисел без вычисления промежуточных результатов, например:

$$1) \frac{3}{4} : 6 \cdot 5 \frac{1}{2} : \frac{1}{7} : 3 \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 2}{4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7} = \frac{11}{8} = 1 \frac{3}{8};$$

$$2) \frac{4 \frac{1}{2}}{3 \frac{1}{4}} = \frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 13} = \frac{18}{13} = 1 \frac{5}{13};$$

$$3) \frac{\frac{3}{4} \cdot 2 \frac{1}{2}}{6 \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot 5 \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{11}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{9}{1} \cdot \frac{2}{11} = \frac{5}{11}.$$

Замечание. В последнем примере деление заменено умножением на обратные числа. Дробь, числитель и знаменатель которой выражены дробными числами, называется сложной или обобщенной дробью.

§ 14. Задачи, решаемые делением

На основании всего рассмотренного выше можно решать 4 задачи.

Задача 1. Случай, когда делитель—число целое или смешанное (находят часть делимого). Например: „Кусок ткани стоит 360 руб. и содержит 9 м. Сколь-

ко стоит 1 м ткани?" Или: „Кусок ткани стоит $22\frac{3}{4}$ руб. и содержит $6\frac{1}{2}$ м. Сколько стоит 1 м ткани?" Решение не затруднит учащихся и не даст ничего нового.

Задача 2. Случай, когда делитель—число дробное (по известной дроби числа находят все число). Например: „Кусок ткани, содержащий $\frac{3}{4}$ м ткани, стоит 7 руб. (или $7\frac{1}{2}$ руб.). Сколько стоит 1 м этой ткани?" Запись может иметь вид: $\frac{3}{4}$ неизвестного числа составляют 7 руб.; неизвестное число равно $\frac{7 \cdot 4}{3} = 9\frac{1}{3}$ или $7 : \frac{3}{4} = 9\frac{1}{3}$ (руб.). [В общем виде решение обеих задач $\frac{p}{q} = r$, где p —стоимость куска ткани, q —число метров ткани, r —стоимость 1 м.]

Задача 3. Случай, когда частное—число целое или смешанное и узнается, сколько раз одно число содержится в другом. Например: „Куплено на сумму $104\frac{1}{2}$ руб. ткани по $4\frac{3}{4}$ руб. за каждый метр. Сколько ткани куплено?" $104\frac{1}{2} : 4\frac{3}{4} = \frac{209}{2} : \frac{19}{4} = \frac{209 \cdot 4}{2 \cdot 19} = 22(м)$.

Задача 4. Случай, когда частное—правильная дробь (узнается, какую часть составляет одно число от другого). Например: „Куплена на сумму 4 руб. ткань стоимостью в 20 руб. за метр. Сколько куплено ткани?" (Или лучше: „Какая часть метра (доля) куплена?") $4 : 20 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}(м)$; 20 см.

[В общем виде решение обеих задач (3 и 4) таково: $\frac{p}{r} = q$, где p —стоимость всей ткани, r —цена одного метра, q —число купленных метров.]

Замечание. В случае, когда стоимость единицы—число дробное, нового вопроса нет; например: „Куп-

лено на 3 руб. крупы по $\frac{4}{5}$ руб. за 1 кг. Сколько килограммов крупы куплено?" В данном случае можно решить задачу делением: $3 : \frac{4}{5} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ (кг), но лучше рассуждать с учащимися следующим образом: за 1 руб. можно купить $\frac{5}{4}$ кг; за 3 руб. можно купить число килограммов, в 3 раза большее:

$$\frac{5}{4} \cdot 3 = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ (кг)}.$$

§ 15. Изменение произведения и частного

При изучении изменения произведения и частного двух целых чисел в зависимости от увеличения и уменьшения в несколько раз данных надо было вводить ограничения постольку, поскольку нельзя было делить на любое число из опасения получить остаток при делении. В настоящее время, после изучения действия умножения и деления с дробными числами, можно дополнить и систематизировать вопрос о зависимости изменения произведения и частного от изменения данных чисел. Например, надо $8 \cdot 25 = 200$. Как изменится результат, если разделить множимое на 3 и множитель на 3? Произведение уменьшится в 9 раз, действительно:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{25}{3} = \frac{8 \cdot 25}{3 \cdot 3} = \frac{200}{9}.$$

Как изменится дробь $\frac{4}{7}$, если числитель умножить на 5, а знаменатель на 9? и т. п.

Решение. $\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 9} = \frac{20}{63}$; $\frac{20}{63} : \frac{4}{7} = \frac{20 \cdot 7}{63 \cdot 4} = \frac{5}{9}$.

Ответ. Получится дробь, равная $\frac{5}{9}$ от $\frac{4}{7}$; $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9}$.

Указания к записям, формулировкам и упражнениям.

1. Не следует позволять учащимся выполнять сокращение множителей числителя и знаменателя до того, как они подписали их под одной чертой, т. е. не следует писать:

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{1}{4} : \frac{2}{7};$$

целесообразно писать: $\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} = \frac{7}{8}$,

в противном случае трудно предотвратить ошибки, когда при делении $\frac{5}{8} : \frac{4}{9}$ выполняют сокращение так: $\frac{5}{2} : \frac{1}{9}$, получая неверный ответ, и т. п.

2. Не следует допускать таких записей: $\frac{4}{5} : \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 4} = 1$ или $\frac{3}{4} : 1 = \frac{3}{4} : \frac{1}{1} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 1} = \frac{3}{4}$. В этих случаях ответ должен даваться сразу.

3. Следует предлагать учащимся упражнения в такой форме: дать делимое, например: $7; \frac{3}{4}; 2\frac{1}{2}; 1$, и предложить написать делитель так, чтобы результат был больше делимого, равен или меньше делимого.

4. Надо решать задачи (в простейших случаях), когда требуется найти число по данным его процентам; например, найти число, если известно, что 3% его составляют 60; 84 (устно); 20; 50 (с записью).

Решение. $\frac{3}{100}$ неизвестного числа составляют 20; надо $20 : \frac{3}{100} = \frac{20 \cdot 100}{3} = \frac{2000}{3} = 666\frac{2}{3}$ (см. главу XI „Проценты“, § 4).

5. Когда учащиеся изучили правило умножения дробей, можно было дать им выражения его на буквах:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Здесь можно дать на буквах правило деления дробей:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Полезно сопоставить на данных числах следующие строчки правил деления целого числа на дробь и дроби на целое число:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}; \quad a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b},$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b}; \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}.$$

6. Необходимо следить, чтобы ученик давал правильную и четкую формулировку всех правил действия с дробями. Для этого он должен в первую очередь понимать содержание правил. Но, кроме того, надо следить, чтобы ученик хотя бы в первых упражнениях, постепенно произнося словами правило, выполнял необходимые операции. Никким образом нельзя допускать нечетких и небрежных формулировок, когда на вопрос, как разделить целое число на дробь, получают ответ: „Надо знаменатель умножить на целое“. Верно, что придется знаменатель умножить на целое число, но это только часть правила, и если только этим пользоваться, то оно приведет к неправильному решению, например, $5 : \frac{4}{7} = \frac{4}{5 \cdot 7}$. Иногда учащиеся так формулируют правило деления дробей: „Надо числитель поставить в знаменатель, а знаменатель в числитель“; по этому правилу можно получить $\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 7}$. Учителю следует всегда иметь в виду, что эти правила его учащиеся должны будут сознательно прилагать к решению новых вопросов, как, например, к действиям с алгебраическими дробями и др., и что механическое выполнение действий без осознания, так же как и нечеткость в формулировках, будет препятствием в дальнейшей работе.

7. Следует отметить ошибки учащихся и в случаях, когда, например, надо 20 разделить на $\frac{1}{4}$ или узнать,

сколько раз $\frac{1}{4}$ содержится в 20. В большинстве случаев учащиеся отвечают 5 вместо 80. Ту же ошибку мы наблюдали в случае деления $3 : \frac{1}{3}$. Ответ давали 1 вместо 9. В случаях, когда предложено было $15 : \frac{1}{6}$ или узнать, сколько раз $\frac{1}{6}$ содержится в 15, учащиеся в большинстве случаев дали ответ $2\frac{1}{2}$ вместо 90; в случае же, когда надо было узнать, во сколько раз $\frac{5}{12}$ меньше 15, верный ответ учащихся—редкое исключение (пытаются найти разность $15 - \frac{5}{12}$ и т. п.)

§ 16. Отношение двух чисел

В 1938 году был издан для средней школы учебник по арифметике Киселева, переработанный проф. А. Я. Хинчиным, в котором понятие отношения одного числа к другому отождествляется с понятием частного от деления первого числа на второе. Это широкое понимание термина „отношение“ соответствует тому значению этого термина, которое ему придается в науке. Частное от деления одного числа на другое иначе называется отношением этих чисел¹.

Употреблявшееся определение отношения как результата сравнения двух чисел следует понимать как описание „роли и значения понятия отношения в приложениях“².

Понятие „отношение“, согласно действующей программе арифметики, вводится впервые при сравнении целых чисел, а затем обобщается при изучении действия деления дробных чисел³.

1. На конкретных примерах выясняется понятие отношения, дается определение, говорится о том,

¹ Проф. А. Я. Хинчин, О понятии отношения двух чисел, журн. „Математика в школе“, 1941, № 3.

² Там же.

³ Частное от деления одного числа на другое, или отношение этих чисел, называется „кратным“ или „геометрическим“ отношением в отличие от „разностного“, или „арифметического“, отношения, которое определяется как разность двух чисел.

Под словом „отношение“ обычно (и в дальнейшем) понимается „кратное“ отношение.

что в дальнейшем учащиеся могут частное от деления одного числа на другое называть „отношением“ этих чисел.

Даются названия членов отношения. Словом „отношение“ называется и $3:6$, т. е. записанное, но не вычисленное отношение, и численное значение частного — дробь $\frac{1}{2}$. Термины „предыдущий“ и „последующий“ члены отношения даются как термины, заменяющие термины „делимое“ и „делитель“.

Когда отношение (частное) записано в виде дроби, то члены отношения являются числителем и знаменателем дроби. Названия членов отношения надо переспрашивать у учащихся, чтобы они усвоили их до того, как перейдут к пропорциям и новым терминам. Дается запись на буквах: $a:b=q$, или $\frac{a}{b}=q$.

Решение примеров и задач на вычисление отношения дает возможность повторить действия с целыми и дробными числами.

Примеры: 1) Найти отношение отвлеченных чисел 6 к 3. $\frac{6}{3}=2$, так как $2 \cdot 3=6$. Отношение 3 к 5 равно $3:5 = \frac{3}{5}$, так как $\frac{3}{5} \cdot 5=3$.

2) „Узнать, сколько килограммов муки в одном ящике, если известно, что в 5 таких ящиках всего 25 кг муки?“ Искомое число килограммов равно отношению числа 25 к числу 5 (действия производят над отвлеченными числами). Ответ. $\frac{25}{5}$ кг = 5 кг.

3) Отношение конкретных величин находится как отношение численных значений этих величин, полученных при одной и той же единице измерения. Поэтому при вычислении отношения двух длин, двух весов и т. п. эти величины должны быть выражены в мерах одинакового наименования, например, отношение веса 1 кг и 1 г равно $1000:1=1000$; отношение длины 5 м к 1 см равно $\frac{500}{1}=500$ и т. п.

Иногда в этих случаях делимое и делитель пишут

с их наименованиями: $8\frac{1}{2} м : 4\frac{1}{4} м = 2$ (число отвлеченное) или $8\frac{1}{2} : 4\frac{1}{4} = 2^1$.

Отношение $7 м$ к $11 м$ выражается дробным числом (отвлеченным) $\frac{7}{11}$, потому что $\frac{7}{11} \cdot 11 = 7$.

Так как после введения дробных чисел действие деления всегда выполнимо (кроме случая деления на 0), то всегда можно найти частное, или отношение одного числа к другому.

2. Найдя при решении задачи отношение двух величин или двух чисел, учащиеся могут объяснить смысл ответа. Если отношение — число целое, то оно показывает: а) во сколько раз первое число больше второго или первая величина больше второй, или б) во сколько раз второе число меньше первого или вторая величина меньше первой, или в) сколько раз второе число (вторая величина) содержится в первом (в первой).

Если отношение — правильная дробь, то оно показывает, какую часть второго числа (величины) составляет первое (первая), или отношение, например $\frac{3}{4}$, показывает, какая часть второго числа (второй величины) и сколько раз (одна четверть — 3 раза) содержится в первом числе (в первой величине).

Если отношение (частное) — число смешанное, например $3\frac{2}{5}$, то оно показывает, что в первом числе (в первой величине) 3 раза содержится второе число (вторая величина) и еще 2 раза содержится пятая часть второго числа (второй величины).

¹ В курсе геометрии учащиеся знакомятся с определением отношения двух однородных величин как числа, измеряющего первую величину, если вторая принята за единицу. Для физиков „скорость равномерного движения“ есть отношение пройденного пути к протекшему времени. В арифметике это понимают следующим образом: численное значение скорости равно отношению (частному от деления) численных значений пути и времени. В физике же производят деление не только чисел, но и наименований (размерностей), например $\frac{км}{час}$, $\frac{м}{сек}$ и т. п. В курсе школьной арифметики вопрос о размерности не рассматривается.

3. Переходя к вопросу об установлении зависимости между членами отношения и определению неизвестного члена отношения, учитель должен обратить внимание на то, что на практике учащихся затрудняет случай, когда надо определить последующий член отношения по предыдущему и отношению: $\frac{a}{b} = q; b \neq 0; a = b \cdot q; b = a : q$.

Объяснения даются на основании того, что отношение есть частное, предыдущий член отношения— делимое, последующий член— делитель. Подчеркивают, что предыдущий член может быть любым числом; последующий член—любим числом, кроме нуля.

4. Дальнейшая работа заключается: 1) в выяснении изменения отношения в зависимости от умножения и деления его членов на какое-либо число и 2) в установлении главного свойства отношения: отношение не изменится, если разделим или умножим оба его члена на одно и то же число. Обычно это не затрудняет учащихся, после того как они освоились с понятием отношения и записывают его в виде дроби или с помощью знака „:“.

Главное свойство отношения (частного) учащиеся должны уметь объяснять и формулировать:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}; \quad \frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}.$$

Примеры. 1) Дано отношение 40 : 16. Делимое и делитель (или числитель и знаменатель дроби) можно разделить на одно и то же число. Имеем: $40 : 16 = 5 : 2$. В полученном отношении новые члены: 5 и 2. Путем деления обоих членов отношения на их общий множитель произведено „сокращение“ отношения; отношение же сохранилось $\left(2\frac{1}{2}\right)$.

2) Вопрос о возможности заменять отношение дробных чисел отношением целых чисел выясняется на нескольких последовательно подобранных упражнениях: рассматривается случай, когда только один из членов отношения—дробиное число, когда оба члена отношения—дробиные и т. д.

а) Найти отношение $\frac{4}{7} : 3$; отношение равно $\frac{4}{21}$.

Учащимся ясно, что для достижения поставленной цели надо предыдущий член этого отношения освободить от знаменателя 7; сделать это можно только при условии, что и последующий член будет соответственно изменен, тогда не изменится данное отношение $(\frac{4}{7} \cdot 7) : (3 \cdot 7) = 4:21$. Отношение $\frac{4}{21}$ сохранилось. Такой прием обычно применяется в школе, но проще выразить данные числа в одинаковых долях и взять отношение числителей; имеем $\frac{4}{7} : 3 = \frac{4}{7} : \frac{21}{7}$; отношение равно 4:21 (если оба члена отношения умножить на 7).

б) Отношение $\frac{7}{12} : \frac{5}{8} = \frac{14}{24} : \frac{15}{24} = 14 : 15$.

Делимое и делитель умножили на 24, т. е. на их общий наименьший знаменатель; отношение сохранилось $(\frac{14}{15})$.

В упражнениях надо требовать от учащихся соответствующих разъяснений, на основании чего¹ они выполняют сокращение отношения и замену отношения дробных чисел отношением целых чисел. Надо обратить их внимание на то, что при этих преобразованиях отношение сохраняется, но члены отношения изменяются.

3) Отношение дробей с одинаковыми знаменателями учащиеся обычно без затруднений заменяют отношением их числителей $(3\frac{1}{8} : 1\frac{3}{8} = \frac{25}{8} : \frac{11}{8} =$

$25 : 11)$; надо путем упражнений достичь того, чтобы учащиеся привыкли вводить упрощение в запись и в случае отношения двух дробей с равными числителями, а именно—заменять отношения этих дробей обратным отношением их знаменателей, например:

$$\frac{7}{30} : \frac{7}{120} = 120:30 = 4; \quad \frac{3}{7} : \frac{3}{11} = 11 : 7 = 1\frac{4}{7} \text{ и т. д.}$$

¹ На основании главного свойства дроби или на основании неизменяемости частного при умножении и делении делимого и делителя на одно и то же число (кроме 0).

4) Отношения $\frac{60}{15} = 4$ и $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ (или $60 : 15 = 4$; $15 : 60 = \frac{1}{4}$) называются взаимно обратными отношениями; числа 4 и $\frac{1}{4}$ — взаимно обратные.

Если два отношения обратны друг другу, то предыдущий член одного отношения служит последующим членом другого, и наоборот. Произведение взаимно обратных отношений равно 1. Впоследствии обратное отношение двух чисел выясняется как отношение двух обратных чисел. Дано отношение $60 : 15 = 4$; обратное отношение $15 : 60 = \frac{1}{4}$ или $\frac{1}{60} : \frac{1}{15} = 15 : 60 = \frac{1}{4}$.

Рассмотренные вопросы используются в дальнейшем: в случае нахождения относительной погрешности вычисления и измерения, нахождения отношения длины окружности к длине ее диаметра, вычисления процентного отношения, при решении задач на пропорциональное деление и др. Вопрос о преобразовании отношения рассматривается в дальнейшем при делении десятичных дробей.

Масштаб. Учащиеся знают, что на чертежах, картах и планах расстояния между точками изображаются не в натуральную их длину, а в уменьшенном виде. Отношение длины линии на чертеже, плане, карте к действительной ее длине в натуре называется масштабом. На плане изображаются небольшие земельные участки, на карте — значительные. Масштаб бывает численный и линейный (рассматриваются на карте и на плане). Численный масштаб плана или карты выражается дробью, числитель которой 1, а знаменатель число, которое показывает, во сколько раз длина на плане или на карте уменьшена по сравнению с действительной длиной. В этом случае численный масштаб выражается числом, меньшим 1.

Практические работы. 1) Устанавливают, каков численный масштаб географической карты, висящей в классе, например карты СССР $\left(\frac{1}{3000000}\right)$, и

по карте находят действительное расстояние между двумя городами.

2) Вычерчивают план комнаты в масштабе $\frac{1}{200}$, или 1 : 200; например, комната размером (28×12) кв. м изображается на плане прямоугольником $(14 \cdot 6)$ кв. см. Почему?

План дается в значительно более крупном масштабе, чем карта: знаменатель дроби $\frac{1}{3000000}$ больше знаменателя дроби $\frac{1}{20}$.

Упражнения. 1) Имея план какого-либо участка и зная его масштаб, найти истинные размеры участка и отдельных его частей.

2) Определить, какой надо взять масштаб, чтобы расстояние в 500 км изобразить отрезком в 50 см?

3) Каким отрезком изобразится расстояние в 35 км на плане, выполненном в масштабе $\frac{1}{1000}$ (1 : 1000)?

4) Какова действительная площадь земельного участка (в гектарах), если он изображен на плане, взятом в масштабе $\frac{1}{20000}$, участком в 180 кв. см?

Решение. $(180 \cdot 20000 \cdot 20000)$ кв. см = $(180 \cdot 20000 \cdot 2)$ кв. м = 7200000 кв. м = 720 га, так как $(100 \cdot 100)$ кв. м = 1 га.

Указание. Масштаб для площади равен квадрату численного масштаба, взятого для длины.

В мастерских даются чертежи изготавливаемых деталей иногда в натуральную величину (масштаб 1 : 1), иногда в увеличенном виде (1 : 2; 1 : 10 и др.). В этом случае масштаб выражается числом, большим 1.

На планах и картах дается, кроме численного, также линейный масштаб (рис. 34), т. е. отрезок прямой, разделенный на сантиметры, с надписью, которая указывает длину отрезка в натуре (в данном случае 50 м). Благодаря этому без вычислений, наглядно можно по карте или плану измерить (циркулем) и определить действительные размеры и расстояния.

Масштаб: в 1 см—50 м (1:5000)

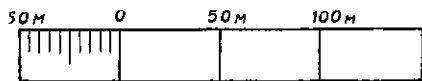


Рис. 34.

Пользуясь линейным масштабом, имеющимся на карте, и измерительным циркулем, определить расстояние между Москвой и городом, где находится школа, или районным центром.

§ 17. Примеры для контрольной работы на деление

1) Найти число, седьмая часть которого равна $\frac{3}{8}$;

” ” $\frac{5}{7}$ которого составляют 1;

” ” $\frac{5}{7}$ ” ” $2\frac{1}{2}$.

2) Найти x , если

$$\frac{4}{9}x = \frac{1}{36}; \quad \frac{5}{6}x = 3\frac{1}{8}.$$

3) Выполнить указанные действия:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{5}{8} : 7 = & \text{в) } 2\frac{1}{4} : 1\frac{3}{5} = \quad 4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{2}{3} = \\ \text{б) } 4 : \frac{3}{11} = & \text{г) } 2\frac{7}{9} : 1\frac{8}{27} = \quad \text{д) } \frac{4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}}{=} \end{array}$$

4) Ответить на вопросы:

а) во сколько раз $\frac{7}{11}$ меньше 283?

б) какие числа взаимно обратны с данными:

$$\frac{3}{5}; 2\frac{1}{8}; 1; 7?$$

в) не производя деления, сказать, будет ли частное больше или меньше делимого:

$$6\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \quad 5 : 2\frac{1}{2} =$$

5) Как найти неизвестный делитель из выражения:

$$4\frac{1}{4} : x = \frac{1}{4}.$$

6) Как найти неизвестное делимое:

$$x : \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

7) Задача. Найти отношение, или узнать, какую часть составляет скорость товарного поезда от скорости пассажирского поезда, если товарный поезд прошел 285 км за $7\frac{1}{2}$ час., а пассажирский—354 км за $6\frac{1}{2}$ час.?

8) Пример на все 4 действия с обыкновенными дробями.

Глава X

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

§ 1. Введение

Исторические сведения. Предвестниками десятичных дробей были шестидесятеричные дроби. Очень медленно распространялась та идея, что в этой системе существово вопроса не в числе 60 (хотя и богатом первоначальными множителями, хотя и служившем отношением распространенных мер угла и времени), а в равномерном, систематическом подразделении на доли с сохранением постоянного отношения между ними.¹

Шестидесятеричные дроби, так же как и десятичные, называются „систематическими“: знаменателями у них служат степени основной принятой системы счисления (в данном случае 60 и 10).

В начале XV века узбекский математик, первый директор лучшей в мире (для того времени) обсерватории в Самарканде, ал-Каши² написал книгу „Поучение об окружности“, в которой³ вычислил 2π в шестидесятеричной системе и получил 6 16 59 28 1 34 51 46 14 50,

¹ Птоломей (греч. астроном, II век н. э.) записывал $37\frac{4}{60} \cdot \frac{55}{3600}$, что означало $37^{\circ}4'55''$. „Доли“ назывались минутами (*minutae*); $\frac{1}{60}$ *minuta prima*—первые доли (первого порядка); *minuta secunda*—второго порядка— $\frac{1}{3600}$ и т. д.

² Джемшид-бен Масуд Эд-Дин ал-Каши.

³ За 150 лет до Стевина, которого неправильно называли создателем десятичных дробей.

т. е. $6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \dots$. Затем он записал то же число в десятичной системе (без запятой): 6 2831 85 307 179 586 5,

т. е. $6 + \frac{2}{10} + \frac{8}{10^2} + \dots$; откуда для π получается значение с верными 16-ю знаками после запятой: 3, 141 592 653 589 7932.

Десятичные доли ал-Каши называет: „десятичные минуты, секунды, терции“ и т. д.

В другой своей книге—„Ключ к искусству счета“ ал-Каши показывает приемы умножения и деления десятичных дробей.

Еще индусы получали дроби со знаменателем 10 при извлечении квадратного корня в том случае, когда корень не извлекается точно. Так поступали многие математики значительно более позднего времени, но еще в XVI веке при получении ответа в десятичных долях переводили дробную часть найденного корня в шестидесятеричные доли.

Начиная со средних веков все сильнее становилась необходимость распространить десятичную систему счисления и на подразделения единицы, но, несмотря на свои преимущества, система десятичных дробей должна была выдержатъ, как мы видим, сильную борьбу с шестидесятеричным делением.

Особенно важно было введение десятичных дробей для облегчения тех громадных работ, которые ставились в XVI, XVII вв. в эпоху первоначального накопления, развития науки и техники, освобождения от экономического и идеологического застоя феодально-помещичьего господства. Требовались громоздкие вычисления, и понятно, что внимание всех математиков было устремлено на эту новую область.

В 1490 году были напечатаны тригонометрические таблицы, составленные *Regiomontanus'ом*, в основу которых положены десятичные доли (они записывались в виде целых пятнадцатичисел).

В своих работах последовательно применял десятичные дроби Симон Стевин (1548—1620), голландский инженер и ученый. Стевин понимал, что десятичные дроби были бы особенно полезны, если бы была введена десятичная система мер, и в конце своего труда (*La Disme*, 1585) он обращается к широким кругам и настаивает на введении десятичной системы мер длины, веса, монет, чтобы способствовать простоте вычислений, даваемых новым приемом (десятичными дробями).

С конца XV века идея десятичных дробей „носила в воздухе“; десятичными дробями занимались Бюрги (1552—1632), Кеплер (1571—1630) и многие другие, пользуясь различными обозначениями для записи десятичных долей и различными знаками, отделяющими целую часть числа от дробной. Знаменитый изобретатель логарифмов Дж. Непер (1550—1617) записывал десятичные дроби так, как теперь записывают градусы, минуты, секунды, например, дробь 83,456 записывалась $83^{\circ}4'56''$, и читалась 83 целых, 4 прим. 5 секунд, 6 терций. Иногда он пользовался в качестве разделительного знака точкой, в Англии и Америке и в настоящее время для этой цели пользуются точкой, вместо запятой, как у нас.

У нас в России учение о десятичных дробях впервые было

изложено в „Арифметике“ Магницкого, в которой излагалось и учение о шестидесятеричных дробях. Магницкий приводит и десятичные меры длины и площади.

В XVII веке была уже дана полная теория десятичных дробей.

Из теории вопроса.

Всякое целое число N в данной системе счисления, основанием которой служит число k , может быть представлено в виде $N = a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n$, где a_0, a_1, \dots, a_n изображают числа от 1 до $k-1$ или 0 ($a_0 \neq 0$). Напоминаем, что это письменное обозначение чисел основано на принципе поместного значения цифр: при передвижении на один разряд влево каждая цифра принимает значение, в k раз большее предыдущего, и обратно, при передвижении на один разряд вправо значение цифры соответственно уменьшается в k раз. Применение принципа поместного значения цифр распространяется (расширяется) и дальше: цифра при дальнейшем передвижении вправо на один разряд после единиц получает значение, в k раз

меньшее, или $\frac{1}{k}$, затем $\frac{1}{k^2}$ и т. д. Раньше мы имели единицы

счета: k_1, k_1^2, k^3 и т. д., теперь вводятся новые единицы счета: $\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}$,

$\frac{1}{k^3}$ и т. д. В нашей системе счисления $k = 10$; число N можно записать:

$$N = a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} 10 + a_n + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_m}{10^m},$$

где b_1, b_2, \dots, b_m изображают числа от 0 до 9.

Десятичная дробь была открыта тогда, когда нашли способ записывать число N без знаменателя. Был введен условный знак для отделения десятых долей единицы от единиц. Все записи и вычисления упростились, что и предвидели создатели десятичных дробей: $N = a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n b_1 b_2 \dots b_m$ или $N = M b_1 b_2 \dots b_m$, где M — целая часть числа. Если $M = 0$, то $N = 0, b_1 b_2 \dots b_m$.

$$N = M + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_m}{10^m} = \frac{M \cdot 10^m + b_1 10^{m-1} + b_2 10^{m-2} + \dots + b_m}{10^m}$$

В руководствах по элементарной математике в школьной практике долгое время почти не находили себе места десятичные дроби, и лишь после того, как во время французской революции была введена метрическая система мер, десятичными дробями широко стали пользоваться в торгово-промышленных делах, и этим вопросам стали обучать в школе.

В настоящем руководстве десятичные дроби рассматриваются как частный случай обыкновенных дробей.

Это соответствует и установке и расположению в программе арифметики V класса. При изложении отдельных приемов и действий дается систематический, в достаточной мере для учащихся данного возраста доказательный курс десятичных дробей.

Для изучения темы „Десятичные дроби“ программой по арифметике отводится 50 часов в V классе в III и IV четверти. Изучаются десятичные дроби в той последовательности, которая дается нами ниже.

В нашей учебной литературе по арифметике имеются различные определения десятичной дроби. Обычно десятичной дробью называют такое дробное число, знаменатель которого — единица с нулями, или степень 10. В этих определениях не подчеркивается особенность десятичной дроби — способ ее записи. Имеется и другое определение десятичной дроби, как дроби, числитель которой есть целое число, знаменатель — степень десяти, но записанной при помощи десятичных знаков.

§ 2. Запись. Чтение десятичной дроби

1. На первом уроке по теме „Десятичные дроби“ ученикам сообщается, что среди множества дробей (и долей), которые они изучали, были дроби (и доли) со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д. и что именно эти дроби имеют очень большое практическое значение: приводятся известные ученикам примеры единичных отношений мер длины, площади, объема, веса, денежных знаков: $1 \text{ дм} = \frac{1}{10} \text{ м}$; $1 \text{ см} = \frac{1}{100} \text{ м}$; $1 \text{ мм} = \frac{1}{1000} \text{ м}$; $1 \text{ м} = \frac{1}{1000} \text{ км}$; $1 \text{ кв. см} = \frac{1}{10000} \text{ кв. м}$ (в 1 кв. м 10000 кв. см); $3 \text{ коп.} = \frac{3}{100} \text{ руб.}$; $7 \text{ см} = \frac{7}{100} \text{ м}$ и т. д.

Этим дробям присвоены особые термины: десятичная доля и десятичная дробь. С этими дробями выполняют все действия, которые выполняют с обыкновенными дробями

$$\left(\frac{3}{100} + \frac{7}{10} = \frac{3}{100} + \frac{70}{100} = \frac{73}{100}; \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{100} = \frac{9 \cdot 13}{10 \cdot 100} \text{ и т. д.}\right);$$

десятичные дроби представляют собой частный случай обыкновенных дробей. Подчеркивается, что десятичные дроби могут иметь в знаменателе не только число 10, но и $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$; $1000 = 10^3$ и т. д., т. е. знаменателями десятичных дробей служат степени десяти. Определение десятичной дроби дается по учебнику, имеющемуся у учащихся V класса.

Тот факт, что знаменателем десятичной дроби служит, как говорят, „единица с нулями“, или разрядная единица десятичной системы счисления, позволяет упростить запись десятичной дроби (записывается без знаменателя), благодаря чему упрощаются и действия с десятичными дробями по сравнению с тем, что имеет место для обыкновенных дробей.

2. Проводится практическая работа (с использованием наглядного пособия—метра, разделенного на дециметры, и т. д.) для сравнения десятичных долей, следующих одна за другой: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ... (между этими долями нет других десятичных долей);

устанавливается, что $\frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000}$ и т. д. и что каж-

дая десятичная доля в 10 раз больше следующей за ней; другими словами, единица любого разряда, как и в системе счисления натуральных чисел, в 10 раз больше единицы следующего за ней низшего разряда: $1000 > 100 > 10 > 1$; кроме того, 1 в 10 раз больше $\frac{1}{10}$ (соответственно $\frac{1}{1000} < \frac{1}{100} < \frac{1}{10} < 1 < 10 < 100 < \dots$).

Полезно изготовить наглядное пособие—продолженные таблицы классов и разрядов десятичной нумерации:

Десятки	Единицы	Десятые доли	Сотые доли	Тысячные доли
10	1	$\frac{1}{10} = 0,1$	$\frac{1}{100} = 0,01$	$\frac{1}{1000} = 0,001$

Учитель показывает запись десятичных долей, объясняет роль запятой и возможность использовать замечательное свойство нашей письменной нумерации — поместное значение цифр — для записи чисел, содержащих десятичные доли.

Вопросы: 1) Что означает каждая из цифр в записи числа: 11,111; 333,33? 2) Сколько целых десятков, единиц, десятых, сотых и тысячных долей в числах: 42,16; 10,358 и т. п.?

Вводится термин „десятичные знаки“ для цифр, стоящих вправо от запятой.

Упражнения. 1) Представить десятичные дроби 5,24; 17,2; 3,685; 0,45 и др. в виде суммы десятичных долей разных разрядов (как было указано, этот вопрос затрудняет учащихся и в курсе целых чисел), прочесть и записать, например:

$$3,685 = 3 + \frac{6}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Можно указать аналогию с записью целого числа в виде суммы разрядов, например:

$$\begin{aligned} 4785 &= 4 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5; \\ 3,685 &= 3 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000}; \\ 3,685 &= 3 + 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,01 + 5 \cdot 0,001; \end{aligned}$$

снова надо подчеркнуть поместное значение цифр, постоянство числового отношения между единицами различных разрядов и идею распространения нумерации целых чисел на десятичные дроби (вправо от единиц).

2) Прочитать десятичную дробь, например, 3,685 сначала поразрядно, затем общепринятым приемом; выясняют, чем отличается чтение десятичной дроби 3,685, т. е. чтение „три целых и 685 тысячных“, при котором произносятся сразу весь числитель и весь знаменатель, от поразрядного чтения. Здесь также полезна аналогия с целыми числами; учащиеся должны понять, что, прочитав „сразу“ число 4791, они по существу читают „4791 единица“, или выражают число в единицах (первого низшего разряда); тот же процесс имеет место при чтении десятичной дроби без разбиения на разряды, в самом деле:

$$3,685 = 3 + \frac{6}{10} + \frac{8}{100} + \frac{5}{1000} = 3 + \frac{600}{1000} + \frac{80}{1000} + \frac{5}{1000} = 3 \frac{685}{1000},$$

если дана запись в виде обыкновенных дробей, или в десятичных: $3,685 = 3 + 0,6 + 0,08 + 0,005 = 3 + 0,600 + 0,080 + 0,005 = 3,685$. Это — десятичная дробь, имеющая знаменателем число, записываемое единицей с нулями, 1000^1 .

Для объяснения можно брать любые из данных в задачке дробей, соблюдая методическую последовательность от простого к сложному (с одним, двумя десятичными знаками, с нулем целых, с нулем в разряде десятых, сотых долей и т. д.).

3) Счеты используются для откладывания десятичных дробей, чтения десятичных дробей, отложенных на счетах, например 4,52; 0,365; 12,178, и действия с ними.

4) Проверяют, насколько четко поняты и усвоены учащимися понятия „десятичная доля“, „десятичный знак“, „десятичная дробь“, как они умеют читать и записывать десятичные дроби².

Смешанные числа.

Выше мы сказали, что в учебной литературе по арифметике имеются различные определения десятичной дроби. Так же различно в учебной литературе рассматриваются взятые нами выше числа 3,685; 417,2 и т. п.

Одни авторы называют эти числа „десятичными дробями“, другие — „смешанными числами“. Когда в данной „Методике“ мы условно называем эти смешанные числа десятичными дробями, то говорим, что в этой десятичной дроби числитель больше знаменателя ($3685 > 1000$; $4172 > 10$ и т. д.) При выяснении отдельных вопросов эти числа (417,2 или 3,685) рассматриваются и как смешанные числа ($417 + 0,2$; $3 + 0,685$ и т. д.).

¹ В старших классах учащиеся знакомятся с записью: $143,257 = = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}$.

² Иногда учащиеся говорят, что десятичная дробь „не имеет знаменателя“. Следует уточнить вопрос о различных формах записи.

**Числитель
и знаменатель
дроби.**

Для уточнения понятий „числитель“ и „знаменатель десятичной дроби“ выполняют упражнения в записи без знаменателя десятичных дробей, данных в виде обыкновенных:

1) когда числитель данной дроби больше знаменателя, например: $\frac{176}{10}$; $\frac{3658}{1000}$, и соответствующая запись: 17,6; 3,658;

2) когда числитель данной дроби меньше знаменателя, например: $\frac{658}{1000}$, и соответствующая запись: 0,658.

Устанавливают, что, как и в обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$, в случае $a > b$ мы имеем неправильную дробь $\frac{3658}{1000}$, из которой исключается целое число (целая часть дроби); в случае $a < b$ мы имеем правильную дробь (нуль целых) $\frac{658}{1000}$.

Полезно указать, что в записи дроби по обе стороны от цифры единиц стоят на одинаковом месте десятки и десятые доли, сотни и сотые доли, тысячи и тысячные доли и т. д., и вывесить таблицу, на которой будет сопоставлено число нулей в знаменателе десятичной дроби и число десятичных знаков в ее записи:

$$\frac{1}{10} = 0,1; \quad \frac{1}{100} = 0,01; \quad \frac{1}{1000} = 0,001 \text{ и т. д.}$$

Эти упражнения облегчают чтение десятичных дробей с большим числом десятичных знаков.

Не следует допускать чтения десятичной дроби тем способом, который практикует громадное большинство опрошенных нами лиц, уже окончивших школу. Например, надо прочитать 7,689342; спрашиваемый, передвигая палец от цифры к цифре, обычно произносит: десятые, сотые и т. д., пока не доберется до названия „миллионные“; даже когда учащимся IX класса, приступавшим к изучению логарифмов по пятизначным таблицам логарифмов, был поставлен вопрос, с какой точностью записана дробь 1,30103, никто сразу не ответил, что здесь стотысяч-

ные доли, но, пересчитав, все ответили верно. Таким образом, этот кажущийся легким вопрос имеет трудности, которыми объясняется то, что он далеко не прочно усваивается в школе.

Практически в упражнениях для V класса не встречается более шести десятичных знаков, т. е. миллионных долей, и учащиеся могут даже заучить, как прочитать знаменатель дроби в каждом отдельном случае.

Таким образом, учащиеся могут заучить 6 знаменателей и при чтении любой дроби сначала прочитать числитель как целое число, затем присоединить знаменатель в соответствии с числом десятичных знаков в числе. Например, 0,00409 читается „409 сотых“ и т. д.

При чтении и записи десятичной дроби, в особенности с большим числом десятичных знаков, можно облегчить чтение знаменателя, поставив точку или запятую сверху или отделив десятичные знаки следующим образом: 0,689[.]342. Казалось бы, это не очень логично, так как в одну группу из трех цифр объединили десятые, сотые, тысячные доли; в другую группу — десяти-, тысячные, сто-, тысячные и миллионные и т. д.; таким образом разрываются доли, читающиеся с прибавлением слова „тысячные“, то же самое для долей, читаемых с прибавлением слова „миллионные“, но практически это удобный прием, и если учащиеся заметят из приведенного выше упражнения и запомнят, что доли, стоящие на третьем месте, имеют знаменатель единицу с тремя нулями, т. е. 1000-е доли, стоящие на 6-м месте, имеют знаменатель единицу с 6 нулями — 1 000 000 — миллион, соответственно, на 9-м месте — имеют знаменатель 1 000 000 000 — миллиард — триллион и т. д., то чтение любых десятичных дробей будет облегчено; причем, записывая дробь, действительно очень полезно несколько отступать через каждые 3 десятичных знака, но не пользуясь ни точками, ни запятыми. Так, дроби 0,348; 0,000 348; 0,000 000 348 читают: 348 тысячных, 348 миллионных, 348 миллиардных; дроби 15,000 6; 15,000 63; 15,000 632 читают: 15 целых, а затем 6 десятичных или 63 сотых или 632 миллионных. При чтении любой дроби учащийся сразу должен оценить знаменатель, затем, прочитав числитель как целое число, присоединить знаменатель.

Между прочим, при таком способе чтения десятичной дроби не возникает затруднений как с нулями в середине записи числителя десятичной дроби, так и в начале, например:

0,3 7 89; 0,004 0901; 5,003 001¹ читают:
307 89 40 901 3 001.

¹ При пользовании четырехзначными таблицами логарифмов обычно мантиссы читают без указания знаменателя, как два двузначных числа, например, 0,2068 читают „20 68“. Полезно здесь уже при чтении дробей со знаменателем 1000 показать ученикам этот, как говорят, „телефонный“ способ чтения.

Запись. Те же трудности и те же пути их преодоления—при записи диктуемой десятичной дроби. Мы снова говорим о более сложных случаях, когда в числителе имеются нули или число цифр числителя меньше, чем число нулей в знаменателе десятичной дроби. Например, надо записать дроби: шестьдесят тысяч триста восемьдесят пять сотых или тысяча двести четыре миллиона. Ученик должен проделать две работы: 1) оценить знаменатель дроби и связать его с числом цифр в числителе; в первом примере должно быть в числителе пять цифр, во втором примере—шесть; 2) записать в стороне цифрами числитель 60385; 1024.

Отсюда ясно, что в первом случае можно сразу записать: 0,60385, во втором 0,001024.

Нули справа и слева. Записи: 6,13; 6,130; 6,1300; 06,13; 006,13 выражают одно и то же число, состоящее из 6 целых единиц, одной десятой доли и трех сотых. Действительно:

$$1) \quad 6,1300 = 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{0}{10000} = 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} \\ 006,13 = 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} = 6 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100} \text{ и т. п.}$$

Приписывание нулей справа или слева десятичной дроби (записанной без знаменателя) не изменяет ее величины:

$$2) \quad 6,130 = 6 \frac{130}{1000} = 6 \frac{13}{100}; \quad 6,1300 = 6 \frac{1300}{10000} = 6 \frac{13}{100}$$

и т. д. (Числитель и знаменатель дроби умножаются на одно и то же число, следовательно, дробь не изменяется.)

Увеличение и уменьшение Впервые знакомясь с десятичными дробями, учащиеся вслед за чтением в 10, 100 и т. д. и записью их рассматривают вопрос об уменьшении и увеличении дроби в 10, 100, 1000 раз, или, как говорят, вопрос о перенесении запятой в записи десятичной дроби. На этих

упражнениях учащиеся уточняют свое понимание единиц разрядов десятичной дроби и упражняются в переводе метрических мер одного наименования в более крупные и более мелкие меры (превращение и раздробление). В дальнейшем учитель должен к этим вопросам возвратиться при изучении умножения и деления десятичных дробей (см. § 6).

§ 3. Приведение дробей к одинаковому знаменателю. Сокращение дробей

Проводится ряд упражнений для выражения десятичной дроби в различных десятичных долях без изменения ее величины, например: $0,7 = 0,70 = 0,700 =$
 $= 0,7000 = \dots$ Действительно, $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000} = \dots$ (на основании главного свойства дроби $\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}$), и обратно: $\frac{700}{1000} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = \dots$; $0,700 = 0,70 = 0,7$.

Делается вывод, что десятичная дробь может быть выражена в любых десятичных долях (умножением или делением ее числителя и знаменателя на 10, 100, 1000, ..., т. е. на степень десяти, или, как говорят, приписыванием нулей справа или опусканием нулей, стоящих справа в записи десятичной дроби).

Выражение данной десятичной дроби в более крупных десятичных долях называется сокращением десятичной дроби. Как оно выполняется, если десятичная дробь записана без знаменателей, видно из приведенного выше примера.

Приведение дробей к одинаковому (общему) знаменателю состоит в том, что все данные десятичные дроби выражаются в одинаковых десятичных долях. Например, даны три дроби: 4,25; 3,7; 0,128; выразить их сначала в тысячных долях, затем в десятитысячных 4,250; 3,700; 0,128 и 4,2500; 3,7000; 0,1280¹. В качестве общего знаменателя выгодно брать наибольший

¹ Нет необходимости при рассмотрении этого вопроса переводить десятичные дроби в обыкновенные и обратно.

общий знаменатель данных дробей. (Почему?) Вопросы: Какой из знаменателей данных дробей является наибольшим общим знаменателем?

Сколько сотых долей в числе 3,25? Сколько тысячных долей? миллионных?

Эти незатруднительные для учащихся упражнения имеют очень большое значение, если при этом повторить основные свойства дроби, если сравнением дробей установить, что знаменатели десятичных дробей могут отличаться только множителями, равными степени десяти. Следовательно, выразить десятичную дробь в других десятичных же долях можно только путем умножения ее числителя и знаменателя на дополнительный множитель, равный степени 10, отчего только по форме, приписыванием нулей справа, изменится дробь. Надо обратить внимание на то, чтобы учащийся употреблял слова „приписать нули“, а не „прибавлять нули“, так как от последней операции и внешний вид дроби не изменится¹.

Иногда учащиеся говорят: „привести дробь к общему знаменателю“. Здесь следует еще раз указать им, что одну дробь можно выразить в различных долях, а выразить в одинаковых долях, т. е. привести дроби к общему знаменателю, можно только в том случае, если имеется не менее двух дробей. Для осознания этого мы предлагаем и здесь и в соответствующих преобразованиях с обыкновенными дробями разделять операции: 1) выражение дроби в различных долях и 2) приведение двух или нескольких дробей к общему знаменателю.

Сокращение десятичной дроби может быть поставлено как проверка правильности выполнения 1-й операции.

Нет необходимости решать много упражнений на указанные преобразования. Учащиеся должны оценить те упрощения, которые имеют место при

¹ Обращается внимание на то, что приписывание нулей к записи целого числа слева не изменяет его величину, но приписывание нулей справа в записи целого числа увеличивает число в соответствующее число раз, например, $17 = 0017$, но $17 \neq 1700$; но можно написать: $17 = 17,000$ и т. д. (Почему приписывание нулей после запятой не изменяет целого числа?)

преобразованиях десятичных дробей, по сравнению с аналогичными преобразованиями обыкновенных дробей.

4. Равенство десятичных дробей. Сравнение десятичных дробей

1. Для того чтобы установить, равны ли две дроби, и если нет, то какая из них больше, надо остановиться на соответствующих выводах из теории обыкновенных дробей: именно на том, что две дроби, выраженные в одинаковых долях, равны, если равны их числители, и та из них больше, у которой числитель больше. Значит, для сравнения дробей, например $0,6879$ и $0,724$, прежде всего следует привести их к общему знаменателю, а затем сравнить их числители. После приведения к общему знаменателю числитель первой дроби— 6879 , числитель второй дроби— 7240 . Обычная ошибка учащихся заключается в том, что они часто считают большей дробью ту, в письменном обозначении которой больше цифр, и если в приведенном выше примере допустить, чтобы учащиеся сравнили числители, не приводя дробей к общему знаменателю, то они получат неверный ответ, потому что числителями данных десятичных дробей являются числа 6879 и 724 , где $6879 > 724$.

2. Обычно обучают учащихся сравнивать дроби, не основываясь на соответствующем обосновании из курса обыкновенных дробей, поэтому учащиеся забывают, что для сравнения дробей должно сравнивать числители при одинаковом знаменателе и при сравнении дробей $0,85$ и $0,8398765$ склонны считать вторую дробь во много раз больше первой. Для выяснения ошибки обычно предлагают сравнить порозрядно числители дробей; этот технический прием удобен, им и пользуются при сравнении десятичных дробей; при этом полезно для большей наглядности при сравнении подписывать порозрядно одну дробь под другой:

$0,85.$

$0,8398765.$

Конкретное истолкование десятичной дроби. Полезно привести примеры конкретного истолкования десятичной дроби на системе монет и системе метрических мер. Подчеркивается получение десятичной дроби в результате измерения длины отрезка, равной, например, $1\text{ м } 5\text{ дм } 4\text{ см}$ (точность измерения до 1 см), что может быть записано в дециметрах: $15,4\text{ дм}$, в сантиметрах: 154 см и в метрах: $1,54\text{ м}$ и т. п. Конкретными примерами сравнения сначала длин, потом площадей, объемов, весов можно иллюстрировать равенство двух десятичных дробей, можно установить, какая из десятичных дробей (величин) больше или меньше и во сколько раз больше или меньше. На примере перевода более мелких мер в крупные (и наоборот) конкретно показывают умножение и деление дроби на 10 , 100 и т. д.

Можно указать, что, как всегда, результат вышеприведенного измерения есть число приближенное, что он больше $1,54\text{ м}$ и меньше $1,55\text{ м}$ (с точностью до $0,01$).

§ 5. Сложение и вычитание десятичных дробей

1. Предлагают учащимся по возможности самостоятельно вывести правило сложения или вычитания десятичных дробей, исходя из сложения и вычитания обыкновенных дробей. Запись должна быть примерно такая:

$$\begin{aligned} \text{а) } 13,68 + 4,154 &= 13 \frac{68}{100} + 4 \frac{154}{1000} = 13 \frac{680}{1000} + 4 \frac{154}{1000} = \\ &= 17 \frac{834}{1000} = 17,834 \text{ и} \end{aligned}$$

$$\text{б) } 9,47 - 3,1 = 9 \frac{47}{100} - 3 \frac{1}{10} = 6 \frac{37}{100} = 6,37$$

$$\begin{array}{r} \text{а) } 13,680 \\ + 4,154 \\ \hline 17,834 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } -9,47 \\ -3,10 \\ \hline 6,37 \end{array}$$

В дальнейшем нет необходимости заставлять учащихся уравнивать нулями число десятичных знаков слагаемых, но постоянно надо проверять понимание ими процесса поразрядного сложения десятичных

дробей для недопущения ошибок в таких случаях сложения и вычитания, как 315,6 и 1,428 и т. п.

Приводим неправильные ответы, допускаемые учащимися при сложении и вычитании в строчку разнообразных десятичных дробей:

$$\begin{array}{ll} 3,12+1=3,22(?) & 10,25-3=10,22(?) \\ 3,12+1=3,13(?) & 17+0,11=0,28(?) \\ 0,3+0,8=0,11(?) & 25,78-0,2=23,78(?) \\ 1,7+0,5=1,12(?) & 25,78-0,2=25,761(?) \\ 10,7+0,8=10,15(?) & 4,676-0,03=4,673(?) \end{array}$$

Аналогичные упражнения следует постоянно проводить устно с учащимися, уделяя на них 5—7 минут урока. В данном руководстве, как сказано раньше, не приводятся формулировки правил, которые учащиеся учат по имеющемуся у них учебнику.

2. Как и в действиях с целыми числами, при выполнении сложения и вычитания десятичных дробей используются рациональные приемы вычислений на основании законов действий и их следствий.

Примеры: 1) $34,8+75,1+65,2=(34,8+65,2)+75,1=175,1$; 2) $2,34+7,81+13,56+2,19=(2,34+13,56)+(7,81+2,19)=15,9+10=25,9$; 3) $6,98+3,47=(7+3,47)-0,02=10,45$; 4) $11,95+13,97=26-0,05-0,03=25,92$ и т. д.

3. Сложение и вычитание (а затем умножение и деление) на счетах выполняется так же, как с целыми числами. Отличие только в том, что в каждом случае надо заранее на счетах оставить (снизу) нужное число проволок для десятичных долей. Например, в случае $12,56+135,8$ оставляют снизу 2 проволоки, так как в результате получатся сотые доли.

На счетах (рис. 1, стр. 21) на трех последних проволоках откладываются десятые, сотые и тысячные доли. С большей точностью проводить вычисления на счетах не рекомендуется.

§ 6. Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.

1. Вопрос об увеличении и уменьшении десятичной дроби в 10, 100, 1000 раз обычно не обосновывается как случай умножения и деления десятичных

дробей; этим, как видно, следует объяснить, что, несмотря на кажущуюся легкость этого преобразования, выражающуюся словами „перенести запятую вправо, влево и т. д.“, учащиеся очень часто ошибаются при его выполнении. Общеизвестна ошибка учащихся при увеличении дроби, например, 0,36 в 10 раз. Часто ответ дается в виде 0,360. Могут быть два объяснения ошибок: 1) учащийся применяет приемы, известные ему для целых чисел, а именно: зная, что для увеличения целого числа в 10 раз можно справа приписать 0, пишет в данном случае 0,360; 2) этот же ответ он получает и в случае, когда исходит из теории обыкновенных дробей и пытается увеличить дробь в 10 раз соответствующим увеличением ее числителя. Поэтому не следует избегать объяснения увеличения десятичной дроби в 10, 100 раз на основании свойства обыкновенной дроби, наоборот, надо дать полное объяснение и только после этого можно разрешить учащимся с той же целью переносить запятую вправо и влево.

В приведенном выше примере надо напомнить учащимся, что, написав 0,360, они по существу не увеличили дробь 0,36; они изменили только вид дроби, так как, умножив числитель на 10, они умножили и знаменатель на 10; в самом деле: $\frac{36}{100} = \frac{360}{1000}$.

Надо обратить их внимание на этот факт, только тогда можно рассчитывать, что подобная ошибка не повторится. Эта ошибка крайне тяжело отражается при вычислениях с мерами. Так, при переводе 0,5 м в сантиметры нередки ответы 0,50; 0,500. Приводим некоторые неверные ответы: полученные при проверке знаний учащихся: $43,7\text{ м} = 0,437\text{ кг}(?)$; $0,54\text{ дм} = 0,054\text{ мм}(?)$; $40\text{ см} = 0,040\text{ м}(?)$; $700\text{ г} = 700000\text{ кг}(?)$; $456\text{ м}^2 = 45\text{ 600 га}(?)$ и т. п.

После того как проделаны упражнения вида:

$$0,7 \cdot 10 = \frac{7}{10} \cdot 10 = 7;$$

$$0,08 \cdot 10 = \frac{8}{100} \cdot 10 = \frac{8}{10} = 0,8;$$

$$0,36 \cdot 10 = \frac{36}{100} \cdot 10 = \frac{36}{10} = 3,6;$$

$$0,452 \cdot 10 = \frac{452}{1000} \cdot 10 = \frac{452}{100} = 4,52,$$

и сравнены данное число и полученный результат, можно говорить о „перенесении в записи запятой“ вправо на один десятичный знак при увеличении десятичной дроби в 10 раз (при умножении на 10). В таком же порядке исследуют вопрос об умножении дроби на 100 и 1000 раз; о делении дроби на 10, 100, 1000 и т. д., например:

$$0,7 : 10 = \frac{7}{10} : 10 = \frac{7}{100} = 0,07;$$

$$0,31 : 10 = \frac{31}{100} : 10 = \frac{31}{1000} = 0,031 \text{ и т. п.}^1$$

2. После сопоставления чисел, записанных в столбец, от меньшего к большему (или от большего к меньшему), можно говорить и о том, что при умножении на 10 бывшие единицы „становятся“ десятками, десятые доли—единицами, сотые доли—десятыми и т. д.

$$\begin{array}{c} \uparrow 2,368 \\ 23,68 \\ 236,8 \\ \downarrow 2368 \end{array}$$

Обоснование для этого может быть дано из рассмотрения десятичной дроби как суммы. Например: $2,368 \cdot 10 = (2 + 0,3 + 0,06 + 0,008) \cdot 10 = 20 + 3 + 0,6 + 0,08 = 23,68$ или с помощью записи обыкновенных дробей:

$$\begin{aligned} 2,368 \cdot 10 &= \left(2 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000} \right) \cdot 10 = \\ &= 20 + 3 + \frac{6}{10} + \frac{8}{100} = 23,68 \end{aligned}$$

3. В случаях, подобных умножению 0,36 на 100, т. е. когда знаменатель дроби равен самому множителю, учащиеся говорят „перенесем запятую“, хотя

¹ Аналогично объясняют умножение, например: $3,7 \cdot 100 = 370$; $0,2 \cdot 1000 = 200$ и т. д. К этому же выводу можно прийти, пользуясь записью десятичной дроби в виде обыкновенной:

$$3,7 \cdot 100 = \frac{37 \cdot 100}{10} = 370; 0,2 \cdot 1000 = \frac{2 \cdot 1000}{10} = 200 \text{ и т. д.}$$

в действительности она опускается. На этот случай надо обратить внимание учащихся и обосновать тем, что произведение дроби на ее знаменатель равно числителю.

4. В упражнениях $0,368 \cdot 100$ или $0,0063 \cdot 100$ иногда учащиеся дают ответ: 036,8; 000,63. Надо повторить вопрос о нулях, стоящих справа и слева в записи десятичной дроби.

5. Следует дать учащимся и примеры увеличения целого числа в 10, 100, 1000 раз „перенесением запятой“. Учащиеся должны понимать целое число, например число 13, как действительное число 13,000000... и не отказываться от перенесения запятой вправо и влево.

6. Плохим навыком является зачеркивание запятой при переносе ее вправо и влево; допускать этого не следует; возможны 2 записи: или $3,608 \cdot 100 = = 360,8$, или подписывание под данным числом числа, полученного в результате увеличения: $3,608$
 $360,8$

Из последней записи ясно продвижение запятой вправо.

То же самое указание следует иметь в виду при делении десятичной дроби на 10, 100, 1000. В случае деления особенно неясный и неаккуратный вид имеет запись с зачеркиванием, когда надо перенести запятую влево, где нет никаких цифр, например $0,0368$ надо уменьшить в 10 раз. Следует записывать или $0,0368 : 10 = 0,00368$, или, что значительно лучше, писать данное число $0,0368$ и под ним число, в 10 раз меньшее, а именно $0,00368$. При этой записи совершенно ясно, что отступили на одну цифру влево.

Здесь подчеркивается та мысль, что в записи числа нуль означает отсутствие единиц какого-либо разряда и, например, число $0,368$ может быть написано $0000,368$ и $0000,36800000$.

Практически мы советуем учащимся не писать лишних нулей слева, заранее продумав, через сколько нулей придется перенести запятую.

Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 применяют к конкретному вопросу перевода мер одного наименования в меры другого наименования.

§ 7. Упражнения. Задачи

После повторения всех указанных выше вопросов учащиеся: 1) решают упражнения по переводу одних мер в другие, на сложение и вычитание мер, в частности, решают упражнения на квадратные и кубические меры.

2) Решают примеры на сложение и вычитание десятичных дробей со скобками, причем в процессе их решения они вспоминают порядок действий первой ступени и значение скобок (гл. IV).

3) Решают задачи с текстом на сложение и вычитание, причем учитель может для повторения придерживаться той последовательности в постановке вопроса задачи, которая разработана в главах „Сложение“ и „Вычитание“ целых чисел, а затем перейти к решению комбинированных задач, имеющих ся в задачнике.

4) Решают упражнения, основанные на знании учащимися изменения суммы и разности при изменении данных, на проверке действий сложения и вычитания.

5) Полезно здесь (возможно и несколько ранее) показать учащимся расположение чисел на числовом луче (рис. 35). Точка O , начальная точка отсчета,



Рис. 35.

соответствует числу 0. Выбирают единицу масштаба, например 1 см, и строят на числовом луче точки, соответствующие натуральному ряду чисел, дробным числам 0,1; 0,2; 0,3;...; 0,9. Предлагают указать точку, соответствующую числу 1,3; 2,5 и т. д.

Если взять единицу масштаба, равную 1 дм, то на отрезке OA учащиеся смогут показать точки, соответствующие числам 0,01; 0,02, 0,03... 0,09, которые расположены между точками, соответствующими числам 0 и 0,1 и т. д.

Число, соответствующее точке, расположенной правее на числовой оси, больше числа, соответствующего

шего точке, расположенной левее ее: $3 > 2 > 1 > 0$;
 $0,9 > 0,5 > 0,1 > 0$; $0,03 > 0,02$ и т. д.
 $3,4 > 3,2 > 3 > 2,5$ и т. д.

§ 8. Примерные вопросы для контрольной работы

Работа I. 1) Записать десятичными знаками десятичные дроби из ряда дробей:

$$\frac{3}{100}; \frac{5}{300}; \frac{100}{455}; \frac{1}{200}; \frac{15}{100}$$

2) Написать в виде десятичных дробей (без знаменателей) дроби:

$$\frac{15}{1000}; 7\frac{3}{10000}; \frac{131}{100000}$$

3) Написать числители дробей:

$$0,156; 13,0284; 5,0062.$$

4) Написать в виде обыкновенных дробей: $0,3568$; $0,00107$; $9,02503$.

5) а) записать $4,32$ кг; $38,5$ мм в виде составных именованных чисел;

б) записать при помощи десятичной дроби: 4 м 5 см; 2 кг 100 г; 15 кг 25 г; 36 км 4 м.

6) а) Сколько килограммов и граммов в $15,06$ кг?

б) " метров и сантиметров в $368,1$ м?

в) " тонн и килограммов в $15,12$ т?

7) Поставить знак „равно“, „больше“ или „меньше“ между числами:

а) $43,789$	$43,8$	$43,08$
б) $0,500$	$0,5$	$0,0579$
в) $1,99899$	$1,999$	

8) Во сколько раз $0,00013$ меньше $0,13$? $47,368$ больше $0,047368$?

9) Сократить дроби: $3,00400$, $2,7050$.

10) Привести числа к общему знаменателю: $3,07$; $3,007$; $30,7$.

Работа II. 1) Сложить письменно:

$$13,068 + 27 + 9,37 + 0,2073.$$

2) Вычесть письменно:

- а) $13,2 - 9,256 =$
б) $20,001 - 7,93 =$
в) $35,19 - 19,35 =$

3) Сложить устно:

$$0,5 + 1,2 = \quad 10,3 + 0,12 = \quad 4,25 + 3,1 =$$

4) Вычесть устно или полуписьменно:

$$\begin{array}{lll} 11,32 - 7 = & 7 - 2,96 = & 1 - 0,4568 = \\ 2 - 1,389 = & 7,356 - 0,04 = & 0,412 - 0,07 = \end{array}$$

5) Решить задачу на сложение и вычитание десятичных дробей и на действия с квадратными или кубическими мерами.

§ 9. Умножение десятичных дробей

Умножение десятичной дроби на целое число. В соответствии с различными определениями умножения на целое число и на дробное рассматриваются два случая умножения десятичных дробей:

1) умножение на целое число и 2) умножение на десятичную дробь.

Вывод правила умножения десятичных дробей обычно основывается на правиле умножения обыкновенных дробей, частным случаем которых они являются. Но для той же цели можно использовать зависимость между изменением сомножителей и соответствующим изменением произведения (десятичных дробей), так как эта зависимость была ранее установлена для обыкновенных дробей и может быть применена к частному случаю—десятичным дробям.

Надо почаще обращать внимание учащихся на то, что при умножении на целое число 25 или на смешанное 25,34 и т. п. в результате получается число, большее множимого, при умножении на 0,34 и др. получается число, меньшее множимого; при умножении на 1 получается число, равное множимому; при умножении на 0 в результате получается 0. Повторяют определение умножения на целое число. Для вывода правила умножения десятичной дроби на целое число предлагают учащимся самостоятельно

решить несколько примеров, что не затрудняет (в обыкновенных дробях), например:

$$0,365 \cdot 7 = \frac{365}{1000} \cdot 7 = \frac{365 \cdot 7}{1000} = \frac{2555}{1000} = 2,555. \quad (1)$$

Замечание. Когда в процессе записи действие умножения обозначено дробью $\frac{365 \cdot 7}{1000}$, учащиеся в большинстве случаев пытаются сократить множитель числителя со знаменателем; можно допустить это, не подавляя их инициативы и не навязывая им правила, для того чтобы всем учащимся стало ясно, что действие можно выполнить и этим приемом над десятичными дробями, так как десятичная дробь есть частный случай обыкновенной дроби.

При этом учащиеся уясняют себе, что им поставлено требование выполнить умножение десятичной дроби на целое число и ответ дать в десятичных же дробях, а при этом требовании путь одновременного деления множителей числителя и знаменателя не приводит быстрее к цели (как в действии с обыкновенными дробями); наоборот, он требует двойной работы учащегося:

$$0,365 \cdot 7 = \frac{365 \cdot 7}{1000} = \frac{73 \cdot 7}{200} = \frac{511 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{2555}{1000} = 2,555. \quad (2)$$

Затем решают еще несколько упражнений на умножение десятичной дроби с разнообразным числом десятичных знаков, хотя бы на целое двузначное число, анализируя получение числителя и знаменателя результата; отсюда делается вывод правила умножения десятичной дроби на целое число в том случае, когда ответ также требуется дать в виде десятичной дроби.

Замечания. 1) Для того чтобы сделать вывод правила, все решенные примеры должны быть аккуратно записаны один под другим на доске и не стертые. Стереть можно только упражнение (2), если оно имело место.

2) Правило умножения десятичной дроби на целое число можно пояснить учащимся (просмотреть еще раз) с точки зрения изменения произведения в

зависимости от изменения множимого. Надо $0,436 \cdot 2$; если $436 \cdot 2$, то получится 872. Вопросами выясняется, что ответ получен в 1000 раз больше действительного ответа, потому что множимое, взятое нами, в 1000 раз более данного. Действительный ответ: 0,872.

3) Если класс менее подготовлен, то полезно вместо числовых примеров взять задачу с условием, для того чтобы до перехода к умножению на дробь еще раз подчеркнуть смысл умножения на целое число и показать, когда этот случай умножения изменяется в действиях с десятичными дробями.

4) Для навыка в быстром (беглом) счете полезны упражнения вида: $0,36 \cdot 20$; $0,36 \cdot 200$ и т. п. В этих случаях некоторые учащиеся сразу говорят ответ, но при этом часто и ошибаются. Эти упражнения можно поставить и после того, как будет указано учащимся, что и при умножении десятичной дроби (как любой дроби) на произведение двух сомножителей можно десятичную дробь сначала умножить на один сомножитель и затем полученное произведение — на другой; так, $0,36 \cdot 200 = (0,36 \cdot 2) \cdot 100$. Как выше было сказано, умножение на однозначное число всегда следует выполнять полуписьменно.

5) Так же полезно давать упражнения для устного счета, аналогичные тем, которые даются при умножении целых чисел, например: умножение на 9, 11, 5, 25 и т. д.

$$0,48 \cdot 9 = 4,8 - 0,48 = 4,32$$

$$0,63 \cdot 11 = 6,3 + 0,63 = 6,93 \text{ и т. д.}$$

6) Умножение целого числа на десятичную дробь учащиеся тоже могут выполнить, пользуясь перестановкой сомножителей, но подобное упражнение в данном месте мы не считаем обязательным, так как при этом должен быть поставлен дополнительный вопрос о смысле умножения на дробное число.

7) Не следует позволять перечеркивать запятую во множимом в процессе выполнения умножения.

8) Упражнения на умножение десятичной дроби на целое число во всех указанных случаях (для работы в классе) учитель может подобрать из задачника или составить сам. При подготовке к занятиям

надо продумать, согласно всему сказанному выше, целесообразную последовательность упражнений.

9) В случае решения задачи, в условии которой имеются меры, учащиеся могут, вычислив результат умножения десятичной дроби на целое число, например $2,54 \text{ м} \cdot 13 = 33,02 \text{ м}$, проверить правильность полученного ответа, раздробив данные меры в более мелкие, чтобы выразить их целым числом: $2,54 \text{ м} \cdot 13 = 254 \text{ см} \cdot 13 = 3302 \text{ см} = 33 \text{ м } 2 \text{ см} = 33,02 \text{ м}$.

Умножение на десятичную дробь. 1. Правило умножения целого числа и десятичной дроби на десятичную дробь можно объяснить учащимся путем рассмотрения десятичных дробей как дробей обыкновенных на числовых примерах¹. Сколько позволит классная доска, четко записывается одно под другим решение нескольких примеров, из сопоставления которых будет сформулировано правило. Число десятичных знаков в сомножителях следует разнообразить; каждый пример надо производить с подробными объяснениями, например:

$$1,32 \cdot 0,7 = \frac{132}{100} \cdot \frac{7}{10} = \frac{132 \cdot 7}{100 \cdot 10} = \frac{924}{1000} = 0,924.$$

Вопросы: Каков был числитель первой дроби? числитель второй дроби? Как получен числитель произведения? Каков был знаменатель первой дроби? второй дроби? Как получен знаменатель произведения? Сколько нулей в знаменателе первой дроби? второй дроби? Сколько нулей в знаменателе произведения? Какое соотношение между числом нулей в знаменателе множимого, множителя и произведения? Сколько десятичных знаков было отделено во множимом? во множителе? Сколько десятичных знаков отделено в произведении? какое между ними соотношение?

2. Так же как и при умножении десятичной дроби на целое число, можно пояснить правило умножения целого числа на десятичную дробь и десятичных дробей и другим способом—на основании изменения произведения в зависимости от измене-

¹ $N_1 = \frac{A}{10^m}$; $N_2 = \frac{B}{10^n}$; $N_1 \cdot N_2 = \frac{A \cdot B}{10^{m+n}}$.

ния сомножителей, а затем требовать от учащихся соответствующих пояснений при выполнении действия.

Например, надо $0,413 \cdot 0,2$; при умножении $0,413$ на 2 полученное произведение $0,826$ в 10 раз больше искомого; при умножении 413 на 2 полученное произведение 826 больше искомого в 10 и в 1000 раз; поэтому для отыскания действительного произведения надо найденный результат уменьшить в 10 и в 1000 раз; окончательно: $0,413 \cdot 0,2 = 0,0826$. Почему в результате получилось число, которое меньше множимого?

Замечания. 1) После того как введено общее правило умножения десятичных дробей, выясняется с учащимися, как это правило читается в вышерассмотренных частных случаях: в случае умножения десятичной дроби на целое число; при умножении целого числа на десятичную дробь и при умножении двух целых чисел.

2) Нельзя допускать перечеркивания запятых при выполнении действия; лучше всего приучить учащихся перемножать дроби, не обращая внимания на запятые, и учитывать их лишь в результате, но можно и переписывать данные числа без запятых; тогда следует вести запись таким путем:

$$3,16 \cdot 20,4 = 64,464.$$

$\begin{array}{r} \times 3,16 \\ \hline 1264 \\ 632 \\ \hline 64,464 \end{array}$	или	$\begin{array}{r} \times 316 \\ \hline 1264 \\ 632 \\ \hline 64464 \end{array}$
---	-----	---

Первый способ записи
следует предпочесть второму.

Ошибка, которую при второй записи допускают учащиеся, заключается в том, что в целом числе—результате умножения целых чисел 316 и 204 —они отделяют запятой десятичные знаки, и получается неверная запись.

Нет необходимости (да и неудобно) подписывать сомножители так, чтобы запятая одного числа помещалась под запятой другого.

3) Особое внимание следует уделить упражнениям, относящимся к умножению на $0,1$; $0,01$ и т. д., а также умножению на $0,2$; $0,5$; $0,25$.

Большое число учащихся, проверенных нами, допустило ошибки при умножении на 0,1; 0,01; 0,001. Среди давших неверный ответ при умножении на 0,1, 0,01 и т. д. были подготовленные учащиеся, не сделавшие больше ни одной ошибки во всей контрольной работе. Приведем ответы учащихся для того, чтобы учитель учел в своей практической работе эти затруднения:

$$\begin{array}{ll} 4,2 \cdot 0,1 = 420(?) & 37 \cdot 0,1 = 370(?) \\ 0,03 \cdot 0,1 = 3(?) & 32,6 \cdot 0,01 = 3,26(?) \\ 0,7 \cdot 0,01 = 7(?) & 28,7 \cdot 0,01 = 2870(?) \text{ и т. д.}^1 \end{array}$$

Надо неоднократно повторять, что задачу нахождения какой-либо дроби (части) называют умножением на дробь, поэтому умножить на 0,1—все равно, что разделить на 10; умножить на 0,01—все равно, что разделить на 100. При этом не следует пренебрегать и применением общего правила умножения на десятичную дробь, чтобы и рассуждением, и техническим применением правила, и связанным с этим зрительным восприятием помочь усвоению этого затрудняющего учащихся момента работы.

Запись: а) $325 \cdot 0,01 = 325 : 100 = 3,25$;

$$\text{б) } 325 \cdot 0,01 = 325 \cdot \frac{1}{100} = \frac{325}{100} = 3,25;$$

в) $\begin{array}{r} \times 325 \\ 0,01 \\ \hline 3,25 \end{array}$ (позже и эту запись следует делать в строчку: $325 \cdot 0,01 = 3,25$).

4) Понимание смысла умножения на десятичную дробь ($325 \cdot 0,2$) является слабым местом у учащихся V класса; в большинстве случаев учитель математики подчеркивает смысл умножения на дробь только в отделе обыкновенных дробей. В результате недооценки этого вопроса в упражнениях и при решении задач с десятичными дробями мы имеем случаи, когда учащиеся отказываются отвечать на вопрос, чему равно 0,3 от 75, или 0,2 от 64, или дают

¹ Эти неверные записи никоим образом не следует выписывать на доске для учащихся; на доске для обозрения учащимся должны даваться только верные записи.

самые разнообразные неправильные ответы, как, например: 0,3 от 75 составляет 225; 0,08 от 1200 составляет 15000 и т. п.

Процент от числа. В процессе изучения десятичных дробей учитель имел возможность неоднократно напоминать учащимся, что дробь 0,01 называется 1%. Предлагая умножить число на 0,01 (рассмотрено выше), можно сформулировать это требование словами: „найти 1% данного числа“, а затем решать упражнения на нахождение любого процента от числа (см. гл. XI).

Устные упражнения. 1) Пусть надо $325 \cdot 0,2$. Учащиесяходят две десятые доли от числа или $\frac{1}{5}$ часть от 325, т. е. $325 : 5 = 65$.

2) $360 \cdot 0,4$, или найти 0,4 от 360; 3) $2,5 \cdot 0,6$;
4) $75 \cdot 0,04$ и т. д.

3) Умножение на 0,5; 0,25; 0,75.

Если надо умножить число на 0,5, учащиеся должны сразу делить число пополам; если надо умножить на 0,25, надо выполнить деление на 4 и т. д.

4) Нахождение 20%, 25%, 50%, 75% и т. д. от целых чисел и десятичных дробей.

5) Умножение десятичной дроби на 5, 50, 25 и др.

$$0,37 \cdot 5 = (0,37 \cdot 10) : 2 = 3,7 : 2 = 1,85.$$

$$0,37 \cdot 50 = 37 : 2 = 18,5.$$

$$0,32 \cdot 25 = 32 : 4 = 8.$$

6) Устно вычисляют ответ в случае умножения $0,1 \cdot 0,1$; $0,4 \cdot 0,8$; $0,4 \cdot 0,5$ и т. п., чтобы учащиеся уяснили, что при умножении десятых долей на десятые получаются сотые и т. д.

Последовательность упражнений. 1. Умножение двух и нескольких сомножителей. 2. Комбинированные примеры на сложение, вычитание и умножение со скобками и без скобок, причем повторяется установленный порядок действий.

3. Решение задач с текстом, требующих применения умножения.

4. Вопросы теоретического характера: изменение произведения в зависимости от изменения сомножителей; нахождение дроби числа; нахождение делимого как произведения делителя и частного и др.

§ 10. Примеры для контрольной работы

- 1) Выразить в граммах 40,3 кг;
" в сантиметрах 3,5 м; 14,02 м;
" в килограммах 13,2 т;
" в квадратных сантиметрах: 45,68 км²;
403 м²;
" в кубических сантиметрах: 3,689 м³;
14,25 м³; 0,1 м³.

- 2) Умножить: $3,5681 \cdot 100$; $4,1 \cdot 10000$;
 $10 \cdot 3,078$; $0,0003 \cdot 100$; $1000 \cdot 12,1$.

- 3) Умножить устно: $0,7 \cdot 0,4$; письменно: $3,685 \cdot 300$;
 $0,5 \cdot 13$; " $10,5 \cdot 23,4$;
 $0,7 \cdot 200$; " $13,42 \cdot 0,07$;
 $25 \cdot 0,1$; " $4,001 \cdot 3,02$;
 $35 \cdot 0,01$; " $0,452 \cdot 0,31$;

полуписьменно: $25,4 \cdot 0,01$; $5230 \cdot 0,001$;
 $0,09 \cdot 0,01$; $3000 \cdot 2,17$.

- 4) Найти (одним действием):
 $0,4$ от 68; 7% от 45,3;
 $0,03$ от 500; 22% от 60.
 $0,12$ от 35;

- 5) Вычислить: $3,02 \cdot 5,1 \cdot 14,2 \cdot 10,1$.

6) Решить задачу, требующую выполнения умножения десятичных дробей.

7) Решить задачу на сложение, вычитание и умножение десятичных дробей.

§ 11. Деление десятичных дробей.

Деление десятичной дроби на целое число

Как при умножении десятичных дробей, так и при их делении рассматриваются 2 случая: 1) деление на целое число и 2) деление на десятичную дробь. Деление есть действие, обратное умножению; деление на 0 исключается; это следует постоянно напоминать учащимся.

При изучении действия деления десятичных дробей учащиеся впервые встречаются с новыми поня-

тиями: „бесконечное деление“, „бесконечная десятичная дробь“, „приближенное частное“, выраженное десятичной дробью. С приближенным результатом измерения и „округлением“ целых чисел учащиеся должны в большинстве случаев быть уже знакомы (см. гл. II, § 3 и 5).

Деление десятичной дроби на целое число не затрудняет учащихся. Рассматривая этот случай деления на ряде последовательно подобранных примеров, надо поставить перед учащимися вопрос о том, что деление может быть конечное и бесконечное.

Рассматривается случай, когда десятичная дробь делится на целое число так, что для получения частного не приходится выражать единицы последнего разряда делимого в единицах следующего низшего разряда, как, например, в случае:

$$\begin{array}{r} 5,76 \overline{) 18} \\ \underline{0,32} \end{array}$$

Далее рассматривается случай, когда для получения частного надо раздробить единицы последнего разряда делимого и продолжать деление достаточно далеко для получения конечного частного. Начать можно с примера:

$$\begin{array}{r} 17,5 \overline{) 14} \\ \underline{1,25} \end{array}$$

и окончить решением примера вида:

$$\begin{array}{r} 4,567 \overline{) 125} \\ \underline{456} \quad 0,036536 \\ 375 \\ \underline{817} \\ 750 \\ \underline{670} \\ 625 \\ \underline{450} \\ 750 \\ \underline{0} \end{array}$$

Среди примеров рассматривают и случай деления целого числа на целое, например:

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{4} \\ \hline 10 & 3,25 \\ \hline 20 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{r|l} 13 & \underline{8} \\ \hline 50 & 1,625 \\ \hline 20 & \\ \hline 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

(В дальнейшем запись ведется в строчку.)

Замечания. 1) Надо приучить учащихся своевременно ставить запятую в частном; это требует сосредоточенности в работе и тем самым предохраняет от ошибок.

2) Объяснение необходимости дробления долей при делении, например $17,5 : 14$, можно привести на конкретном примере: например, 17 руб. и 5 гривенников надо разделить между 14 ребятами; каждый получит по 1 руб. (один целый рубль) — остается 3 руб. и 5 гривенников; если разменять рубли на гривенники и если каждому дать по два гривенника (2 десятые рубля), то останется 7 гривенников, которые можно выразить (разменять) в копейках, и каждому дать по 5 копеек (5 сотых рубля). На конкретном примере объясняется также сущность раздробления крупных долей в более мелкие, как на примере деления 13 м на 8 частей, когда получается ответ: $1 \text{ м } 6 \text{ дм } 2 \text{ см } 5 \text{ мм} = 1,625 \text{ м}$.

Только после такой предварительной работы можно перейти к рассмотрению случая деления десятичной дроби (или целого числа) на целое, когда в частном получается бесконечная дробь. Даются такие примеры, чтобы учащиеся поняли, что в рассмотренных прежде случаях дело заключалось только в затрате достаточного времени, чтобы довести деление до конца, а что в случае деления $22 : 9 = 2,4444\dots$ окончания деления быть не может; также в случае деления $52 : 165 = 0,31515\dots$ и в других примерах, где цифры остатка, служащего делимым, повторяются, так как тогда при одном и том же делителе и цифры частного будут повторяться и также снова будут повторяться цифры остатка делимого и т. д. Попутно

полезно выяснить с учащимися, что, например, при делителе 9 различных остатков может быть только 8 (исключая 0), при делителе 5 их могло быть 4, а при делителе 71 разнообразных остатков может быть 70 и что иногда не так скоро удается определить остаток, который начнет повторяться, и соответствующую цифру частного.

В этих рассмотренных примерах имеет место „бесконечное деление“; результат его (частное) выражается „бесконечной десятичной дробью“, в которой повторяются одна или несколько цифр. В случае бесконечного деления в частном справа после найденных цифр ставится многоточие (обычно ставятся 3 точки). Учащиеся должны помнить, что записи 2,4141 и 2,4141... не равнозначны; в первом случае имеется конечная, а во втором случае бесконечная десятичная дробь, в которой повторяются цифры 4 и 1. Более подробно нами рассмотрен вопрос о приближенном числе в § 16 при обращении обыкновенной дроби в десятичную, но учитель может рассмотреть его и при делении двух целых чисел.

Любопытные учащиеся потребуют объяснения, почему при делении десятичной дроби на целое число мы не пользуемся правилом деления обыкновенных дробей. Учитель может на примерах показать им, что в скрытом виде мы этим правилом пользуемся, но применять его каждый раз очень громоздко. Пусть надо десятичную дробь $3,51$ разделить на целое число 27 . По правилу деления обыкновенных дробей:

$$3,51 : 27 = \frac{351}{100} : 27 = \frac{351}{27 \cdot 100}; \text{ но } 351 \overline{)27}, \text{ тогда } 3,51 : 27 = \frac{13}{100} =$$

$= 0,13$. По существу мы свели деление к делению целых чисел, только в указанном в предыдущем параграфе приеме мы учитывали своевременно место запятой.

Позже учащиеся перейдут к общему случаю деления дробей, когда надо (даем в общем виде) разделить десятичную дробь

$$\frac{A}{10^n} \text{ на десятичную дробь } \frac{B}{10^m}.$$

§ 12. Приближенное частное

После того как учащиеся установили факт возможности бесконечного деления, ставится вопрос: как же практически поступить в случае необходимости разделить 22 руб. между 9 ребятами (пример дан выше)? Ясно, что если имеются 22 монеты по рублю, то каждому придется по две монеты (по 2 руб.): $22 \text{ руб.} : 9 = 2 \text{ руб.}$, при этом остаток составляет 4 руб., и каждый может получить еще деньги,

но меньше, чем 1 рубль. Говорят, что при делении $22 : 9$ получили приближенное частное 2 с точностью (с недостатком) до единицы.

Если разменять 22 руб. на гривенники, то монет будет 220 и каждому придется по 24 монеты, и останется 4 монеты по гривеннику, так что при этом потеря каждого меньше, чем гривенник, т. е. меньше 0,1 руб. Говорят, что при делении $22 \text{ руб.} : 9 \approx 2,4$ руб. получили приближенное частное 2,4 с точностью (с недостатком) до 0,1 руб.

Если все деньги будут в копейках, тогда будет 2200 монет и каждому можно будет дать по $2200 : 9 = 244$ монеты, т. е. по 2,44 руб. Деление чисел можно производить дальше; но более мелких монет нет, и на этом следует остановиться, т. е. сказать, что при распределении 22 руб. между 9 ребятами каждый получит по 2 руб. 44 коп., или по 2,44 руб., причем остается остаток в 4 коп.; потеря же каждого меньше, чем 1 коп. В этом случае говорят, что получено приближенное частное с точностью (с недостатком) до 0,01 руб.

$22 : 9 \approx 2$ Для упражнения учитель может взять
 $22 : 9 \approx 2,4$ любые 2 целых числа, не делящихся
 $22 : 9 \approx 2,44$ друг на друга нацело.

Ранее был рассмотрен случай получения приближенного числа в результате измерения; здесь приближенное число получено в результате деления.

Вопрос об округлении целых чисел знаком учащимся; новым в случае округления десятичной дроби будет вопрос об округлении до какой-либо десятичной доли. Учащиеся знают, что приближенное число выражается не только с недостатком, но и с избытком. В данном конкретном случае нельзя этого сделать—нельзя распределить денег больше, чем имеешь, или разделить на части длину больше имеющейся. В дальнейшем, при обращении обыкновенной дроби в десятичную и при решении примеров на деление отвлеченных чисел и десятичных дробей, показывают приближенное значение дроби, взятое и с недостатком и с избытком (§ 17). Правила округления—те же.

§ 13. Деление на десятичную дробь

В этом случае проще начать с решения числового примера, для того чтобы не усложнять вывода нового правила действия деления вопросом о смысле деления на дробь, которое потребуется для решения задачи.

Пусть надо $0,7608 : 0,24$. Приведя дроби к общему знаменателю, можно разделить $7608 : 2400$, как и рекомендуют многие методисты, в частности Ф. Егоров и А. М. Воронец. Это правило вытекает из приведенной выше общей теории и может быть общим для всех случаев деления десятичных дробей, но оно крайне неудобно во многих практических случаях и благодаря излишним трудностям приводит на практике ко многим ошибкам и не может быть рекомендовано, как правило, для использования в школе. Например, согласно этому правилу, вместо того чтобы делить $3,68756$ на $0,4$, приходится делить 368756 на 40000 и т. п. Целесообразнее случай деления на десятичную дробь свести к известному уже учащимся случаю деления на целое число, тогда в указанном выше примере деление $36,8756 : 4$ можно будет выполнить даже полуписьменно.

Надо $7,2 : 0,36$. Делитель должен быть целым числом; можно взять делителем целое число 36 , в 100 раз большее данного, но для получения искомого частного надо и делимое умножить на 100 , а затем выполнить деление $720 : 36 = 20$.

Дадим обоснование предлагаемому приему.

По правилу деления дробей:

$$0,7392 : 0,24 = \frac{7392}{10000} : \frac{24}{100} = \frac{7392 \cdot 100}{10000 \cdot 24} = 73,92 : 24 \text{ и т. д.},$$

или

$$\begin{aligned} 0,7392 : 0,24 &= 0,7392 : \frac{24}{100} = \frac{0,7392 \cdot 100}{24} = \frac{73,92}{24} = \\ &= 73,92 : 24 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Приведем запись действия¹:

¹ Упражнения 1) и 2) даны в одной записи; 3) и 4) — в другой. Учащиеся могут пользоваться и одной, и другой записью по указанию учителя.

$$1) 0,7392 : 0,24 = 3,08; \quad 2) 14 : 1,6 = 8,75;$$

$$\begin{array}{r} 73,92 \quad | \quad 24 \\ \underline{192} \quad 3,08 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 140 \quad | \quad 16 \\ \underline{128} \quad 8,75 \\ 120 \\ \underline{112} \\ 80 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$3) 1,4 : 1,6 = \frac{14}{16} = 0,875$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ \underline{120} \\ 80 \\ \underline{0} \end{array}$$

или

$$4) 0,7392 : 0,24 = \frac{73,92}{24} = 3,08$$

$$\begin{array}{r} 73,92 \\ \underline{192} \\ 0 \end{array}$$

По правилу деления обыкновенных дробей, деление на десятичную дробь сводится: 1) к делению целых чисел, а именно соответствующих числителей делимого и делителя, после того как данные десятичные дроби приводят к общему знаменателю, например:

$$0,351 : 0,27 = \frac{351}{1000} : \frac{27}{100} = \frac{351}{1000} : \frac{270}{1000} = \frac{351}{270}$$

и

$$3,51 : 0,027 = \frac{351}{100} : \frac{27}{1000} = \frac{3510}{1000} : \frac{27}{1000} = \frac{3510}{27},$$

или 2) к делению на целое число:

$$0,351 : 0,27 = \frac{35,1}{100} : \frac{27}{100} = 35,1 : 27;$$

$$3,51 : 0,027 = \frac{3510}{1000} : \frac{27}{1000} = 3510 : 27.$$

И из данных примеров, и из общего случая деления десятичных дробей:

$$\frac{A}{10^n} : \frac{B}{10^m} = \frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^n}; \quad \frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^n} = \frac{A \cdot 10^{m-n}}{B} = A \cdot 10^{m-n} : B$$

(при $m \geq n$)

или

$$\frac{A \cdot 10^m}{B \cdot 10^n} = \frac{A}{B \cdot 10^{n-m}} = \frac{A}{10^{n-m}} : B \quad (\text{при } m < n)$$

ясно, что а) деление десятичных дробей всегда может быть приведено к делению на целое число (B) и что б) знаменатель дроби, получающийся в частном, вообще говоря, не представляет собой степени десяти и что искомое частное может быть выражено точной десятичной дробью только в том случае, если $\frac{A}{B}$, т. е. част-

ное от деления целых чисел, соответствующих числителю делимого и делителю, обратится в конечную десятичную дробь. Поэтому вопрос о делении в случае десятичных дробей стоит в связи с обращением обыкновенной дроби в десятичную и с учением о приближенном частном. Учащимся можно пояснить сказанное только на числовых примерах, подобных приведенным, давая каждый на своем месте.

Указания. 1. Получив частное от деления десятичных дробей, зная, что при этом изменились данные числа, учащиеся пытаются иногда еще увеличить или уменьшить (исправить) полученное частное. Надо: 1) приучить учащихся, как и при действии с целыми числами, округленно оценивать полученное частное с точки зрения соответствия его ожидаемому ответу; 2) указать учащимся, что в данном случае, заменяя деление на десятичную дробь делением на целое число, они увеличивают и делимое и делитель в одно и то же число раз, от чего частное не изменяется.

2. Не следует допускать в записях перечеркиваний запятых—надо переписать пример, как указано выше, причем целесообразно раньше написать делитель в виде целого числа, а потом—делимое.

3. В большом количестве следует решать примеры на деление десятичных дробей, установив одно правило, выведенное выше: делитель должен быть целым числом. Следует брать разнообразные примеры: деление десятичной дроби на целое число, деление целого числа на десятичную дробь и различные случаи деления десятичных дробей, когда в делимом число десятичных знаков меньше, больше и равно числу десятичных знаков в делителе.

4. Прежде в достаточном количестве решаются примеры на деление, дающие в частном конечную десятичную дробь; после этого переходят к случаю

деления, когда в частном получается бесконечная десятичная дробь, при этом: 1) учат оценивать точность приближенного ответа в случае, например, когда ответ дан с двумя, тремя десятичными знаками; 2) читают с учащимися ответ, беря его с определенной степенью точности, округляя результат по известным учащимся правилам округления чисел; 3) выполняют деление с наперед заданной степенью точности, например, до 0,01, до 0,001. При этом учащиеся с целью правильного округления результата непосредственно вычисляют 3 десятичных знака при делении в том случае, когда требуется для ответа точность до 2 десятичных знаков; вычисляют 4 десятичных знака в частном, когда требуется дать приближенный ответ до тысячных долей и т. д. В дальнейшем учащиеся могут сразу судить о последней цифре округленного частного по последнему остатку, будет ли он меньше или больше, или равен половине делителя, например:

$$\begin{array}{r} \text{а) } \underline{45} \overline{) 37} \\ \underline{80} \quad 1,21 \\ \hline 60 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{б) } \underline{45} \overline{) 37} \\ \underline{80} \quad 1,216 \\ \hline 60 \\ \hline 230 \\ \hline 222 \\ \hline 8 \end{array}$$

В примере а) $45:37$ —ответ 1,22 с точностью до 0,01; так как остаток 23 больше, чем половина 37, и при дальнейшем делении третьим десятичным знаком будет цифра $6 > 5$; в примере б) приближенный ответ 1,216 с точностью до 0,001; он ближе к точному числу, так как остаток $8 < \frac{37}{2}$ и следующая цифра в частном будет $2 < 5$. (Подробно см. § 17.)

5. Не следует избегать примеров, в которых требуется выразить конечную десятичную дробь с требуемой степенью точности, иначе у учащихся складывается убеждение, что только бесконечная дробь может быть выражена приближенно.

При решении примеров надо снова и постоянно обращать внимание учащихся, что при делении числа

на целое число, например на 37, или на смешанное 37,1 в результате получается число меньше делимого; при делении на 0,37 получается число больше делимого, так как в этом случае по смыслу деления на дробь отыскивается число по известной величине его части, меньшей искомого числа.

7. Как при умножении двух десятичных дробей с двумя десятичными знаками учащиеся часто в произведении отделяют только 2 десятичных знака, например: $0,14 \cdot 0,26$ пишут $= 3,64$, так и при делении десятичной дроби с одним десятичным знаком на дробь также с одним десятичным знаком учащиеся часто пишут ответ также с одним десятичным знаком, например: $0,8 : 0,2$ они пишут 0,4. Надо проверкой показать им неправильность подобного ответа. Вообще в примерах на деление десятичных дробей надо выполнять бегло проверку возможности получаемого ответа для того, чтобы не допускать таких случаев, когда при делении $7 : 50$ ответ получается 1,4, когда при делении $18 : 300$ дается ответ 6; $12,8 : 4$ —ответ 32 и много других.

8. Наблюдаются затруднения у учащихся при делении на 0,1; 0,01; 0,001, как и при умножении на эти числа; поэтому надо решить с учащимися много упражнений вида: $4 : 0,001$ умножением на 1000; $25 : 0,01$; $27 : 0,001$; $315 : 0,001$; $31,25 : 0,01$ и т. п. и снова тщательно выяснить вопрос о смысле деления на (десятичную) дробь.

9. Как обычно, изучение вопроса заканчивается:

а) решением численных примеров, ответами на вопросы теоретического характера (определение деления, зависимость между делимым, делителем и частным, вычисление неизвестного компонента, изменение частного в зависимости от изменения данных и др.);

б) решением задач с текстом; задачи, решаемые делением, разобраны нами подробно в соответствующей главе для целых чисел (гл. VI, § 2) и затем дополнены в главе для дробных чисел (гл. IX, § 14);

в) решением упражнений на нахождение числа по известной величине его дроби и на нахождение числа по известному его проценту и на нахождение процентного отношения двух чисел (гл. IX, XI).

10. Задачи, требующие для своего решения умножения и деления именованных чисел (мер), не представляют собой каких-либо новых вопросов, не перечисленных в основных задачах на умножение и деление. Следует обратить внимание на задачи, в условиях которых даны различные меры; например, по площади прямоугольной фигуры, выраженной в арах или гектарах, и длине, выраженной в метрах, надо найти ее ширину; по весу, выраженному в килограммах, и двум линейным размерам, выраженным в метрах, надо найти третий размер и т. п.

11. Решаются задачи на все 4 действия (см. гл. XII „Задачи“) и простейшие задачи с процентными расчетами.

§ 14. Примеры для контрольной работы

- 1) Выразить в метрах 5 см, 30 см.
 „ в килограммах 30,2 г;
 „ в тоннах 15,2 кг, 236 кг и т. п.

Выразить в квадратных метрах:

5 см², 103 см²; 42560 см².

Выразить в кубических метрах:

17 см³, 3568 см³, 12000 см³.

- 2) Разделить:

устно и полуписьменно		письменно
325 : 1000	24,6 : 4	46,81 : 31
46 : 1000	2,25 : 5	18,08 : 29
45,38 : 100	0,9 : 0,3	10,4 : 65
2,4 : 1000	0,48 : 0,3	0,441 : 21
0,35 : 100	0,6 : 0,02	52 : 0,13
0,04 : 100	35 : 0,5	91,2 : 7,6
315 : 0,001		2,9788 : 2,2
4,2 : 0,001		

Указание. Учитель сам составляет примеры путем умножения того частного, которое он желает получить в ответе; например, умножением 0,62 на делитель 29; делимым взять 17,98 и т. д.

- 3) Найти приближенное частное:

а) с точностью до 0,001, 253 : 9 и др.

б) с точностью до 0,01, 3,24 : 0,8; 3,2 : 0,08 и др.

4) Решить задачу и пример на все действия с десятичными дробями.

Вопросы: 1) Как изменится частное от деления $42,5 : 0,25$, если в делимом и в делителе отбросить запятые? 2) Найти число (одним действием), $0,7$ которого равны 49 . 3) Найти число, 4% которого равны $23,6$. 4) Найти отношение $49,2$ к $4,1$ и отношение $0,36$ к 3 .

§ 15. Запись десятичной дроби в виде обыкновенной

Предлагают задачу, для решения которой придется сложить (или вычесть) десятичную дробь с обыкновенной, и ставят перед учащимися вопрос о необходимости записи десятичной дроби в виде обыкновенной, и наоборот. Запись десятичной дроби в виде обыкновенной для учащихся не представляет затруднений, и можно ограничиться небольшим числом примеров, преимущественно допускающих сокращение.

Замечание. Иногда употребляют выражение „обратить десятичную дробь в обыкновенную“. Это выражение неточное, так как десятичная дробь есть частный случай обыкновенной.

§ 16. Обращение обыкновенной дроби в десятичную

Частный прием. Устанавливают, что каждое из чисел: $10, 100, 1000$ и т. д., которые служат знаменателями десятичных дробей, представляет собой произведения множителей 2 и 5 , причем множителей и двоек, и пятерок в каждом из этих чисел поровну: $10 = 2 \cdot 5$; $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$; $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$. Рассматривают несократимые дроби, знаменатель которых содержит только простые множители 2 и 5 в какой-либо степени, например: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{25}, \frac{9}{50}$ и аналогичные. Преобразовывают дроби, имеющие в знаменателе множители 2 и 5 ; например, если дробь $\frac{3}{25}$ надо выразить в виде десятичной дроби, то среди знаменателей, которые могут быть у десятичной дроби ($10, 100, 1000$ и т. д.), можно найти такой (наименьший из них

100), к которому можно привести данную дробь умножением ее знаменателя (следовательно, и числителя) на дополнительный множитель: $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{100} = \frac{12}{100} = 0,12$. Такое рассуждение применимо к примерам $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{20}$ и т. п. Из рассмотренных выше примеров делается вывод общеизвестного правила обращения обыкновенной дроби в десятичную путем дополнения сомножителей знаменателя двойками и пятерками до получения равного числа их в знаменателе и соответствующего увеличения числителя обыкновенной дроби.

Учащиеся должны научиться по числу двоек или пятерок в знаменателе сразу оценивать знаменатель десятичной дроби, в которую будет переведена обыкновенная дробь.

Проводятся устные упражнения по переводу обыкновенной дроби в десятичную. Некоторые соотношения записываются в таблицу и запоминаются учащимися:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} = 0,5, \quad \frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{1}{5} = 0,2, \quad \frac{1}{25} = 0,04, \\ \frac{1}{4} = 0,25, \quad \frac{3}{8} = 0,375, \quad \frac{2}{5} = 0,4, \quad \frac{2}{25} = 0,08, \\ \frac{1}{8} = 0,125, \quad \frac{5}{8} = 0,625, \quad \frac{3}{5} = 0,6, \quad \frac{3}{25} = 0,12. \end{array}$$

Надо следить за тем, чтобы в дальнейшем, где возможно, учащиеся сознательно пользовались вышеуказанным частным приемом выражения обыкновенной дроби в виде десятичной.

Общий прием. Дается общий прием обращения обыкновенной дроби в десятичную путем непосредственного деления числителя на знаменатель.

Надо, восстановив в памяти учащихся определение дроби как частного от деления одного числа на другое, записать: $\frac{5}{7}$; $\frac{22}{9}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{7}{8}$ и непосредственным делением обратить эти обыкновенные дроби в десятичные. На этих и на других примерах установить, что одни обыкновенные дроби могут быть выражены точно в виде десятичной дроби (понимая

под десятичной дробью конечную дробь), другие, как в случае дроби $\frac{22}{9}$, при попытке выразить их в виде десятичной дроби дают бесконечную дробь.

1. Для того чтобы выяснить причину, почему в результате деления двух чисел иногда получается конечная десятичная дробь, иногда бесконечная, снова рассматривают дроби, имеющие в знаменателе только множители 5 или 2 в какой-либо степени.

2. Из рассмотрения примеров вида $\frac{3}{7}$; $\frac{8}{9}$, а затем $\frac{5}{12}$; $\frac{5}{18}$ и др. устанавливают, что нет таких множителей, на которые можно было бы умножить данные знаменатели 7, 9, 12, 18, чтобы получить знаменатели 10, 100, 1000, ... Эти дроби не могут быть обращены в десятичные дроби (конечные), и непосредственное деление числителя на знаменатель в данном случае дает в результате бесконечный ряд десятичных знаков.

3. Из рассмотрения знаменателей обыкновенных дробей, обращающихся и не обращающихся в конечную десятичную дробь, устанавливают признаки знаменателей обыкновенной дроби (множители только 2 и 5 в любой степени), при которых можно утверждать, что обыкновенная дробь обращается в конечную десятичную дробь¹.

Указание. Дробь $\frac{3}{12}$ можно обратить в десятичную (конечную), так как множитель 3 из знаменателя исчезает после сокращения дроби $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Надо поставить перед учащимися несколько подобных примеров и установить, что судить о возможности обращения обыкновенной дроби в десятичную можно по знаменателям только дроби несократимой (в нормальном виде).

¹ В теоретической арифметике дается вывод необходимого и достаточного условия, при наличии которого обыкновенная несократимая дробь может быть точно обращена в десятичную. Число десятичных знаков полученной десятичной дроби равно показателю степени того из множителей 2 и 5, входящих в знаменатель, у которого этот показатель больший.

Учащиеся должны получить достаточный навык в быстром определении, может ли данная дробь быть выражена в виде конечной десятичной дроби или нет и можно ли это выполнить обоими приемами, указанными выше, или только делением числителя на знаменатель.

4. Причина повторения десятичных знаков при делении двух целых чисел или при обращении обыкновенной дроби в десятичную была объяснена учащимся в § 11. В данном случае надо только повторить с учащимися этот вопрос и ввести наименование „период“, „периодическая дробь“.

5. Решаются упражнения по обращению любых обыкновенных дробей в десятичные.

При обращении обыкновенной дроби в десятичную в случае бесконечного деления результат представляет собой бесконечную десятичную периодическую дробь.

Замечание. Повторяем, конечную десятичную дробь, например $0,272727$, не следует смешивать с периодической дробью $0,272727\dots$ Точное значение этой периодической дроби $\frac{3}{11}$, что можно проверить делением $3:11$.

§ 17. Приближенное значение дроби

Рассматривают несколько бесконечных десятичных дробей, получающихся от обращения обыкновенной дроби в десятичную; указывают приближенное значение дроби с недостатком и с избытком; например:

$$\frac{34}{45} = 0,7555\dots \quad \begin{array}{r} 34 \quad | \quad \underline{45} \\ 340 \quad 0,7555\dots \\ \underline{315} \\ 250 \\ \underline{250} \end{array}$$

$$\frac{2}{9} = 0,2222\dots \quad \begin{array}{r} 2 \quad | \quad \underline{9} \\ 20 \quad 0,2222\dots \text{ (см. таблицу)} \end{array}$$

Дробь	Значение с недостатком	Значение с избытком	С точностью до
$\frac{34}{45}$	0 0,7 0,75 0,755	1 0,8 0,76 0,756	1 0,1 0,01 0,001
$\frac{2}{9}$	0, 0,2 0,22 0,222	1 0,3 0,23 0,223	1 0,1 0,01 0,001

Беря приближенные значения дробей $\frac{34}{45}$ и $\frac{2}{9}$ все с большим числом десятичных знаков, получают все более близкие приближения к самим числам $\frac{34}{45}$ и $\frac{2}{9}$.

Для уяснения сущности понятия „приближенное значение“ и оценки того, в каком случае приближенное значение, взятое ли с недостатком или с избытком, ближе к точному значению дроби, можно вычислить с учащимися разность между точным значением дроби, ее выражением в виде обыкновенной дроби и ее приближенным значением с той или иной степенью точности:

$$0,2 < \frac{2}{9} < 0,3.$$

$$\text{Так, } \frac{2}{9} - 0,2 = \frac{2}{9} - \frac{2}{10} = \frac{2}{9} - \frac{1}{5} = \frac{10-9}{45} = \frac{1}{45} = \frac{2}{90}; \text{ или,}$$

предвидя необходимость выразить в одинаковых долях обе разности, пишут:

$$\frac{2}{9} - 0,2 = \frac{2}{9} - \frac{2}{10} = \frac{20-18}{90} = \frac{2}{90},$$

$$0,3 - \frac{2}{9} = \frac{3}{10} - \frac{2}{9} = \frac{27-20}{90} = \frac{7}{90},$$

$\frac{7}{90} > \frac{2}{90}$; поэтому 0,2 ближе к точному значению дроби $\frac{2}{9}$, чем 0,3, и т. д.

Как и для целых чисел (см. гл. II), даются правила округления десятичных дробей: десятичные дроби округляют до десятых, до сотых долей и т. д.; это значит, что последняя значащая цифра показывает десятые, сотые доли и т. д. Вместо слов

„округлить до десятых долей“ говорят: „округлить до второго десятичного знака“.

Пример. Число 3,682415 приближенно равно:

3,7 (до десятых долей)

3,68 (до сотых долей)

3,682 (до тысячных долей)

3,68242 (до сотысячных долей) и т. д.

Термин „десятичные знаки“ не следует смешивать с термином „значащие цифры“ (см. § 21).

§ 18. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями

При решении практических задач часто приходится выполнять действия одновременно с обыкновенными и десятичными дробями. Учащиеся понимают, что можно вычислить результат, если выразить все данные дроби или в виде обыкновенных, или в виде десятичных.

Устанавливается, что преобразование обыкновенных дробей в десятичные не всегда обеспечит точный ответ задачи (могут получиться бесконечные десятичные дроби), и хотя десятичные дроби всегда можно записать в виде обыкновенных и точно вычислить результат, но действия с обыкновенными дробями выполнять труднее, чем с десятичными, поэтому при совместных действиях с обыкновенными и десятичными дробями надо выбирать приемы наиболее рациональные.

1. Действия выполняют в десятичных дробях: а) когда имеющиеся в примере обыкновенные дроби выражаются конечными десятичными дробями и выполняемое преобразование обыкновенных дробей облегчает вычисления; например, в случае $\frac{2}{5} + 0,13 = 0,4 + 0,13 = 0,53$; б) когда нецелесообразно выражать десятичную дробь в виде обыкновенной, например; $0,345 + \frac{1}{2}$; в) когда требуется дать приближенный результат. При этом устанавливается, с какой точностью берутся данные числа, с какой точностью получится приближенный результат после

выполнения всех указанных действий (см. § 21). В случаях а) и б) ответ получается точный.

2. Действия выполняются в обыкновенных дробях во всех остальных случаях, когда надо получить точный ответ, например: $\frac{2}{7} + 0,13 = \frac{2}{7} + \frac{13}{100} = \frac{291}{700}$; дробь $\frac{2}{7}$ не может быть выражена конечной десятичной дробью.

3. Если в примере указано несколько действий умножения и деления обыкновенных и десятичных дробей, то целесообразно выполнять все действия в обыкновенных дробях, причем ведется такая запись.

$$3,68 \cdot \frac{2}{23} : 0,14 \cdot 5 \frac{1}{2} : 5 = \frac{368 \cdot 25 \cdot 100 \cdot 11}{100 \cdot 23 \cdot 14 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 11}{7} = \\ = \frac{220}{7} = 31 \frac{3}{7}.$$

4. Если в примере (числовой формуле) указано несколько действий сложения и вычитания как с дробями обыкновенными, так и с десятичными, то иногда¹ полезно сначала выполнить все действия над десятичными дробями отдельно.

Замечание. В технических расчетах, когда имеют дело с обыкновенными и десятичными дробями, обычно обыкновенные дроби заменяют десятичными, причем все десятичные дроби берут с некоторым приближением (в большинстве случаев с тремя значащими цифрами).

§ 19. Примеры для контрольной работы

1) Выписать дроби, которые обращаются в конечные десятичные:

$$\frac{5}{14}; \frac{3}{20}; \frac{7}{24}; \frac{96}{125}; \frac{1}{60}; \frac{9}{40}.$$

2) Вычислить в десятичных дробях:

$$10,356 + \frac{7}{8} - \frac{9}{75} - \frac{1}{50}.$$

¹ Если при этом выполнимо вычитание.

3) Вычислить точно:

$$0,475 + 0,7 + \frac{5}{9} - \frac{7}{36}.$$

4) Вычислить: $\frac{3}{8} \cdot 0,16 : \frac{1}{9} \cdot 16 \frac{2}{3}$.

5) Задача. 1 см³ керосина весит 0,8 г, а 1 см³ бензина весит на 0,1 г меньше. Сколько весит вместе с тарой смесь из $6\frac{1}{2}$ л керосина и 3 л бензина, налитая в бидон, весящий $1\frac{4}{5}$ кг?

6) Пример на все действия с обыкновенными и десятичными дробями.

§ 20. Периодические дроби

1. При обращении обыкновенной дроби в десятичную учащиеся получили представление о периодической дроби и о периоде. В дальнейшем на примерах обращения обыкновенной дроби в десятичную выясняется, что периодические дроби бывают чистые и смешанные:

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571\dots = 0,(428571); \quad \frac{5}{6} = 0,83333\dots = 0,8(3);$$

даются определения периодических дробей по учебнику, показывается запись их и чтение.

2. На ряде примеров устанавливают, что при обращении обыкновенной дроби в десятичную в том случае, когда получается бесконечная десятичная дробь, она всегда периодическая. Причина повторения десятичных знаков выяснялась (в § 11) при объяснении деления десятичных дробей. Там же было выяснено, что число повторяющихся остатков при делении двух чисел ограничено (оно на единицу меньше, чем делитель), поэтому при обращении обыкновенной дроби в десятичную повторяющихся цифр в десятичной дроби не может быть больше, чем число единиц в знаменателе обыкновенной дроби, из которой она получена.

Так, при обращении обыкновенной дроби $\frac{3}{7}$ в десятичную, т. е. при делении 3:7, в остатке могут

получиться числа только от 1 до 6; значит, и в периоде не может быть больше 6 цифр; меньшее число цифр может быть. Так, при делении

$$\frac{3}{7} = 3 \overline{) 21} \begin{array}{r} 7 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array} 0,(428571), \text{ но } \frac{2}{9} = 0,(2), \text{ в этом случае полу-}$$

$$\frac{30}{20}$$

чается только одна цифра в периоде. Для получения периода полезно брать примеры, дающие в периоде большое число цифр, например:

$$\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{14}; \frac{11}{14} \text{ и т. д.}$$

Вопросы, связанные с бесконечными десятичными периодическими дробями, рассматривались в средних школах в дореволюционное время в довольно большом объеме. В задачниках того времени имелось большое число задач, в условии которых давались данные, выраженные периодическими дробями.

В нашей советской школе в курсе арифметики сведения учащихся о периодических дробях ограничивались установлением их получения при обращении обыкновенной дроби в десятичную и выражением обыкновенной дроби (в случае получения бесконечной десятичной периодической дроби) ее приближенными значениями, взятыми с любой степенью точности (§ 16 и 17).

Когда в курсе алгебры средней школы был поставлен вопрос „понятие об иррациональном числе как о бесконечной десятичной непериодической дроби“, то в связи с этим было уделено несколько больше внимания и вопросу о бесконечных десятичных периодических дробях в курсе арифметики для того, чтобы учащимся в старших классах была ясна разница в получении бесконечной периодической десятичной дроби (которая может быть выражена обыкновенной дробью, равной ей) и бесконечной десятичной непериодической дроби (иррационального числа). Тогда в курс арифметики был включен вопрос об „обращении периодической дроби в обыкновенную“, но, как известно, этот вопрос может быть обоснован только после ознакомления с понятием предела¹, поэтому в программе по арифметике (с 1943 г.) снова оставлено только „понятие о периодической дроби“.

I. Обращение чистой периодической дроби в обыкновенную

1. Общеизвестный прием (изложен в стабильном учебнике) заключается в том, что непосредственным делением $1:9$; $1:99$;

¹ В курсе алгебры IX класса ставится вопрос об обращении периодической дроби в обыкновенную в связи с рассмотрением вопроса о сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

1:999 и т. д. устанавливают, какие периодические дроби получаются от обращения таких обыкновенных, у которых числитель есть 1, а знаменатель—цифра 9, написанная один или несколько раз подряд:

$$\frac{1}{9}=0,1111\dots=0,(1); \quad \frac{1}{99}=0,0101\dots=0,(01);$$

$$\frac{1}{999}=0,001001\dots=0,(001).$$

Затем сравнивают данную непериодическую дробь, которую хотят обратить в обыкновенную, с одной из полученных периодических дробей, имеющей в периоде столько же цифр, сколько данная дробь; например, $0,(35)=0,353535\dots$ сравнивают с дробью $0,010101\dots = \frac{1}{99}$.

Предполагают, что данная периодическая дробь $0,3535\dots = \frac{1}{99} \cdot 35 = \frac{35}{99}$; проверкой убеждаются, что $\frac{35}{99}$ при обращении в десятичную дробь действительно дает $0,(35)$. Решив несколько аналогичных примеров (число цифр в периоде рассматриваемых дробей следует брать различное), выводят правило.

Недостаточность приведенного доказательства в том, что положение, известное для суммы конечного числа слагаемых, без особого доказательства применяется к суммам с бесконечным числом слагаемых, а именно: при сравнении $0,353535\dots$ с $0,010101\dots$ допускалось, что если каждое слагаемое увеличить в 35 раз, то и сумма увеличится в 35 раз.

2. В школах дается и иной прием обращения чистой периодической дроби в обыкновенную: пусть надо обратить в обыкновенную дробь $0,(35)$.

Обозначим:

$$\begin{aligned} 0,(35) &= x, \text{ или} \\ x &= 0,353535\dots, \text{ а} \\ 100x &= 35,3535\dots \text{ или} \\ 99x &= 35, \text{ откуда } x = \frac{35}{99}. \end{aligned}$$

Неубедительность этого доказательства для учащихся обнаружилась в школе, где пришлось его наблюдать, в возгласе одной ученицы (V класса): „Вы передвинули запятую, тогда в конце второго числа не хватит двух цифр“. Нестрогость этого „доказательства“ та же, что и в предыдущем приеме.

II. Обращение смешанной периодической дроби в обыкновенную

Правило обращения смешанной периодической дроби в обыкновенную можно вывести из рассмотрения примеров, имеющих различное число цифр до периода и в периоде, причем не следует осложнять работы целой частью десятичной дроби, и в примерах следует брать 0 целых. Например:

$$0,28(35) = \frac{28,(35)}{100} = \frac{28 \frac{35}{99}}{100} = \frac{28 \cdot 99 + 35}{9900} = \frac{28 \cdot (100-1) + 35}{9900} = \frac{2835-28}{9900};$$

$$0,28(5) = \frac{28,(5)}{100} = \frac{28 \frac{5}{9}}{100} = \frac{28 \cdot 9 + 5}{900} = \frac{28 \cdot (10-1) + 5}{900} = \frac{285-28}{900};$$

$$0,2(85) = \frac{2,(85)}{10} = \frac{2 \frac{85}{99}}{10} = \frac{2 \cdot 99 + 85}{990} = \frac{2 \cdot (100-1) + 85}{990} = \frac{285-2}{990} \text{ и т. д.}$$

Последовательность рассуждений ясна из записи. После вывода правила подсчитывается результат для каждой дроби.

Остановимся на некоторых вопросах, которые задают любознательные учащиеся, знакомясь с периодическими дробями (эту работу можно проводить во внеклассное время).

1) Эти вопросы прежде всего относятся к случаям, когда в периоде стоит цифра 9.

На примерах надо показать, что если период данной периодической дроби состоит из одной только цифры 9, то не существует такой обыкновенной дроби (не обращающейся в конечную десятичную), которая разлагалась бы в данную периодическую дробь.

Действительно:

$$0,28(9) = \frac{28,(9)}{100} = \frac{28 \frac{9}{9}}{100} = \frac{29}{100} = 0,29; \quad 0,(9) = \frac{9}{9} = 1$$

$$5,(9) = 5 \frac{9}{9} = 6$$

В первом случае получили конечную десятичную дробь 0,29; во втором и третьем случаях—целые числа 1 и 6. Исходя из этих рассуждений, следует разъяснить учащимся, что вполне возможно исключить из рассмотрения десятичные периодические дроби, у которых период состоит из одних лишь девяток. Тогда каждую обыкновенную дробь выражают только единственным способом в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной). В противном случае одна и та же дробь, например $\frac{7}{10}$, могла бы быть записана в виде двух бесконечных периодических дробей: 0,7(0) и 0,6(9).

2) Сколько цифр получается в периоде при обращении обыкновенной дроби в десятичную? Учащимся можно сказать, что ответ

на этот вопрос имеется в науке теории чисел, а они могут только проверить, что число цифр в периоде не зависит от числителя обыкновенной дроби, разлагающейся в периодическую, и одинаково для всех дробей с одинаковыми знаменателями. Так, для знаменателей 3 и 9 всегда в периоде получается одна цифра, для знаменателя 11—две цифры, для знаменателей 7 и 13—шесть цифр и т. д. Период, как было показано, не может содержать больше цифр, чем имеется единиц в знаменателе обыкновенной дроби без одной; часто в периоде получается меньшее число цифр:

$$\frac{1}{3} = 0,(3); \quad \frac{2}{3} = 0,(6); \quad \frac{1}{9} = 0,(1); \quad \frac{1}{11} = 0,(01);$$

$$\frac{5}{11} = 0,(45) \text{ и т. д.}$$

3) Есть еще один вопрос, на который ученики ждут ответа: признаки обращения обыкновенных дробей в чистую и в смешанную периодическую дробь¹.

Объяснить учащимся это несколько затруднительно, но можно на примере показать, что в процессе деления числителя дроби на знаменатель при обращении обыкновенной дроби в десятичную постепенно сокращаются множители 2 и 5, находящиеся в знаменателе.

Это ясно для обыкновенной дроби, обращающейся в конечную десятичную, например:

$$\frac{9}{40} \text{ дают } 0 \text{ целых и } \frac{90}{40} \text{ десятых, } \frac{9}{90} \left| \frac{40}{0,2} \right.$$

т. е. 0 целых, 2 десятые и $\left(\frac{10}{40} \text{ десятых}\right) \frac{1}{4} \text{ десятых, или } 0,2 \text{ и } \frac{10}{4} \text{ сотых, т. е. } 0,22 \text{ и } \frac{2}{4} \text{ сотые, т. е. } 0,22 \text{ и } \frac{10}{2} = 5 \text{ тысячных}$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 40} \\ \underline{90} \quad 0,225 \text{ Окончательно } \frac{9}{40} = 0,225 \\ \underline{100} \\ \underline{200} \\ 0 \end{array}$$

При раздроблении целых чисел в десятые доли, десятых—в сотые и т. д. остатки (а следовательно, и числители) приобретали множителей 5 и 2, которые и сокращались с множителями 2 и 5, имеющимися в знаменателе обыкновенной дроби, и в результате, когда сократились все множители 2 и 5 знаменателя ($40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, три раза раздробляли доли), получили конечную десятичную дробь.

Очевидно, если в состав знаменателя вовсе не входят множители 2 и 5 или если, кроме 2 и 5, входят еще какие-либо множители

¹ А. Киселев, Арифметика, изд. 1938 г. и более поздних лет, § 176—194.

то сколько бы ни раздробляли остатки (умножали на $10=2 \cdot 5$), никогда не сократятся множители знаменателя, отличные от 2 и 5, а потому такую обыкновенную дробь нельзя обратить в конечную.

Если в состав знаменателя не входят множители 2 и 5, то ни одного сокращения (изменения делителя) не произойдет:

$$\frac{2}{11} \text{ дают } 0 \text{ целых и } \frac{20}{11} \text{ десятых, } \begin{array}{r} 2 \overline{) 11} \\ \underline{20} \\ 90 \\ \underline{90} \\ 20 \end{array}$$

т. е. 0,1 и $\frac{90}{11}$ сотых, или 0,18 и $\frac{20}{11}$ тысячных, т. е. 0,181 и $\frac{90}{11}$

десятитысячных и т. д.

Получается чистая периодическая дробь.

Если в состав знаменателя входят множители 2 и 5, кроме других множителей, то эти множители в процессе раздробления остатков сократятся, а так как каждый раз при умножении на 10 можно сократить только одну двойку и одну пятерку, то число множителей 2 и 5 в знаменателе определяет число десятичных знаков, стоящих до периода, и в результате получается смешанная периодическая дробь.

§ 21. Приближенные вычисления

О месте и объеме вопроса.

Вопрос о месте и объеме приближенных вычислений в школьном курсе математики до сих пор остается неразрешенным в программе средней школы. Довольно большое место уделялось этому вопросу в программах математики средней школы после Великой Октябрьской социалистической революции до 1931/32 учебного года. Однако постановка преподавания математики в те годы и, в частности, отсутствие в достаточном количестве методически разработанной литературы для учителя по этому вопросу привели к тому, что приближенные вычисления в дальнейшем в программу средней школы не вошли.

В настоящее время в связи с требованием дать учащимся практические приложения приобретаемых ими вычислительных навыков все настойчивее ставится вопрос о введении приближенных вычислений в программу средней школы. В программу можно было бы включить следующее: „Числа точные и приближенные. Округление данных и результатов действий. Абсолютная и относительная погрешность приближенного числа. Четыре действия над приближенными числами. Правила подсчета цифр при этих действиях“.

В этом объеме и рассматривается вопрос о приближенных вычислениях в настоящей методике.

Первые сведения о приближенных числах и их округлении учащиеся получают при изучении натуральных чисел. Эти сведения должны быть несколько расширены и углублены в V классе на занятиях по арифметике. Но на этом работа не может закончиться, она должна продолжаться и в старших классах. Учащиеся старших

классов на практике знакомятся с вопросами точности тригонометрических и логарифмических таблиц; кроме того, учащимся V класса нельзя дать теоретического обоснования указываемых им приемов приближенных вычислений, это можно сделать только в старших классах.

В курсе арифметики учащиеся встречаются с вопросами, дающими им представления о необходимости введения приближенного числа: статистические данные, практика измерения, деление целых чисел и десятичных дробей, обращение обыкновенной дроби в десятичную и др. Каждый раз в этих случаях учитель должен ставить соответствующие вопросы перед учащимися: о приемах округления чисел, о вычислении с числами, полученными в результате их округления, о точности окончательного результата, о точности, с которой берутся числа для получения результата определенной точности и т. п. Все эти вопросы с учащимися V класса надо рассматривать исключительно практически на числовых примерах, выбирая самые простые и доступные приемы. Наиболее целесообразно пользоваться способом „подсчета цифр“, хотя „способ границ“, освещаемый ниже, учитель может использовать для внеклассной работы, в особенности со старшими учащимися.

Абсолютная погрешность. Разность между точным числом и его приближенным значением называется абсолютной погрешностью этого приближенного значения. Например: число 1,09254 может быть заменено его приближенным значением: 1,092 или 1,093. В I случае погрешность равна $1,09254 - 1,092 = +0,00054$, во II случае $1,09254 - 1,093 = -0,00046$.

Для того чтобы оценить точность приближенного значения, рассматривают абсолютную величину погрешности; так как $0,00046 < < 0,00054$, то погрешность во II случае меньше, чем в I.

Погрешность (абсолютную погрешность) можно вычислить, когда известно точное число. Так как погрешность в обоих рассматриваемых случаях меньше 0,001, то 1,092 и 1,093 называются приближенными значениями числа 1,09254 с точностью до 0,001. Так как разность (по абсолютному значению) $0,00046 < 0,0005$, то можно сказать, что 1,093 есть приближенное значение числа 1,09254 с точностью до 0,0005; этого нельзя сказать о числе 1,092, так как $1,09254 - 1,092 = 0,00054 > 0,0005$.

Замечание. Приближенное значение числа с точностью до a будет в то же время приближенным значением этого числа с точностью до $a' > a$. В самом деле, 1,093 есть приближенное значение числа 1,09254 с точностью до 0,005, значит, оно будет приближенным значением того же числа с точностью до 0,05, до 0,01 и т. д.

Если сказано, что число с точностью до 0,00001 равно 1,09254, то этим не исключена возможность, что число в действительности равно 1,09254. Число 1,092 называется приближенным значением числа 1,09254 с недостатком; число 1,093 называется приближенным значением числа 1,09254 с избытком.

Пример. $\frac{10}{7} = 1, (428571)$.

¹ При округлении низшую границу можно только уменьшить, а высшую только увеличить, другими словами, мы можем расширить границы, но не суживать их.

$$1 < \frac{10}{7} < 2$$

$$1,4 < \frac{10}{7} < 1,5$$

$$1,42 < \frac{10}{7} < 1,43$$

$$1,428 < \frac{10}{7} < 1,429$$

Любое из чисел: 1; 1,4; 1,42; 1,428; ... можно считать приближенным значением $\frac{10}{7}$ с недостатком; любое из чисел 2; 1,5; 1,43 и т. д. можно считать приближенным значением той же дроби с избытком.

1 и 2—приближенные значения $\frac{10}{7}$ с точностью до 1, так как абсолютное значение разности

$$\left| \frac{10}{7} - 2 \right| \text{ или } \left| 2 - \frac{10}{7} \right| ; \left| 1 - \frac{10}{7} \right| \text{ или } \left| \frac{10}{7} - 1 \right| \text{ меньше } 1, \text{ но}$$

разность между этими приближенными значениями числа $\frac{10}{7}$, а именно $2 - 1 = 1$. Аналогично, числа 1,4 и 1,5—приближенные значения $\frac{10}{7}$ с точностью до 0,1, так как

$$\left| \frac{10}{7} - 1,5 \right| < 0,1 \text{ и } \left| \frac{10}{7} - 1,4 \right| < 0,1; \text{ но } 1,5 - 1,4 = 0,1 \text{ и т. д.}$$

Погрешность двух приближенных значений числа, взятых с недостатком и с избытком с одинаковой точностью, по абсолютной величине меньше разности этих приближенных значений.

Приближенное сложение и вычитание.

Взвешивание некоторого предмета a показало, что он весит больше 63 г и меньше 63,5 г. Другой предмет b весит более 77,5 г и менее 78 г.

- 1) Каков общий вес a и b ?
- 2) На сколько вес b больше веса a ?

Решение.

$$1) \quad \begin{array}{l} 63 < a < 63,5 \\ 77,5 < b < 78 \\ \hline 140,5 < a + b < 141,5 \end{array} \text{ (с точностью до 1 г)}$$

$$2) \quad \begin{array}{l} 77,5 < b < 78 \\ 63 < a < 63,5 \\ \hline 14 < b - a < 15 \end{array} \text{ (с точностью до 1 г)}$$

Итак: если данные числа известны только приближенно, то их сумму (разность и т. д.) можно найти только приближенно.

1) Складывая приближенные значения слагаемых, взятые с недостатком, получают приближенное значение суммы тоже с недостатком, а складывая приближенные значения слагаемых с избытком, получают приближенное значение суммы тоже с избытком.

$$1 \quad \frac{3}{7} < 1; \quad \frac{4}{7} < 1.$$

2) Вычитая из приближенного значения уменьшаемого по недостатку приближенное значение вычитаемого по избытку¹, получают приближенное значение разности по недостатку, вычитая из приближенного значения уменьшаемого по избытку приближенное значение вычитаемого по недостатку, получают приближенное значение разности по избытку.

Аналогично можно показать, что в результате перемножения приближенных значений множителей с недостатком получается приближенное значение произведения с недостатком, а в результате перемножения приближенных значений множителей с избытком получается приближенное значение произведения тоже с избытком. В результате деления приближенного значения делимого с недостатком на приближенное значение делителя с избытком получается приближенное значение частного с недостатком, а в результате деления приближенного значения делимого с избытком на приближенное значение делителя с недостатком получается приближенное значение частного с избытком.

1) Найти площадь пола коридора, длина которого a больше 16,4 м и меньше 16,45 м, а ширина b — между 3,2 м и 3,25 м.

2) Узнать отношение длины пола к ширине.
Решение. 1) $16,4 \cdot 3,2 < a \cdot b < 16,45 \cdot 3,25$; $52,48 < a \cdot b < 53,4625$, разность между найденными приближенными значениями: $53,4625 - 52,48 = 0,9825$, т. е. несколько меньше 1. Поэтому целесообразно указывать эти приближенные значения с большим числом цифр, можно их округлить до 1.

Указание. Для того чтобы взять приближенное значение с недостатком, можно взять число, меньшее 52,48, а для того чтобы взять приближенное значение с избытком, можно взять больше, чем 53,4625 (нельзя взять меньшее; см. замечание стр. 355).

Ответ. $52 < ab < 53,5$ (с точностью до 1,5).

$$2) \begin{array}{l} 16,4 < a < 16,45 \\ 3,2 < b < 3,25 \\ \hline \frac{16,4}{3,25} < \frac{a}{b} < \frac{16,45}{3,2} \end{array}$$

$5,04 < \frac{a}{b} < 5,14$; больше цифр брать не имеет смысла.

Ответ. $5,0 < \frac{a}{b} < 5,2$ (с точностью до 0,2).

Указанные примеры оценки точности получаемого результата просты, хотя и приходится находить 2 значения: с недостатком и с избытком (метод границ или метод двойного подсчета). Имеются другие способы вычисления приближенного результата; учащимся следует давать лишь один прием.

Вышеизложенный способ может быть рассмотрен во внеклассной работе, так как для V и VI классов рекомендуется способ „подсчета цифр“, к методике изложения которого переходим.

¹ В „перекрестном“ порядке.

Последовательность работы.

так и точных чисел.

Там же указывалось, что в практической работе приходится иметь дело преимущественно с приближенными числами, что десятичные дроби и многозначные числа (точные или приближенные) часто округляют (т. е. отбрасывают одну или несколько последних цифр), и было дано правило округления.

2. Учащиеся знают, что если первая из отбрасываемых цифр более пяти, то последнюю из оставляемых цифр надо усилить, т. е. увеличить на единицу (этого не делают, если первая из отбрасываемых цифр меньше пяти). Усиление единицей последней цифры делают для того, чтобы уменьшить получаемую при округлении погрешность (абсолютную величину разности между первоначальным и округленным числами). Следует проверить, взяв, например, число 82,37, которое при округлении с точностью до 0,1 дает 82,3 и 82,4; при усилении последней цифры $82,4 - 82,37 = 0,03$; это меньше, чем $82,37 - 82,3 = 0,07$.

Число 82,34 при округлении до 0,1 дает 82,3 и 82,4, но в этом случае усиление последней цифры ($82,4 - 82,34 = 0,06$) дает большую погрешность, чем $82,34 - 82,3 = 0,04$, поэтому усиливать единицей последнюю цифру при округлении не следует. Следует напомнить, что имеется особый случай, когда округление состоит в отбрасывании одной только цифры 5. В таком случае обычно применяют правило четной цифры.

3. Числа округляют до 1, 10, 100, ... и, как показано на таблице (стр. 346), до десятых, сотых долей и т. д. Отбрасывая цифры в целом числе, всегда заменяют их нулями. Говорят: „округлить до сотен, десятков, до сотых, до тысячных“, или „округлить до второго десятичного знака, до третьего“ и т. д.

4. Ранее сказано, что термин „десятичные знаки“ не следует смешивать с термином „значащая цифра“. Показать на примерах, что, например, число 7,036 имеет 4 значащие цифры и 3 десятичных знака, 0,000123 имеет 3 значащие цифры и 6 десятичных знаков. Первой значащей цифрой называется первая слева цифра, отличная от 0, в записи этого числа; второй значащей цифрой — цифра, следующая за ней, хотя бы она была 0 и т. д., например, в числе 0,01203 первая значащая цифра 1, вторая 2, третья 0 и т. д. Нули стоящие левее первой значащей цифры, не считаются значащими цифрами. Так, числа 37; 0,37; 0,037 имеют по две значащие цифры. Число десятичных знаков у этих чисел различно (0, 2, 3).

5. Подчеркивается, что цифра 0 употребляется справа: а) для показа отсутствия единиц какого-либо разряда, тогда 0 „значащая цифра“, например, при замене 1 кг = 1000 г число 1000 имеет 4 „значащие цифры“, б) 0 ставится при округлении числа, взамен отброшенных или неизвестных цифр, тогда 0 считается „значащей

¹ Вместо термина „приближенно“ иногда говорят „приблизительно“. „Приблизительно“ можно говорить при оценке величины на глаз; термин „приближенно“ употребляют, определяя величину с известной точностью.

цифрой"; например, при округлении числа жителей 257693 до сотен получили 257700. Приписывать нули в десятичные дроби справа можно только в том случае, когда десятичная дробь—число точное, например, $1 \text{ г} = 0,001 \text{ кг} = 0,0010 \text{ кг}$. Нельзя записать вместо $12,03 \text{ м}$ $12,030 \text{ м}$, так как это означало бы, что измерение дало не только сантиметры, но и миллиметры (0).

6. На практике вычисления выполняют с точностью до 3 или 4 значащих цифр, и данные числа редко бывают с большей точностью; данные часто даются с различной точностью, поэтому при вычислении эти числа округляют, сохраненные цифры считают точными, если погрешность не превосходит по абсолютной величине единицы соответствующего разряда¹.

Например, при округлении числа 25, 3682 до сотых долей имеем 25,37; погрешность округленного числа меньше 0,01 (она равна 0,0018), и последняя цифра 7 не совпадает с последней цифрой данного точного числа.

7. В практике приближенных вычислений мы имеем две задачи: а) как производить действия для того, чтобы в результате была наименьшая погрешность, б) с какой точностью нужно брать первоначальные данные, чтобы обеспечить требуемую точность результатов вычисления. Метод „подсчета цифр“, который дается учащимся V и VI классов, отвечает на первый вопрос без строгого учета погрешности². Для выяснения его надо всемерно вовлекать учащихся в выполнение и анализ упражнений, указываемых ниже.

Возьмем пример.

Сложение и вычитание приближенных чисел.

Пусть при взвешивании двух предметов получили 3,46 кг и 5,2 кг. Каков их общий вес? Надо сложить $3,46 + 5,2$. В первом слагаемом мы знаем сотые доли, но не знаем тысячных и дальше; во втором слагаемом мы знаем десятые доли, но не знаем сотые и дальше.

Запишем слагаемые. Знаки „?“ на месте неизвестных цифр.

$$\begin{array}{r} + 3,46? \\ + 5,2?? \\ \hline 8,66 \end{array}$$

Ясно, что последняя цифра 6 ненадежна. Если отбросить эту ненадежную цифру, то получим $\approx 8,7 \text{ кг}$, т. е. последней цифрой будут только десятые доли.

¹ Иногда на практике, когда известно значение величины с недостатком и с избытком, за приближенное значение принимают их среднее арифметическое. Пусть измерили длину: $4,2 \text{ м} < a < 4,3 \text{ м}$; принимают за приближенное значение $\frac{4,2+4,3}{2} = 4,25 \text{ (м)}$.

Тогда погрешность будет меньше, чем $4,25 - 4,2 = 0,05$ или $4,25 - 4,3 = -0,05$; абсолютная величина ошибки не больше, чем 0,05. Пишут: длина $4,25 \pm 0,05$. Погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего разряда.

² Ранее указано, как при помощи „способа границ“ отвечают на вопрос: на какую точность можно рассчитывать в результате вычислений с приближенными данными.

Аналогично при вычитании; например, если в предыдущей задаче нужно узнать, на сколько один предмет тяжелее второго, то

$$\begin{array}{r} - 5,2?? \\ \underline{3,46?} \\ 1,74 \end{array} \text{ Ответ. } \approx 1,7,$$

где сотые доли ненадежны. Предложив учащимся для самостоятельного решения достаточное число примеров, устанавливают, что «при сложении и вычитании чисел в результате следует сохранять столько десятичных знаков, сколько их имеет наименее точное данное, причем менее точным данным считается то, в котором меньше десятичных знаков». Если же складывают или вычитают приближенные числа, имеющие одно и то же число десятичных знаков, то в результате сохраняют это же число десятичных знаков¹.

Если складывают точное число с приближенным, то точное число не влияет на точность результата.

Умножение и деление приближенных чисел.

Задача 1. Найти площадь участка, длина которого 16,4 м, ширина 23,7 м (оба данных числа — приближенные, имеют одинаковое число значащих цифр).

Ясно, что в произведении последние цифры 6 и 8 ненадежны, так как они получены от прибавления к известным числам неизвестных.

Искомая площадь — 389 кв. см = 3,89 кв. дм. Перемножали два приближенных числа с тремя значащими цифрами каждое, получили произведение тоже с тремя значащими цифрами.

Задача 2. Различное число значащих цифр во множимом и во множителе.

Например:

$$\begin{array}{r} 3,14? \\ \underline{0,68?} \\ \quad ??? \\ 2512? \\ \underline{1884?} \\ 2,1352 \end{array}$$

Ясно, что цифры 3, 5 и 2 ненадежны. Ответ. $\approx 2,1$.

После решения нескольких примеров на умножение можно формулировать правило: «При умножении чисел в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет то число, у которого меньше значащих цифр». Если перемножают приближенные числа с одинаковым числом значащих цифр, то в произведении сохраняют то же число значащих цифр.

¹ Иногда при вычитании двух приближенных близких друг к другу чисел имеет место потеря значащих цифр (не десятичных знаков), например:

$$\begin{array}{r} 4,568? \\ \underline{4,517?} \\ 0,051 \end{array}$$

Задача 3. При умножении приближенного числа на точное сохраняется столько значащих цифр, сколько их в приближенном числе:

$$\begin{array}{r} 2,51? \\ \times 8 \\ \hline 20,08? \end{array}$$

Ответ. $\approx 20,1$ (3 значащие цифры).

Замечание. Полезно приучить учащихся проверять правильность постановки запятой путем предварительной оценки произведения; в данном случае $2,5 \times 8 = 20$.

Правило деления приближенных чисел то же, что и при умножении.

Пример. $2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{6} \approx 2,666... : 1,166... \approx 2,29$ (частное округлено до трех значащих цифр).

$$\text{Проверка. } 2\frac{2}{3} : 1\frac{1}{6} = \frac{8 \cdot 6}{3 \cdot 7} = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7} = 2,(\overline{285714}) \approx 2,29.$$

Для нахождения приближенного частного, когда известно, с какой точностью дается ответ, производят деление до тех пор, пока в частном не получится цифра разряда, на единицу большего, чем нужный разряд, затем ее отбрасывают, применяя правила округления¹.

Пример. $10 : 7$, найти с точностью до 0,01.

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 7} \\ \underline{14} \\ 1428 \dots \end{array}$$

$\dots \approx 1,43$. Можно не вычислять последнюю цифру, а сразу по остатку (в данном случае тысячных) оценить, будет ли следующая цифра больше пяти единиц следующего десятичного знака или меньше.

Для проверки справедливости даваемого правила надо организовать работу класса: некоторые из учащихся выполняют вычисления в случае, когда приближенные числа взяты с одним числом значащих цифр, другая группа — с различным числом значащих цифр.

Упражнения.

1) Найти площадь участка, длина которого 85 м, ширина 44 м.
2) Узнать длину земельного участка, если ширина его 112 м, а площадь 540 кв. м.

3)

Длина окружности	Длина диаметра
54 см	17 см
16,2 дм	5,1 дм

Установить отношение длины окружности к длине ее диаметра в каждом измерении.

Дальнейшая работа.

1) Учащимся указывают, что в том случае, когда для получения результата надо выполнить несколько действий, то в результатах промежуточных действий берется не столько десятичных знаков при сложении и вычитании и не столько значащих цифр при умножении и делении, сколько указано выше, но одной цифрой

¹ Более подробно см. в специальном руководстве.

больше (запасная цифра, которая устраняет погрешность, накапливающуюся в результате округления этих промежуточных результатов).

2) Указывают, что ввиду вышеустановленного можно при вычислении облегчить себе работу, заранее округлив более точные данные, а именно: оставляя при сложении и вычитании один запасный десятичный знак, при умножении и делении—одну запасную значащую цифру.

Например: а) Надо найти периметр четырехугольника, если известно, что одна из сторон, наименее точно измеренная, равна 4,6 км (до 100 м), а остальные—2,57 км; 0,324 км, 0,624 км. Ясно, что с точностью до 1 м не стоит вести вычисления: достаточно сложить

$$\begin{array}{r} 4,6 \\ 2,57 \\ 0,32 \\ 0,62 \\ \hline 8,11 \approx 8,1 \text{ км} \end{array}$$

Ответ надежен только с одним десятичным знаком

$$\begin{array}{r} 4,6?? \\ 2,57? \\ 0,324 \\ 0,624 \\ \hline 8,118 \approx 8,1 \end{array}$$

Ответ тот же

б) Вычислить вес железного бруска с квадратным основанием, размеры которого 3,2 см, 9,5 см и 9,5 см; удельный вес железа 7,8.

Решение. Объем бруска $9,5^2 \cdot 3,2$; ответ должен быть с двумя значащими цифрами:

$$9,5^2 = 90,25 \approx 90,2; \quad 90,2 \cdot 3,2 = 288,64 \approx 289 \text{ (куб. см)}; \quad 289 \cdot 7,8 = 2254,2. \quad \text{О т в е т. } \approx 2,3 \text{ (кг)}.$$

Работа упростилась благодаря округлению промежуточных результатов, ответ от этого не потерял в точности.

Пусть для определения длины двора произвели три измерения:

Понятие об относительной погрешности.

Результат Абс. погрешн. Относит. погрешн.

1-е измерение	114,6 м	+0,5 м	$\frac{0,5}{114,6} \approx 0,4\%$
2 "	115,7	-0,6	$\frac{0,6}{115,7} \approx 0,5\%$
3 "	115,0	+0,1	$\frac{0,1}{115,0} \approx 0,1\%$

Ср. арифметич. 115,1 м

Вывод. Более тщательно было проведено 3-е измерение.

Погрешность, которую вычисляли в предыдущих упражнениях, называлась абсолютной погрешностью. В данном случае абсолютная погрешность измерений взята как отклонение каждого измерения от среднего результата (при нескольких измерениях среднее арифметическое принимают за точное значение; знак „+“ показывает превышение среднего арифметического над результатом измерения).

Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к абсолютной величине приближенного числа. Относительную погрешность принято выражать в процентах.

Если приближенные числа имеют одно и то же число значащих цифр, например:

516 (с точностью до 1); 51600 (до 100); 5,16 (до 0,01); 0,0516 (до 0,0001), то относительная погрешность во всех случаях:

$$\frac{1}{516} = \frac{100}{51600} = \frac{0,01}{5,16} = \frac{0,0001}{0,0516} \approx 0,19\%, \text{ одинакова, меньше } 1\%.$$

Во всех данных приближенных числах три значащие цифры и относительная погрешность меньше 1% (случай, наиболее часто встречающийся в технических расчетах). Относительная погрешность показывает, какую часть составляет абсолютная погрешность от измеряемой величины.

Абсолютная погрешность не характеризует качество выполненного измерения.

Одна и та же абсолютная погрешность может считаться значительной и незначительной в зависимости от числа, которым выражается измеряемая величина.

У п р а ж н е н и я. 1) Приближенное число 5,73. С какой точностью взято это число?

2) Найти сумму приближенных чисел $7,35 + 0,04 + 12$.

3) Найти разность приближенных чисел $4,5 - 2,368$.

4) Найти приближенное частное $7,45 : 3,14$.

5) Сколько гектаров в поле прямоугольной формы, длина которого 214,3 м, ширина 136 м?

6) Вычислить средний размер шага, если на расстоянии в 100 м один раз сделано 128 шагов, в другой раз 134 шага.

7) Ведро содержит приблизительно 12,3 л. Сколько литров воды в 120 ведрах?

8) Вес 17 отливок равен 91,5 кг. Сколько весит каждая отливка?

9) Окружность колеса паровоза 4,5 м. Поезд прошел 35 км за 26 мин. Найти среднее число оборотов колеса в секунду.

Глава XI

ПРОЦЕНТЫ

§ 1. Введение

В настоящее время в свете требований политехнического обучения умение пользоваться процентными расчетами становится одной из важнейших задач в преподавании математики, и методике обучения этому разделу должно быть уделено особое внимание учителей.

Процентные расчеты зародились в старину в связи с отдачей займа капитала, и все авторы задачникков по арифметике дореволюционного периода под процентными расчетами понимали (и давали), за очень редким исключением, задачи коммерческого характера—определить процентные деньги с капитала, отданного в рост, или найти капитал, зная прибыль, принесенную им за определенный промежуток времени, или узнать, за какое время капитал дает определенный прирост. И определение „процента“ давалось в соответствии с вышеуказанным пониманием его: „Под процентом понимается то вознаграждение, которое выдают за пользование денежной суммой, заимообразно взятой на определенный срок“ (Ф е р б е р, Арифметика); „Если кто-нибудь занимает деньги, то он платит за это... эта плата и показывает количество процентов“ (М а л и н и н и Б у р е н и н).

Но мы знаем, что область применения процентов более обширна: и в науке, и в общественной жизни, и в житейской практике постоянно пользуются процентными расчетами.

Интересно отметить, что уже в русском учебнике П. Г у р ь е в а „Практическая арифметика“ говорится в примечании (изд. 1870 г., стр. 302): „Надобно заметить, что слово „процент“ в обширном значении слова прилагается не только к исчислению денег, находящихся в обращении, но и ко всем тем величинам, которые в одинаковые времена могут получать одинаковое приращение (хотя даже приблизительно) или одинаковую убыль: например, к движе-

нию народонаселения, к усушке и утечке вина и соли, к возвышению плодородия почвы и проч.“.

Во многих современных задачниках приводятся задачи из разнообразных областей знания и деятельности людей, требующие процентных расчетов; здесь наряду с коммерческими расчетами мы имеем всевозможные расчеты статистического характера, в частности по всем вопросам нашего социалистического строительства в городе и в деревне и т. д.; физика, техника, химия, метеорология требуют процентных расчетов при решении разнообразных вопросов, каждая в своей области; постоянно имеют место всевозможные расчеты допусков коэффициентов полезного действия, потери энергии, расходов по эксплуатации, амортизации, расчеты процентного состава химических соединений, смесей, сплавов и т. п.

В учебниках дореволюционных изданий правила вычисления прибылей, убытков, сроков и т. д. излагались как особые разделы, состоящие из задач коммерческого характера и решались преимущественно как задачи на „тройное правило“ способом пропорции, исходя из того, что процент есть прибыль или убыток на 100 руб. капитала. В книге Беллюстина „Как люди дошли до современной арифметики“ сказано:

„В XIX в. самое понятие процента расширилось, благодаря введению его в статистику, в разнообразные области человеческой жизни и деятельности, науки и техники.

Теперь уже отброшено старое определение процента, и вместо того говорят, что процент — просто сотая доля числа. Это определение принимается обыкновенно во всех учебниках“.

Но несмотря на иное определение процента, в практике школы до настоящего времени очень часто решение задачи „на проценты“ выполняют при помощи пропорций; это приводит к громоздким и трудным вычислениям (особенно в задачах с наращенной суммой, которая не пропорциональна времени), вызывает затруднения у учащихся при составлении буквенных формул решения задач „на проценты“, а также при составлении уравнений для задач с процентными расчетами в дальнейшем, в курсе алгебры.

В нашей средней школе имеет место и такая практика: учитель, согласно современному учебнику арифметики, учит находить процент от числа и число по известному его проценту, как дробь числа и т. д., а затем, после изучения раздела „Пропорции“, перечитывает учеников — решают эти же задачи „пропорцией“. В этом одна из причин того, что, несмотря на крайне важное практическое значение процентных расчетов, на достаточное число имеющих задач и упражнений, — учащиеся нашей средней школы очень часто не вполне владеют процентными расчетами. Кроме того, задачи на проценты обычно решались в различных разделах курса, но без последующей их систематизации; и в отделе обыкновенных и десятичных дробей, и в разделе „Отношения“, и в вопросах метрической геометрии и, частично, в других. Это понятно. Задачи нахождения процента числа или числа по известному его проценту тесно связаны с нахождением части (дроби) от числа или числа по известной его части (по данной величине его дроби), т. е. с изучением действий над дробными числами и, в частности, при изучении десятичных дробей — с умножением и делением на несколько сотых; вопрос о нахождении процентного отношения, конечно,

уместно рассматривать при изучении вопроса об отношении чисел.

Действующая программа по арифметике упорядочивает вопрос о месте изучения процентов в средней школе. Задачи нахождения процентов числа или числа по известному его проценту тесно связаны с задачами нахождения части (дроби) числа и числа по известной его части (по данной величине его дроби) и рассматриваются с учениками V класса при изучении умножения и деления дробей (как обыкновенных, так и десятичных).

При таком изучении процентов параллельно изучению обыкновенных и десятичных дробей учащиеся постепенно, в течение длительного времени, осваивают процентные вычисления, учатся понимать затрудняющие их вопросы нахождения части числа и др., убеждаются в практическом значении приобретаемых навыков.

Но в дальнейшем необходимо в специально выделенное время повторить и подытожить все рассмотренные случаи процентных расчетов, привести в систему решенные задачи и проделать дополнительно определенное число упражнений и задач практического характера. Это и является целью изучения раздела „Проценты“ в курсе арифметики VI класса.

В „Методике арифметики“ глава „Проценты“ в основном должна служить для повторения и углубления вопроса о процентах в курсе арифметики VI класса, но учителю следует использовать методику изложения отдельных вопросов этой темы при работе в V классе.

§ 2. Предварительные упражнения

Что такое процент.

Мы уже знаем, что некоторые наиболее употребительные доли единицы получили особые названия; одну вторую называют половиной, одну третью долю—третью, одну четвертую—четвертью. Очень часто (например, при учете продуктов и при денежных расчетах) употребляются сотые доли; поэтому они также получили особое название. $\frac{1}{100}$ называется одним про-

центом, $\frac{3}{100} = 3\%$, $0,05 = 5\%$ и т. п. Употребляется особое название и для тысячных долей: $\frac{1}{1000}$ называется промилле.

$$\left(\frac{1}{100} \text{ м} = 1 \text{ см}; \frac{1}{100} \text{ руб.} = 1 \text{ коп.}; \frac{1}{1000} \text{ кг} = 1 \text{ г}; \right. \\ \left. \frac{1}{1000} \text{ т} = 1 \text{ кг и др.} \right)$$

Выбор дробей со знаменателем 100 и 1000 оправдан и требованием выражать результаты измерений и вычислений в одинаковых долях (для удобства сравнения), и наличием десятичной системы счисления и метрической системы мер¹.

Слово „процент“ заимствовано из латинского языка вместо „pro centum“, в средние века, следуя итальянскому „per cento“, говорили „pro cento“. Можно думать, что знак % представляет не что иное, как сокращение „сто“ (вместо „cento“); в письменных документах знак % встречается часто, в печатных—редко, и лишь с XIX века знак % становится символом $\frac{1}{100}$.

Приступая к изучению темы „Проценты“, надо прежде всего создать у учащихся навык выражать десятичную дробь и обыкновенную в процентах, и обратно, записывать проценты в виде дроби. Для этого:

1. Предварительно решают несколько упражнений для записи целого (однозначного и двузначного) числа процентов в виде дроби и для освоения понятия „проценты“:

$$7\% = \frac{7}{100} = 0,07; \quad 23\% = \frac{23}{100} = 0,23; \quad 4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \text{ и т. п.}$$

$$0,01 = 1\%, \text{ и обратно: } 1\% = 0,01; \\ 0,07 = 7\% \quad \quad \quad \text{„} \quad 7\% = 0,07; \\ 0,25 = 25\% \quad \quad \quad \text{„} \quad 25\% = 0,25;$$

¹ См. подробнее А. Я. Х и н ч и н, Основные понятия математики в средней школе, Учпедгиз, 1940.

$$\begin{array}{ll}
0,1 = 0,10 = 10\%, & \text{и обратно: } 10\% = 0,10 = 0,1; \\
0,3 = 0,30 = 30\% & \quad \quad \quad \text{''} \quad 30\% = 0,30 = 0,3; \\
0,016 = 1,6\% & \quad \quad \quad \text{''} \quad 1,6\% = 0,016. \\
0,342 = 34,2\% & \quad \quad \quad \text{''} \quad 34,2\% = 0,342.
\end{array}$$

Затем переходят к выражению целого числа в процентах. Целое число, равное $1 = \frac{100}{100}$, соответствует 100%; после этого учащиеся легко уясняют себе, что число $2 = \frac{200}{100}$ соответствует 200%; 3,7 соответствует 370%; 2,56 соответствует 256%.

Раньше было уже сказано, что часто понимание учащимися существа задачи и решения ее зависит от того, как прочитана задача, как оттенена фраза, сказанная учителем. В самом начале работы по процентам и во всей дальнейшей работе учитель должен разнообразить свой язык, должен обращать внимание на чтение учащимися приведенных выше записей: 0,6 составляют 60 сотых, или 60%, равны 60%, дают 60% и т. д.

2. Решая достаточное число упражнений для выражения целого числа и десятичной дроби в процентах, подбираем их последовательно так, чтобы раньше получилось целое однозначное число процента, потом двузначное число, затем десятые доли процента, смешанное число процента и т. д. Полезно постепенно выписывать характерные случаи в виде таблички, тогда легче будет провести более трудный процесс обратного исследования—выражения процента в виде десятичной дроби.

Для того чтобы учащимся было яснее, что $0,5625 = 56,25\%$, или что $0,3942 = 39,42\%$, или $0,0586 = 5,86\%$ (и обратно), мы приучаем учащегося сначала прочитывать число сотых долей числа (в данном случае 56; 39; 5), после этого сразу давать окончательный верный ответ, т. е. правильно отделять запятой целое число процентов от десятых и сотых долей его. Иногда приучают учащихся механически переносить запятую на две цифры вправо, т. е. умножать на 100 при записи десятичной дроби в процентах, при обратном процессе переносят запятую влево на 2 цифры, т. е. выполняют деление на 100.

Эти правила можно дать лишь после тщательного выяснения вопроса.

3. Выражение обыкновенной дроби в процентах имеет большое значение при вычислении процентного отношения чисел. Для создания необходимого навыка решают достаточное число упражнений, сначала в том случае, когда обыкновенная дробь выражается конечной десятичной дробью, а затем в других случаях.

Решаются эти задачи путем перевода обыкновенной дроби в десятичную, для того чтобы по числу сотых долей судить о числе процентов:

$$\frac{3}{5} = 0,6 = 0,60 = 60\%; \quad \frac{3}{8} = 3 : 8 = 0,375 = 37,5\%;$$

$$\frac{9}{16} = 9 : 16 = 0,5625 = 56,25\%;$$

$\frac{4}{9} = 4 : 9 = 0,44... \approx 44\%$ (с точностью до одного процента) и т. д. На этих упражнениях ученики снова повторяют деление с определенной точностью.

4. И наконец, последняя задача—выражение процента в виде обыкновенной дроби на практике—имеет место лишь в простейших случаях:

$$23\% = \frac{23}{100}; \quad 4\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \text{ и т. п.}$$

Но, заканчивая ознакомление с математическим понятием процента, можно решать более трудные упражнения: выразить в обыкновенных дробях $3\frac{1}{2}\%$; $4,2\%$; $4\frac{2}{3}\%$ и т. д.

$$3\frac{1}{2}\% = \frac{3\frac{1}{2}}{100} = \frac{7}{200} \text{ или сразу.}$$

$$4,2\% = \frac{4,2}{100} = \frac{42}{1000} = \frac{21}{500}; \quad 4\frac{2}{3}\% = \frac{14}{300} = \frac{7}{150} \text{ и т. д.}$$

Устные упражнения. 1. Выразить в процентах 0,01; 10,07; 0,7; 0,1; 0,9; 1,15; 1,2; 3,4; 0,142; 0,056; 2,14 и т. п.

2. Выразить обыкновенной, а затем десятичной дробью 7%, 17%, 5%, 25%, 10%, 20%, 50% и т. д.

3. Выразить в процентах $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{3}$ и т. п.

Формулировку вопросов, обращенных к учащимся, как всегда, надо разнообразить: „выразить в процентах“, „сколько процентов составляет?“, „скольким процентам равно?“, „выразить дробью“, „какой дроби равняется?“, „какую часть единицы или числа составляет?“ и т. п.

4. Результаты некоторых устных упражнений следует записывать для того, чтобы запомнить (составить таблицу), например:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} = 50\% & \frac{1}{10} = 10\% \\ \frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}\% & \frac{1}{20} = 5\% \\ \frac{1}{4} = 25\% & \frac{1}{25} = 4\% \\ \frac{1}{5} = 20\% & \frac{1}{50} = 2\% \end{array}$$

Затем учащиеся легко перейдут к более сложным устным упражнениям.

$$\frac{3}{5} \text{— это } 20\% \cdot 3 = 60\%; \quad \frac{3}{4} = 75\%; \quad \frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%;$$

$$\frac{3}{20} \text{— это } 5\% \cdot 3 = 15\%; \quad \frac{4}{25} \text{— это } 4\% \cdot 4 = 16\% \text{ и т. п.}$$

Повторение. В качестве предварительной работы надо также повторить решение задач—нахождение дроби (части) заданного числа, нахождение числа по данной величине его дроби (части) и нахождение отношения двух чисел.

Полезно не только решить несколько примеров и задач, но и вспомнить с учащимися процесс, как от решения указанных вопросов в два действия они перешли к решению тех же задач одним действием—умножением (делением). Это повторение поможет закреплению трудного для учащихся вопроса о сущности умножения и деления на правильную дробь.

После рассмотрения перечисленных вопросов задается на дом решение аналогичных примеров; желательно давать их в систематическом порядке, как

было указано выше, и дополнительно дать 3—4 любых примера.

Переходя к рассмотрению возможных случаев решения задач на проценты, учитель может предложить учащимся выполнить и привести примерные задачи на проценты, решавшиеся ими раньше в курсе V класса. В большинстве случаев учащиеся охотно откликаются на такое предложение и даже сами придумывают соответствующие задачи. В нашей практике были случаи, когда учащиеся к следующему занятию на отдельных листочках давали большое число разнообразных задач на процентные расчеты, которые по приводимому сюжету могли служить хорошим материалом для школы, выявляющим интересы учащихся данного возраста, данного класса. Имелись задачи, по содержанию отражавшие общественную жизнь школы, пионерскую работу, разнообразные стороны нашего социалистического строительства, жизнь колхоза, производства; были задачи по вопросу организации хозяйства семьи учащегося; санитарного, библиотечного дела и т. п.; были задачи и фантастического характера, показывающие увлечение данного учащегося приключенческими рассказами; с другой стороны, наряду с задачами, действительно сознательно и самостоятельно подобранными, давались задачи—копии заученных ранее. Дело учителя использовать тот материал, который дают учащимся: 1) при систематизации трех основных задач на проценты, которые будут рассматриваться; 2) в процессе изучения курса процентных расчетов, когда предложение учащемуся решить им самим составленную задачу усиливает интерес к делу; 3) для накопления материала по самостоятельному составлению задач учащимися, отнюдь не злоупотребляя этим в смысле количества. Надо заметить, что среди самостоятельно составленных задач иногда предлагаются задачи ни в какой мере не соответствующие действительности; на отрицательную сторону этих задач надо обратить внимание учащихся. Так, например, ученик составил задачу, характеризующую вес отдельных частей самолета, и оказалось, что мотор его весит меньше, чем пропеллер, и т. д. Учитель не должен по возможности

отказываться от решения подобных задач, если только возможно выправить задачу и привести ее в соответствие с действительностью.

§ 3. Нахождение процентов данного числа

Проведя подготовительную работу к уроку, вспомнив с учащимися несколько решенных ими задач, учитель обращает внимание учащихся на то, что хотя все эти задачи — „на проценты“, но не во всех задачах одна и та же постановка вопроса, что не все задачи для своего решения требуют одинаковых действий. Учитель ограничивается решением первой задачи на проценты, а именно задачи, в которой надо найти процент числа. Из курса V класса учащиеся в большинстве случаев прочнее всего запоминают решение этой задачи двумя действиями: способом приведения к единице.

Устные упражнения. 1) Найти 5% от 1300; 7% от 1400; $8\frac{1}{2}$ % от 1400 и т. п. Такие упражнения решались с учащимися в V классе с самого начала учебного года в процессе повторения действий с целыми числами. Не следует (а это наблюдается на практике) при устном счете повторять процесс письменного вычисления, а именно: мысленно умножать $1300 \cdot 0,05$.

2) Устные упражнения в общем случае, например: вычислить 2%, 10%, 15%, 9%, 40%, 60% и т. д. от 1250 и т. д. Все приемы устного счета, известные учащимся, они должны применять при вычислении, например:

$$10\% \text{ от } 1250 \text{ составляют } 12,5 \cdot 10 = 125;$$

$$15\% \text{ от } 1250 \quad „ \quad 125 + 62\frac{1}{2} = 187\frac{1}{2};$$

$$9\% \text{ от } 1250 \quad „ \quad 125 - 12,5 = 112,5;$$

$$40\% \text{ от } 1250 \quad „ \quad 125 \cdot 4 = 500 \text{ или}$$

$$40\% = \frac{2}{5} \text{ и } \frac{2}{5} \text{ от } 1250 \text{ составляют } 250 \cdot 2 = 500$$

(нецелесообразно брать значение 1% и затем $12,5 \cdot 40$ или $1250 \cdot 0,4$ в уме).

Письменные
упражнения.

Запись при помощи обыкновенных дробей: 1) Найти 3% от 275 руб. (двумя действиями).

1% от 275 руб. составляет $\frac{275}{100}$ руб.

3% " " " $\frac{275}{100} \cdot 3$ или $\frac{275 \cdot 3}{100} = \frac{33}{4} =$
 $= 8\frac{1}{4}$; 8 руб. 25 коп.

2) Найти 3% от 275 руб. (одним действием).

$3\% = \frac{3}{100}$; $\frac{3}{100}$ от 275 руб. составляют $275 \cdot \frac{3}{100} = 8\frac{1}{4}$.

Запись при помощи десятичных дробей.

3) Найти 3% от 275 руб. (двумя действиями).

1% от 275 руб. составляет 2,75 руб.

3% от 275 руб. составляют $2,75 \cdot 3 = 8,25$; 8 руб. 25 коп.

4) Найти 3% от 275 руб. (одним действием).

$$3\% = 0,03;$$

3% от 275, или 0,03 от 275 составляют $275 \cdot 0,03 = 8,25$.

В общем виде:

Найти $p\%$ числа a ; $p\% = \frac{p}{100}$.

Найти $\frac{p}{100}$ числа a — значит число a умножить на $\frac{p}{100}$:

$$a \cdot \frac{p}{100} = \frac{ap}{100}.$$

1. В средней школе решение рассматриваемой задачи на проценты, а именно нахождение процентов данного числа, следует выполнять одним действием в обыкновенных или десятичных дробях (приемы 2) и 4); надо разнообразить чтение записываемых выражений: „3% от 275 составляют (дают, равны) 0,03 от 275“ и т. п. После решения ряда задач и примеров делается вывод решения, назовем условно, первой задачи на проценты.

Опыт показывает, что для менее подготовленных учащихся (более слабых по успеваемости) затруднительно сознательное решение данной задачи сразу одним действием—умножением на дробь, поэтому можно для отдельных учащихся допускать некоторое время решение в виде, показанном выше под номером 1 и 3, т. е. двумя действиями.

2. Надо приучить учащихся при вычислении процентов округлением чисел оценивать полученный результат в тех случаях, когда приходится находить, например, 22%, 51%, 32% числа и т. п. Надо убедиться, что полученный ответ приблизительно составляет $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ числа и т. д.

Особо надо обратить внимание на случай нахождения процента числа, когда процент выражен дробью, например, 0,04% числа. Учащийся должен решать и эту задачу, как обычно, по выведенному правилу, независимо от числовых данных умножением на 0,0004, и если вообще постоянно следует приучать учащихся оценивать допустимость полученного ими ответа для вопроса задачи, то в данном случае это особо важно; учащийся, получив ответ на вопрос задачи, должен оценить его и убедиться, что полученный им ответ меньше 1% или, лучше, меньше 0,1%. Например, вычислили 0,04% от 375 руб.; получили 0,15 руб. = 15 коп.; 15 коп. составляют меньше 1% от 375 руб. (меньше 3 руб. 75 коп.); 15 коп. меньше и 0,1% от 375 руб., составляющей 37,5 коп.

3. Рассмотрев с учащимися типичные задачи, переходят к решению различных арифметических задач, включающих вычисления процента числа: а) особо рассматривают решение задач, требующих нахождения числа, которое на несколько процентов больше или меньше данного; при этом следует показать, что задачи эти могут быть решены двумя путями. Например, дается задача: „Книга стоила 3 руб.; цена ее была снижена на 15%. Сколько стоила книга после указанного снижения ее цены?“

Решение I. $15\% = 0,15$; $3 \cdot 0,15 = 0,45$ (руб.);

$$3 - 0,45 = 2,55 \text{ (руб.)}$$

Решение II. $15\% = 0,15$; $1 - 0,15 = 0,85$; $3 \cdot 0,85 = 2,55$ (руб.).

Ответ. 2 руб. 55 коп.

б) При решении задач, требующих вычисления состава (смеси, сплава, состава служащих, рабочих, учащихся по полу, возрасту и т. п.), обязательно требовать проверки правильности решения задачи (по сумме составляющих).

в) Целесообразно среди решаемых задач рассмотреть задачи „на денежные расчеты“ в том случае, когда неизвестным являются или процентные деньги (доход), или время. Нет основания выделять эти задачи в особый отдел.

Задача 1. Сберкасса выплачивает по денежным вкладам 2% годовых. Какая сумма будет выдана вкладчику через 9 месяцев ($\frac{3}{4}$ года), если он вложил в сберкассу 450 руб.?

Решение. Обозначим неизвестный доход вкладчика буквой x :

$$x = \frac{450 \cdot 2}{100} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4} \text{ (руб.)}; 450 + 6\frac{3}{4} = 456\frac{3}{4} \text{ (руб.)}$$

Вкладчику будет выдана сумма в 456 руб. 75 коп.

Задача 2. За какое время 450 руб., положенные в сберкассу, выплачивающую 2% годовых, обратятся в 456 руб. 75 коп.? Доход вкладчика $456,75 - 450 = 6,75$ (руб.); годовой доход $450 \cdot 0,02 = 9$ (руб.); надо узнать, какую часть составляет доход, полученный вкладчиком, от годового дохода: $\frac{6,75}{9} = 0,75$, т. е.

доход получен вкладчиком за $0,75$ года $= \frac{3}{4}$ года $=$

$= 9$ месяцев. Ясно, что 2-я задача является одной из задач, обратных 1-й задаче, и может быть самостоятельно составлена учащимися.

4. Следует ли давать в буквенном виде обобщенные решения задач на проценты (как это выше показано нами для первой задачи на проценты)? Учащимся V класса мы считаем преждевременным давать буквенные формулы решения всех задач на проценты (решение остальных задач будет приведено ниже), но в сильных классах, если позволит время, может быть дана одна формула расчета процента числа

$\frac{a \cdot p}{100}$ и ее словесная формулировка как обобщенный вывод всех рассмотренных задач с числовыми данными. Но обязательно, давая вывод решения задач на буквах, проверить подстановкой правильность ответа при решении числовых задач.

Что касается учащихся VI класса, то эти формулы могут быть им даны, так как буквенные формулы решения задач постепенно вводятся в курс алгебры VI класса.

Пусть надо найти 4% от 568.

Запись. $p = 4\%$; $a = 568$.

Неизвестное число можно обозначить буквой x .

$$x = \frac{a \cdot p}{100} = \frac{568 \cdot 4}{100} = \frac{2272}{100} = 22,72.$$

Приведем пример записи в том случае, когда данные числа выражены и обыкновенными, и десятичными дробями. Дано:

$$p = 30\frac{1}{2}\%; \quad a = 40,2;$$

$$x = \frac{a \cdot p}{100} = \frac{40,2 \cdot 30\frac{1}{2}}{100} = \frac{402 \cdot 61}{1000 \cdot 2} = \frac{12261}{1000}.$$

О т в е т. $12,261 \approx 12,3^1$.

Целесообразно решить несколько простейших задач на вычисление по сложным процентам: сначала непосредственно узнать прирост суммы за первый год, а затем вычислить прирост за второй год с уже наращенной суммы.

§ 4. Нахождение числа по данному числу его процентов

Следующей задачей на проценты обычно рассматривают задачу нахождения всего числа по извест-

¹ Процентные расчеты (в особенности вторая и третья из рассматриваемых ниже задач) по существу сводятся к составлению уравнения (вводится x), поэтому задачи на проценты обязательно должны решаться в курсе алгебры при составлении уравнений I и II степени.

ному числу его процентов (и в случаях, когда известно больше 100% и меньше 100% числа)¹.

Здесь могут быть 3 случая: 1) когда в условии задачи известно число процентов от числа, 2) и 3) когда известно число, которое получится, если к данному числу прибавить или отнять известное число его процентов. Каждая из этих задач должна быть рассмотрена отдельно, и должно быть четко выявлено решение каждой из них.

Устные упражнения. 1) Известно, что 5% числа составляют 80 единиц. Найти это число. Учащийся может применить способ приведения к единице и решить задачу в 2 действия: $80 : 5 = 16$; 16 единиц составляют 1% искомого числа, значит, искомое число.

$5\% = \frac{1}{20}$; $\frac{1}{20}$ часть неизвестного числа составляет 80 единиц, значит, все число 1600.

2) Найти число, если 4,5% его составляют 9 или 14% его составляет 7. Для устного решения предпочтительнее решить задачу нахождения 1%, а затем всего числа.

3) Узнать число, если $\frac{1}{3}\%$ его равны 7. В этом случае как для устного, так и для письменного решения применяется один прием:

$\frac{1}{3}\% = \frac{1}{300}$; $\frac{1}{300}$ часть искомого числа составляет 7; все число 2100.

4) Полезно решить устно, а затем и письменно, упражнения, в которых встречаются обе рассмотренные задачи на проценты; например, найти число, если известно, что 40% его составляют $4\frac{1}{2}\%$ от 200, и т. п. Ответ. $22\frac{1}{2}$.

Проверка. $40\% = \frac{2}{5}$; $\frac{2}{5}$ от $22\frac{1}{2}$ составляют 9; $4\frac{1}{2}\%$ от 200 — тоже составляют 9.

¹ Иногда второй рассматривают задачу нахождения процентного отношения чисел, как имеющую большое практическое применение, тогда задачу нахождения числа по проценту рассматривают третьей, как наиболее затрудняющую учащихся.

**Письменные
упражнения.**

1) Приведем возможные записи решения задачи в случае, когда требуется найти число, зная некоторый его процент.

Задача. Надо узнать, сколько книг в шкафу, если 35% их составляют 28 книг.

При помощи обыкновенных дробей:

а) Двумя действиями:

$$\begin{aligned}\frac{35}{100} x &= 28, \\ \frac{1}{100} x &= \frac{28}{35}; \\ x &= \frac{28}{35} \cdot 100 = \frac{28 \cdot 100}{35} = 80 \text{ (книг)}.\end{aligned}$$

б) Одним действием:

$$\begin{aligned}\frac{35}{100} x &= 28; \quad \frac{7}{20} x = 28; \\ x &= 28 : \frac{7}{20} = \frac{28 \cdot 20}{7} = 80.\end{aligned}$$

Проверка. 35% от 80 составляют

$$80 \cdot \frac{35}{100} = \frac{80 \cdot 7}{20} = 28.$$

При помощи десятичных дробей:

$$\begin{aligned}\text{в) } 0,35 x &= 28; \\ x &= 28 : 0,35; \\ x &= 2800 : 35 = 80.\end{aligned}$$

На практике чаще применяется прием в) решения рассматриваемой задачи—при помощи десятичных дробей; надо заметить, что в данном случае несложно и рассуждения, и запись решения задачи при помощи обыкновенных дробей, и их следует проводить с учащимися; такая работа послужит базой для решения впоследствии соответствующих задач в общем виде (на буквах).

Как всегда, решая эти задачи, учитель должен разнообразить постановку вопроса: „Найти число, зная, что 7,2% его составляют 144“ (наиболее простая формулировка вопроса); „От какого числа 7,2% составляют 144?“ и т. д.

Решение в общем виде: известно, что k составляет $p\%$ неизвестного числа. Найти неизвестное число x или a .

Прием решения при помощи нахождения числа по величине его дроби:

а) двумя действиями; б) одним действием—делением:

$$\begin{aligned} \frac{p}{100} x &= k; \\ \frac{1}{100} x &= \frac{k}{p}; \\ x &= \frac{k \cdot 100}{p}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{100} x &= k; \\ x &= k : \frac{p}{100}; \\ x &= \frac{k \cdot 100}{p}. \end{aligned}$$

Иногда на практике решение второй задачи на проценты проводится способом приведения к единице¹, но этот прием нередко препятствует учащимся довести решение задачи до конца из-за кажущейся нереальности промежуточного ответа. Например, по условию задачи известно, что 0,4% числа составляют 0,26. Надо найти число. Учащийся рассуждает так: узнаем, чему равен 1% числа. Надо $0,26 : 0,4$; в условии дана доля процента, учащийся получит в результате правильный ответ—число, большее данного числа, но, не сознавая того, что результат дает верный ответ, больший чем 0,25, он начинает пытаться перемножить данные числа и т. д. и не доводит решения задачи до конца.

Общий прием не вызывает у учащихся особых затруднений:

$$\begin{aligned} 0,4\% &= 0,004; & x &= 0,26 : 0,004; \\ 0,004 x &= 0,26; & x &= 260 : 4 = 65. \end{aligned}$$

2) Переходя ко 2-му и 3-му случаю задач, указанных нами выше, а именно, когда известно число, которое получится, если к данному числу прибавить (или отнять) известный его процент, следует сказать, что нечеткость в рассмотрении этого вопроса, недооценка этих задач, имеющих большое практическое применение, являются причинами неумения учащихся решать их.

Пусть надо решить задачу 1: „Сколько килограммов муки следует выдать, чтобы получить 76 кг хлеба, если припек составляет 45%?“

Решение. $100\% + 45\% = 145\% = 1,45$; $1,45x = 76$, откуда $x = 76 : 1,45$.

¹ Способ приведения к единице дан в учебнике Киселева „Арифметика“, стр. 102.

Ответ. $\approx 52\frac{1}{2}$ кг.

(Позже учащиеся будут решать эту задачу уравнением: $x + 0,45x = 76$; $1,45x = 76$.)

Задача 2. За книгу заплатили 1 руб. 70 коп. при скидке в 15%. Какова действительная цена книги?

Решение, $100\% - 15\% = 85\% = 0,85$;
 $0,85x = 1,7$;
 $x = 1,7 : 0,85 = 2$ (руб.)

В рассмотренных задачах 1 и 2 мы предпочитаем запись:

$$1 + 0,45 = 1,45 \text{ и } 1 - 0,15 = 0,85$$

записи: $100\% + 45\% = 145\%$ и $100\% - 15\% = 85\%$, так как, привыкнув к последним записям при сложении и вычитании процентов, учащиеся допускают и следующие записи. Пусть надо найти 40% от 68%. Учащиеся пишут: $40\% \cdot 68\% = \frac{40 \cdot 68}{100 \cdot 100} = \frac{34}{125}\%$, они пы-

таются даже писать $\frac{34}{125}\% \%$ в то время, как решение этой задачи в обыкновенных или десятичных дробях не вызывает никаких затруднений: $40\% = 0,4$; $68\% = 0,68$. Надо найти 0,4 от 0,68; $0,68 \cdot 0,4 = 0,272 = 27,2\%$.

3. Выбор задач крайне велик и разнообразен. Здесь же целесообразно решать задачи на „денежные расчеты“ в случае, когда неизвестна сумма, приносящая доход. Например, задача: „Вкладчик положил в сберегательную кассу некоторую сумму денег; известно, что сберегательная касса выплачивает 2% в год от положенной суммы. Всего за $\frac{1}{2}$ года он получил 3 руб. 20 коп. дохода. Какую сумму положил вкладчик в сберегательную кассу?“

Объяснения. 1) За один год вкладчик получил бы 0,02 положенной им суммы.

2) За $\frac{1}{2}$ года он получил $0,02 \cdot \frac{1}{2} = 0,01$ положенной суммы (x), что составило 3 руб. 20 коп.

3) $0,01x = 3,2$; $x = 3,2 : 0,01 = 320$ (руб.).

Проверка. Действительно, за $\frac{1}{2}$ года с 320 руб. вкладчик получил доход $\frac{320 \cdot 0,02}{2} = 3,2$ (руб.).

Эта проверка решения задачи на проценты особенно полезна потому, что она помогает учащимся видеть задачи на процентные вычисления в их взаимосвязи.

Выше решенную задачу можно дать в другой формулировке так, чтобы требовалось найти число, зная, сколько получится, если к известному числу прибавить некоторый его процент. А именно: „Сколько денег положил вкладчик в сберегательную кассу (по 2%), если его доход за $\frac{1}{2}$ года вместе с вкладом составили 323 руб. 20 коп.?“

Решение. 1) $2\% = 0,02$; $0,02 \cdot \frac{1}{2} = 0,01$ (часть вклада составил доход за $\frac{1}{2}$ года);

2) $1 + 0,01 = 1,01$;

3) $1,01x = 323,2$; вклад $x = 323,2 : 1,01 = 320$ (руб.).

§ 5. Нахождение процентного отношения двух чисел

Устные упражнения. Приступая к решению третьей простой задачи на проценты, а именно: к нахождению процентного отношения чисел, учитель прежде всего напоминает учащимся, как они находили отношение двух чисел. Для примера можно решить несколько простых задач. Затем дается задача на нахождение процентного отношения двух чисел или из задачника, или из тех, которые были предложены самими учащимися. Задача выбирается с простыми числовыми данными. Например, если в задаче требуется найти процентное отношение 45 к 180, то учащийся должен устно рассчитать, что 45 — это $\frac{1}{4}$ от 180, значит, 45 составляет 25% от 180. Числовые данные задач подбираются в последовательном нарастании трудностей. Здесь так же, как было уже указано выше, следует

разнообразить формулировки. Надо говорить: „Какую часть составляет одно число от другого?“, „Как относится одно число к другому?“, „Какой процент составляет одно число по отношению к другому?“, „Отношение этих чисел равно, составляет, дает“ и т. п.

Дается достаточное число упражнений для выполнения устно с последующей записью, например:

$$\frac{45}{180} = \frac{1}{4} = 25\%; \quad \frac{4}{100} = 0,04 = 4\%; \quad \frac{34}{68} = 0,5 = 0,50 = 50\% \text{ и т. п.}$$

Полезно брать задачи с такими числовыми данными, чтобы надо было найти процентное отношение большего числа к меньшему, например 390 и 130:

$$\frac{390}{130} = 3 = 3,00 = 300\%.$$

Письменные упражнения. Затем даются задачи с числовыми данными для письменного решения; например, в задаче требуется узнать, сколько процентов составляет 85 от 143 или 76 по отношению к 29.

Запись.
$$\begin{array}{r} 85 \overline{) 143} \\ 850 \quad 0,594 \\ \underline{715} \\ 1350 \\ \underline{1287} \\ 630 \\ \underline{572} \\ 58 \end{array}$$

$\frac{85}{143} \approx 0,594 = 59,4\%$ (с точностью до 0,1%)

$$\begin{array}{r} 76 \overline{) 29} \\ 58 \quad 2,62 \\ \underline{180} \\ 60 \end{array}$$

$\frac{76}{29} \approx 2,62 = 262\%$ (с точностью до 1%).

Иногда, получив ответ 0,59 в первом примере или 2,62 во втором, говорят: „Увеличим ответ в 100 раз и получим число процентов“. Не следует допускать подобного выражения: учащийся должен понимать, что если у него получилось какое-либо число, то

он не имеет права брать вместо него число, в 100 раз большее. Следует учить учащегося читать: „Получилось 59 сотых (или 262 сотых); это составляет 59% (или 262%)“ и т. п.

Решая задачу на проценты, полезно в порядке проверки правильности решения составлять с учащимися две обратные задачи.

Например, надо найти $7\frac{1}{2}\%$ от 20,4.

Решение. $7\frac{1}{2}\% = \frac{15}{200} = \frac{3}{40}$; $20,4 \cdot \frac{3}{40} = \frac{204 \cdot 3}{400} = 1,53$.

1-я обратная задача: От какого числа 1,53 составляют $7\frac{1}{2}\%$?

Решение. $1,53 : \frac{3}{40} = \frac{153 \cdot 40}{300} = 20,4$ и 2-я обратная задача:

Сколько процентов от 20,4 составляет число 1,53?

Решение. $\frac{1,53}{20,4} = 1,53 : 20,4 = 15,3 : 204 = 0,075 = 7,5\%$ ¹.

Замечание. В результате занятия учащиеся усваивают, что найти процентное отношение двух чисел—это значит найти их отношение и выразить результат в сотых долях или в процентах. Учитель показывает учащимся на примерах, как широко используется процентное сравнение чисел (характеристика в процентах) ежедневно на страницах нашей печати, в школьной жизни и т. п. Сначала решаются типичные задачи, затем задачи более сложные в 2, 3, 4 действия. Здесь же решают задачу на „денежные расчеты“ в том случае, когда отыскивается процент, который приносит известная сумма денег.

Например: „Для строительства получили в банке ссуду в 14800 руб. и через 10 месяцев возвратили 14985 руб. Сколько годовых процентов платили за ссуду?“

Решение. 1) $14985 - 14800 = 185$; 185 руб. заплатили за всю взятую ссуду.

2) $185 : 10 = 18,5$; 18,5 руб. платили в 1 месяц.

3) $18,5 \cdot 12 = 222$; 222 руб. должны были платить за всю взятую ссуду в год.

$$4) \frac{222}{14800} = \frac{111}{7400} = \frac{111}{11100} \quad | \quad \frac{7400}{0,015}$$

$$\begin{array}{r} \frac{111}{11100} \\ \underline{\quad 7400} \\ \quad 37000 \\ \quad \quad 0 \end{array}$$

$0,015 = 1,5\%$ от взятой ссуды платили в год.

В учебнике арифметики, принятом в настоящее время в школе (А. П. Киселев, § 15), задача нахождения процентного отношения двух чисел решается двумя приемами.

¹ Проверку решения задачи на проценты полезно выполнять еще и потому, что при этом учащиеся видят 3 простые задачи на проценты в их взаимной связи.

Первый прием—это прием приведения к единице (к 1%), который в отдельных случаях может быть применим в процессе устных вычислений; всегда же пользоваться им при вычислении процентного отношения двух чисел затруднительно. В самом деле: пусть надо найти процентное отношение 85 к 143 (выше решенная задача).

Решение. 1% от 143 составляет 1,43, значит, 85 составит столько процентов от 143, сколько раз 1,43 содержится в 85, т. е.

$$85 : 1,43 = \frac{85 \cdot 100}{143} = 59,4\%.$$

В то же время надо отметить, что этот прием полезен тем, что позволяет убедительно для учащихся вывести общераспространенное правило нахождения процентного отношения двух чисел умножением их отношения на 100.

Но, как известно, учащийся, забывая вышеприведенное обоснование, механически умножает полученное отношение на 100. Поэтому мы и рекомендуем второй прием решения этой задачи, и именно в той записи, которая нами приведена выше.

3. Особую трудность представляет для учащихся задача, в которой спрашивается, на сколько процентов увеличилось или уменьшилось число. Например: „В мастерской при изготовлении болтов дана норма—130 болтов за данный срок; изготовили 140 штук за то же время. На сколько процентов перевыполнено задание?“ У учащихся имеется привычка, для того чтобы узнать, как одно число относится к другому, делить „меньшее число на большее“. На это надо обратить самое серьезное внимание, учащийся должен понять, что надо делить число, по отношению к которому находится отношение.

Возвратимся к нашей задаче. Учащийся может решить ее двумя путями:

$$1) \frac{140}{130} \approx 1,077 = 107,7\% \text{ (с точностью до } 0,1\%)$$

$$\begin{array}{r} 14 \overline{) 13} \\ \underline{10} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 0 \end{array} \quad 1,077 \approx 107,7\%$$

Дается ответ на вопрос задачи: 107,7% составляет выработка болтов по отношению к норме; перевыполнение плана на 7,7% (план равен 1, т. е. 100%).

2) Учащийся может сначала узнать, на сколько предметов перевыполнен план (на 10 болтов), а затем—сколько процентов составляет это перевыполнение плана по отношению к норме:

$$\frac{10}{130} = \frac{1}{13} \approx 0,077 = 7,7\%.$$

Ответ получается сразу: на 7,7% перевыполнена норма.

При последнем действии учащиеся также часто затрудняются, не зная, как они говорят, „на что делить“.

Повторяем, что для того, чтобы избежать подобного ответа или ошибки, учитель должен с самого начала работы давать четкие формулировки: в данном случае надо делить на 130 (а не на 140), потому что по отношению к норме (норма—130 болтов) мы отыскиваем прирост (в других задачах—убыль).

Оба приведенных приема решения задачи полезно знать учащимся.

4. Как выше было сказано, при решении задач учащийся должен контролировать возможность, реальность полученного ответа; например, получен ответ, превышающий 100%,—возможно ли это по смыслу задачи? Получен ответ меньше 50% (половины), 25% (четверти),—надо прикинуть, возможен ли подобный ответ для чисел данной задачи. Особенно настаивать надо на самоконтроле при решении задач такого рода, когда надо узнать процентный состав целого. Например, дана задача: „На фабрике работают 1500 человек, из них 60% рабочих, 35% рабочих, остальные ученики. Сколько рабочих, рабочих и учеников в отдельности работает на фабрике?“

Запись:	рабочниц	60%	900	человек
	рабочих	35%	525	”
	учеников	5%	75	”
		100%	1500	человек

Учащиеся иногда вычитанием $1500 - (900 + 525)$ находят последний ответ—число учеников. Тогда для проверки правильности решения задачи надо убе-

даться, что полученный ответ 75 (учеников) составляет 5% от 1500.

Приведем общий вид решения задачи нахождения процентного отношения двух чисел. Известны числа κ и a . Надо узнать, сколько процентов составляет число κ по отношению к числу a ($p\%$ или $x\%$).

1. Только что разобранный способ: 1% числа a составляет $\frac{a}{100}$; сколько раз эта дробь содержится в κ , сколько процентов составляет число κ по отношению к a , а именно: $\kappa : \frac{a}{100} = \frac{\kappa \cdot 100}{a} \%$.

2. Ранее указанный прием: отношение (кратное) числа κ к числу a есть $\frac{\kappa}{a}$. Надо выразить полученный результат в сотых долях, затем в процентах. Когда мы при решении задачи имеем дело с числами, мы пользуемся десятичными дробями и сразу видим ответ.

Для того чтобы дробь $\frac{\kappa}{a}$ (на буквах) выразить в сотых, надо умножить знаменатель на 100, значит, и числитель надо умножить на 100, получим: $\frac{\kappa \cdot 100}{a \cdot 100} = \frac{\kappa \cdot 100}{a}$ сотых долей $= \frac{\kappa \cdot 100}{a} \%$. Формула та же: $x = \frac{\kappa \cdot 100}{a} \%$. Здесь необходимо объяснение того, что при решении задач умножают на 100 для получения числа процентов; например, надо найти процентное отношение 4 к 9. Говорят следующим образом: „Делим 4 на 9 и умножаем на 100: $\frac{4 \cdot 100}{9} \%$. Объяснение трудно для учащихся, и они, пользуясь механически выведенным правилом, часто ошибаются, не зная, какое число на какое надо делить, и, главное, никогда не знают— „почему“, в особенности— „почему“ результат умножается на 100. Мы рекомендуем давать первый вывод правила и не рекомендуем показывать в V классе решения задачи на буквах. В VI классе это может быть сделано в первой теме курса алгебры.

Вывод. Таким образом, задачи, содержащие процентные расчеты, можно решать различными приемами. Считая устаревшим, излишне усложняющим работу и совершенно ненужным решение этих задач способом пропорций, мы рассматриваем решение всех задач с процентными расчетами как решение соответствующих задач на дроби: 1) нахождение дроби данного числа, 2) нахождение числа по известной величине его дроби и 3) нахождение отношения двух чисел.

В отдельных случаях, в частности при устных упрощенных вычислениях, целесообразно применять способ приведения к единице.

Проводя с учащимися беседу, подытоживающую всю проделанную работу, следует указать им, что в типичных задачах на проценты они всегда по двум данным отыскивают третье, неизвестное, что все 3 величины (данные и искомая) — a , $p\%$ и x — связаны между собою зависимостью. Но так как в данном случае мы имеем зависимость между тремя величинами, то останавливаться на ее исследовании с учащимися младших классов затруднительно и не следует.

Как выше сказано, промилле есть дробь со знаменателем 1000 т. е. $\frac{1}{1000}$ или 0,001, что обозна-

чается 1‰; 1‰ в 10 раз меньше 1%.

В настоящее время в промилле выражают многие числовые данные в различных статистических сводках. Учащимся можно указать пример использования промилле при вычислении состава сплава; например, проба золота (или серебра) выражается в промилле. Пусть проба золотой вещи 560‰, т. е. 0,560, или 560 тысячных. Это значит, что в одном килограмме сплава — металла (1000 г), из которого изготовлена данная вещь, содержится 560 г чистого золота. Углублять с учащимися вопрос о промилле нет надобности. Но они должны усвоить все вышесказанное и уметь преобразовать десятичные дроби в промилле, и обратно, например:

$$\begin{array}{lll} 0,365 = 365\text{‰} & 1 = 1000\text{‰} & 342\text{‰} = 0,342 \\ 0,24 = 240\text{‰} & 2,1 = 2100\text{‰} & 25\text{‰} = 0,025 \text{ и т. д.} \end{array}$$

§ 6. Примерная контрольная работа

- 1) Найти $20\frac{1}{2}\%$ от 820.
- 2) От какого числа 15,6 составляет 30%?
- 3) Сколько процентов составляет число 27,1 от числа 81,3?

4) Задача. Три пионерских звена собрали целебные травы, но не знали их веса. Сколько килограммов трав собрали пионеры, если после того, как взвесили траву, им сказали: 1-е звено собрало 40% всех трав, другое звено собрало 80% того количества, которое собрало 1-е звено, а 3-е звено собрало остальные травы, причем 2-е звено собрало на 2 кг больше, чем 3-е?

§ 7. Практические работы

Учителю следует использовать каждую возможность для составления и решения задач с процентными расчетами; числовые данные следует брать из окружающей жизни, из периодической литературы, из газетных сводок. Огромно воспитательное значение тех задач, на которых учитель может показать учащимся рост наших достижений, рост нашей культуры и организованности.

Процентный транспортир. Полезно расчеты, подобные указанным выше, наглядно иллюстрировать диаграммами (прямоугольными и круговыми), а ход, изменение величины за некоторый промежуток времени—графиками. Можно предложить учащимся самим изготовить процентные транспортеры и пользоваться ими при вычерчивании круговых диаграмм наряду с использованием градусного транспортера, где приходится выполнять перевод любого числа процентов в градусы путем умножения на 3,6.

Для построения процентного транспортера удобно взять окружность радиуса 32 мм (или 48 мм, — вообще число, кратное 16), затем раствором циркуля, равным 2 мм (во втором случае 3 мм), отложить по окружности равные дуги; тогда число их будет 100, и прибор может служить для изображения процентов: $\frac{2 \pi R}{100} \approx \frac{6,28 \cdot 32}{100} \approx 2$ мм. Деления на круге можно обозначить через 5%. Чем больше взятый радиус, тем больше точность делений процентного транспортера. Для классного употребления можно взять картонный круг радиуса в

8 см и нанести деления по окружности радиусом циркуля в $\frac{1}{2}$ см.

Таблицы. Полезно предложить учащимся самим вычислять и составлять таблицы для процентных расчетов. Например, таблицу, которой они смогут практически пользоваться для характеристики своего класса: какой процент учащихся учится отлично, сколько принимают участие в работе кружка и т. п. Пусть в классе 36 учащихся.

Таблица (с точностью до 0,1%)

Число учащихся	1	2	3	...	9	10	20	30
Процент	2,8	5,6	8,4	...		27,8	55,6	

23 учащихся учатся отлично, т. е. $55,6\% + 8,4\% = 64\%$.

Или: имеется задание — засеять участок в 940 кв. м. Составив таблицу, аналогичную вышеприведенной, учащиеся могут следить за ходом выполнения плана (в процентах).

Таблица. 1 кв. м составляет 0,1% (с точностью до 0,1%)

2 кв. м составляют 0,2%

10 кв. м составляют 1,1%

20 кв. м составляют 2,2%

100 кв. м составляют 10,6%

200 " " " 21,2% и т. д.

Если засеяно 210 кв. м, то выполнено:

200 кв. м — 21,2%

10 кв. м — 1,1%

Всего 22,3% задания.

Составление практически полезных таблиц способствует сознательному усвоению процентных вычислений, а упражнение в вычислении их помогает закрепить приобретенные навыки как в вычислении процентов, так и в округлении приближенных чисел.

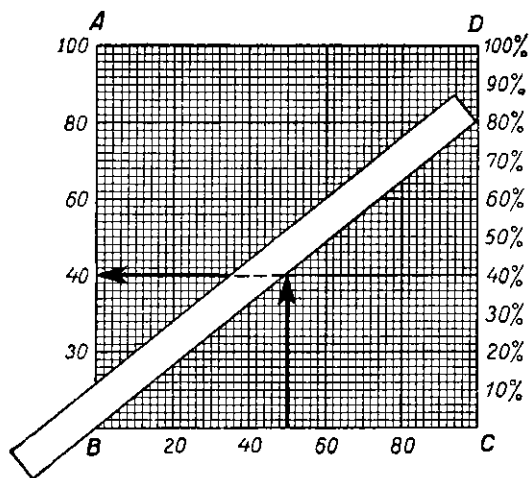


Рис. 36.

График. На рисунке 36 дан график для решения всех трех задач на проценты. Искомые и данные числа откладываются на *AB* и *BC*. На графике показано, как при помощи линейки найти 80% от 50, показано также, что число 40 составляет 80% от 50 (обратная задача).

Различные задачи. Для приобретения учащимися достаточного навыка в решении задач, требующих применения процентных расчетов, необходимо давать учащимся для решения в классе и дома, у доски и самостоятельно в тетради большое число разнообразных задач (в которых одним из вопросов будет расчет процентов), включая и задачи геометрического содержания по расчету процентного отношения площадей и объемов, на построение диаграмм и графиков.

Приведем решение некоторых задач, интересующих учащихся как показывает опыт, или затрудняющих их при решении.

1) Что больше: 70% от 55 или 55% от 70?

$$55 \cdot 0,7 = 70 \cdot 0,55 = 38,5$$

2) Как изменится стоимость вещи, если вначале стоимость ее повысить на 20%, а затем снизить на 20%?

Решение. $20\% = \frac{1}{5}$.

После первого изменения она будет стоить 120% первоначальной стоимости, после второго изменения: $120\% - 120 \cdot \frac{1}{5} = 120\% - 24\% = 96\%$ первоначальной стоимости, т. е. стоимость снизится на 4% первоначальной стоимости.

Полезно предложить учащимся проверить полученный ответ на примере.

Пусть вещь стоит 40 руб.

После 1-го изменения она будет стоить $40 + 8 = 48$ (руб.);

после 2-го изменения она будет стоить $48 - 48 \cdot \frac{1}{5} = 38 \frac{2}{5}$ (руб).

Стоимость снизилась на 1 рубль 60 коп., что составляет 4% от 40 руб.

3) 30% участка, принадлежащего школе, было занято вспомогательными постройками. На сколько процентов увеличилась площадь, предназначенная школе, после сноса этих построек?

Решение. Площадь, не занятая постройками, составляла 70% всего участка. Когда вся площадь была возвращена школе (100%), то возвращенная площадь составила $100\% - 70\% = 30\%$ к прежде имевшейся.

Процентное отношение $\frac{30\%}{70\%} = \frac{3}{7} \approx 0,43$, или 43% (с точностью до 1%).

Проверка на примере. Пусть вся площадь участка составляла 4000 кв. м; значит, школе предоставлялось $4000 \cdot 0,7 = 400 \cdot 7 = 2800$ (кв. м). Возвращенная площадь составляла 1200 кв. м.

$$\frac{1200}{2800} = \frac{3}{7} \approx 43\%.$$

4) Сколько воды надо долить к 25 л кислоты в 90%, чтобы получить кислоту в 75%?

Решение. В 25 г 90% кислоты содержится: $25 \cdot 0,9 = 22,5$ (г) кислоты без примеси воды; эти 22,5 г должны сохраниться и в 75% кислоты, т. е.

$$0,75x = 22,5, \text{ или } \frac{3}{4} x = 22,5;$$

$$x = 30 \text{ г};$$

значит, получится 30 г 75% кислоты, т. е. долить придется (30—25) 5 г воды.

Аналогично решается задача: „Свежий гриб содержит 90% воды, сушеный 12%. Сколько получится сушеных грибов из 10 кг свежих?“

Решение. В 10 кг свежих грибов вещество гриба (без воды) составляет 10%, т. е. 1 кг. Этот килограмм вещества останется и тогда, когда грибы высушат:

$$100\% - 12\% = 88\%, \text{ т. е. } 88\% x = 1;$$

$$x = 1 : 0,88 = 1,1 \text{ (кг)}.$$

Глава XII

ЗАДАЧИ

§ 1. Введение

С начала и до конца курса арифметики учитель математики должен уделять большое внимание решению учащимися задач. Решение задач ценно как умение применять приобретаемые знания к решению практического вопроса, как умение установить функциональную зависимость между конкретными величинами и на основании установленной зависимости, выбрав необходимые арифметические действия и выполнив их, разрешить определенный вопрос.

Ранее (в гл. I) при рассмотрении задач, содержанием которых являются данные нашего социалистического строительства, и задач технического содержания было указано, какое большое воспитательное значение имеет решение конкретных задач.

На задачах учащийся учится и показывает свое умение из условий реальной действительности извлекать ее математическую суть, с числом и мерой подходить к действительности.

Решение задач способствует развитию математического мышления учащихся, так как расчленение составной задачи на простые, установление связи между отдельными вопросами, подбор искомого в каждой простой задаче и выбор необходимых данных для его отыскания требуют и развивают сообразительность учащегося, его творческие способности, его умение делать умозаключения, помогают овладеть методами анализа и синтеза; рассмотрение

взаимозависимости и изменения одних величин в соответствии с изменением других, имеющихсЯ во всякой задаче, способствует постепенному более глубокому освоению учащимся идеи функции.

Решение задач имеет большое методическое значение еще и потому, что при решении задач учащиеся получают представление о практическом значении математики, убеждаются в необходимости изучения того или иного действия и преобразования, а также выясняют основные арифметические понятия. Так, в соответствующих главах данной „Методики“, как, например, в главах о вычитании, делении целых чисел, умножении и делении на дробное число, пропорциональности величин и др., выясняется на задачах цель данного действия, характер и зависимость данных и искомого и делается необходимое обобщение. Путем решения и исследования решения задач поясняются основные законы действия, изменения искомого в зависимости от изменения данных и т. п.

Задача. Задачей в арифметике называется требование определить численное значение какой-либо совокупности объектов или величин, зная численные значения других совокупностей или величин, находящихся в определенной зависимости между собой и с искомым. Известные числа в задаче называются данными; число, которое надо определить, называется искомым. Необходимыми элементами арифметической задачи, составляющими ее условие, являются:

1) числовые данные, показывающие совокупность объектов, или величин, или их взаимную зависимость;

2) словесные пояснения той зависимости, которая имеется между данными числами и между данными и искомыми;

3) тот вопрос задачи, для ответа на который требуется найти искомое число.

Без какого-либо из названных элементов решение арифметической задачи или невозможно, или неопределенно.

В данной главе мы будем рассматривать задачи, в условии которых явно не указываются действия,

которые надо произвести над данными числами для определения искомого, в противоположность упражнениям, обычно называемым примерами¹, в условиях которых прямо указаны действия, которые надо произвести над данными числами, чтобы получить искомое. Согласно этой терминологии:

Пример. $45 - 38 = ?$ —учащийся должен выполнить указанное действие;

Задача. Из имевшихся 45 тетрадей роздано учащимся 38; остальные оставлены для нужд класса. Сколько тетрадей оставлено для класса?—во второй постановке вопроса учащимся надо на основании словесно выраженного условия задачи² сначала установить, каким действием найти искомое, а затем выполнить действие: $45 - 38 = 7$.

Задачи простые и сложные (составные). Приведенная выше задача решается одним действием. Такие задачи принято называть простыми в противоположность задачам, требующим для

своего разрешения не менее двух действий и называемых сложными³. Надо отметить, что это разделение задач не может быть строго проведено; так, например, задача, для решения которой надо сложить более двух чисел, может быть решена и одним, и большим числом действий сложения, т. е. может в одном случае рассматриваться как простая, в другом случае как составная. Такая задача, для решения которой надо сложить несколько равных слагаемых, может решаться умножением и рассматриваться как простая, может решаться путем последовательного ряда действий сложения и рассматриваться как составная.

Задачи нахождения дроби числа и всего числа по заданной величине его дроби также могут решаться одним действием (умножением и делением на дробь) и рассматриваться как задачи простые,

¹ Разделение нестрогое. В иностранной литературе понятия примера и задачи нередко отождествляются.

² Задачи с текстом.

³ Термин „простая“ или „сложная“ задача здесь не рассматривается в смысле простоты или сложности той зависимости, которая имеется в задаче между данными и искомым.

но могут решаться и двумя действиями, т. е. рассматриваться как задачи сложные (составные).

Имеется и иной признак простой задачи: в простой задаче обычно—две данные величины, за исключением простой задачи на сложение, где может быть и несколько данных. Этот признак также недостаточен. Все же мы пользуемся термином „простая задача“ (решаемая одним действием) для удобства изложения.

Все основные простые задачи подробно рассмотрены нами при выяснении вопросов, решаемых каждым из четырех арифметических действий над целыми числами (см. главы „Сложение“, „Вычитание“, „Умножение“ и „Деление“), а затем при выяснении вопросов, решаемых умножением и делением на дробь (см. соответствующие параграфы в главах IX и X). При решении указанных простых задач учащиеся познакомились с различными случаями, в которых применяется каждое действие, с различными способами выражения требования, приводящего к одному и тому же арифметическому действию, и с различными способами ответа на него.

Решать успешно сложные задачи можно только после того, как: 1) прочно усвоены основные простые задачи и 2) прочно усвоены навыки в выполнении действий.

Для целых¹ чисел то и другое является предметом обучения в начальной школе; в курсе младших классов средней школы эти основные задачи должны быть только повторены на уроках и дополнены в плане, указанном нами в соответствующих главах, при выяснении теории.

Составная задача² при решении расчленяется на несколько простых задач и решается не менее, чем двумя действиями. При помощи каждого действия решается какая-либо из простых задач. Для каждой из этих простых задач, на которые расчленяется составная задача, должны быть подобраны два данных и искомое, находящиеся между собой в зависимос-

¹ Натуральных.

² „Составленная“ из простых.

ти. Если принять во внимание, что, кроме одного искомого последней простой задачи (в некоторых случаях—двух последних задач или больше), все искомые назначаются самим решающим, и по два данных для решения каждой простой задачи подбираются им же (сначала из числа нескольких данных в условии задачи, а затем не только из данных задачи, но и из уже вычисленных искомых), то понятно, что основная трудность решения составной задачи именно и заключается:

- 1) в выборе искомых для простых задач и
- 2) в подборе данных для решения простых задач, т. е. в выборе из многих возможных комбинаций чисел—нужных комбинаций.

Обычно намечается план решения составной задачи, а именно: указывается, на какие простые задачи будет расчленена сложная задача и в какой последовательности она будет решаться.

Для составления плана решения задачи существует два основных приема рассуждений: синтетический и аналитический.

§ 2. Синтетический и аналитический приемы

Синтетический прием. Пусть условие задачи таково: „В течение 3 дней добывали по 16,5 *t* угля, в течение следующих 4 дней— по 16,8 *t*. Сколько всего добыто угля за эти дни?“ Искомое в задаче—число тонн угля, которое добыто за все дни. Данных в задаче—4. Для составления первой простой задачи надо из этих четырех данных выбрать два, находящиеся между собой в определенной зависимости, и назначить искомое, т. е. поставить вопрос простой задачи. Рассмотрим некоторые из возможных комбинаций данных и соответствующие им искомые.

При составлении следующих простых задач число данных увеличится, так как данными будут служить и вычисленные искомые предыдущих задач. Сообразительность и навык в решении задач должны помочь учащимся отобрать из всех возможных комбинаций ту, которая наиболее выгодна для решения задачи; учащийся должен предвидеть, исполь-

зуется ли ответ решенной простой задачи в решении составной. В этом трудность решения задачи.

Д а н н ы е	И с к о м ы е
1) Число дней работы с меньшей производительностью труда. Число дней работы с большей производительностью труда ¹ .	Общее число дней работы.
2) Те же данные.	На сколько число дней работы с большей производительностью превышало число дней работы с меньшей производительностью.
3) Добыча угля за один из первых трех дней работы. Добыча угля за один из четырех дней работы.	На сколько тонн угля в день добывали во второй раз больше, чем в первый.
4) Те же данные.	Сколько всего угля добывали за два дня, работая с той и другой производительностью.
5) Добыча угля за один из первых дней работы. Число дней работы с этой производительностью труда (число первых дней работы).	Сколько всего угля добыто за первые 3 дня и т. д.

¹ При этих двух данных для задачи, решаемой в целых числах, можно наметить указываемые нами два искомого, но если задача допускает решение в дробных числах, то число искомого может быть больше: например, можно поставить вопрос: какую часть составляет одно число дней по отношению к другому? и т. д.

Для решения приведенной задачи комбинации 1), 2), 3), 4) решения возможны, но невыгодны, так как удлиняют решение задачи. Приведем решение задачи при первой комбинации.

$$\begin{aligned}
 3+4 &= 7 \text{ (дн.)} \\
 16,5 \cdot 7 &= 115,5 \text{ (м)} \\
 16,8 - 16,5 &= 0,3 \text{ (м)} \\
 0,3 \cdot 4 &= 1,2 \text{ (м)} \\
 115,5 + 1,2 &= 116,7 \text{ (м)}
 \end{aligned}$$

Ясно, что для решения данной задачи следует предпочесть нижеприведенную комбинацию и решить первую простую задачу по указанным в ней двум данным. Продолжая составление простых задач, мы сведем решение данной составной задачи к последовательному решению трех простых задач. Решение будет закончено, когда ответ простой задачи совпадет с ответом на вопрос всей задачи.

После отбора простых задач план решения данной составной задачи будет таков:

Зная данные	Можно узнать (искомое)	Решение	
1) Добычу угля за один из первых дней работы (16,5 т).	Число первых дней работы (3 дня).	Добычу угля (в тоннах) за первые 3 дня работы.	$16,5 \cdot 3 = 49,5$ (т)
2) Добычу угля за один из следующих дней работы (16,8 т).	Число дней работы с большей производительностью (4 дня).	Добычу угля (в тоннах) за 4 дня работы.	$16,8 \cdot 4 = 67,2$ (т)
3) Добычу угля за первые 3 дня работы (49,5 т).	Добычу угля за последние 4 дня работы (67,2 т).	Общую добычу угля (в тоннах).	$49,5 + 67,2 = 116,7$ (т)

Рассмотренный прием расчленения составной задачи на ряд простых задач, исходя из данных задачи, принято называть синтетическим приемом. При этом решение каждой простой задачи может быть немедленно выполнено.

Аналитический прием. Аналитический прием решения составной задачи предполагает составление последовательного ряда простых задач, исходя из искомого, из того, что нужно¹ узнать в задаче, и, подбирая такие данные для решения, при помощи которых можно найти искомое одним действием. Например, в рассмотренной выше задаче надо узнать, сколько всего добыто угля за

¹ При синтетическом приеме выясняется, что „можно“ узнать.

все (первые и последние) дни. Решить эту задачу мы сможем, если будем знать, сколько добыто угля за первые 3 дня работы и за следующие 4 дня работы. Но ни то, ни другое неизвестно: нет соответствующих числовых данных среди числовых данных задачи, и для решения поставленной задачи надо сначала составить и решить новые две простые задачи и т. д.

Замечания. 1. Иногда неизвестны оба данные, необходимые для решения одной из составленных простых задач (такой случай рассмотрен нами); иногда неизвестно одно из них и для определения его необходимо составить одну новую простую задачу, которая в свою очередь может привести к необходимости составить еще новую простую задачу и т. д., пока в процессе составления простых задач дойдем до задачи, для решения которой будут иметься оба данные среди числовых данных задачи.

2. При выборе данных для определения искомого при аналитическом приеме рассуждений могут иметь место те же трудности, как и при синтетическом приеме. И здесь приходится „заглядывать вперед“, делать выбор между различными комбинациями данных: так, например, в рассматриваемой задаче можно ответить на тот же вопрос (сколько всего добыто угля за все дни работы) такой последовательностью действий: $(16,5 + 16,8) \cdot 3 + 16,8$. Но этот путь более затруднителен для учащихся, чем отыскание добычи угля за первые и последние дни работы.

Аналитически составленный план решения той же задачи будет следующий:

Нужно узнать (искомое)	Надо иметь (знать) данные:	
	1	2
1) Добычу угля за все дни (сколько добыто угля за все дни).	Добычу угля за первые дни	Добычу угля за последние дни
2) Добычу угля за первые дни.	Добычу угля за день $16,5 \text{ т}$	Число дней работы (3)
3) Добычу угля за последние дни.	Добычу угля за день $(16,8 \text{ т})$	Число дней работы (4)

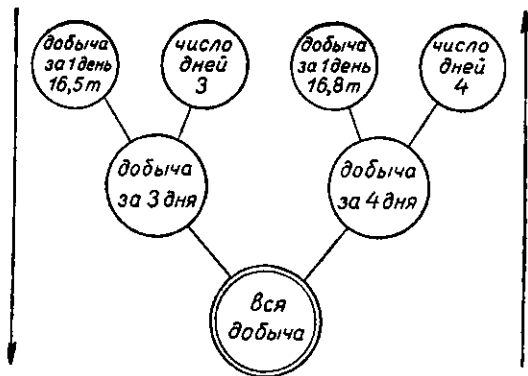


Рис. 37.

Задача снова расчленена на 3 простые задачи, но порядок этих задач иной: последняя задача при первом приеме является первой задачей при втором приеме. Но лишь после составления последней простой задачи при аналитическом приеме рассуждений можно приступить к решению этих задач, начиная с последней составленной задачи (при синтетическом приеме рассуждений это будет первая задача) и постепенно переходя к первой. При аналитическом приеме решение первой задачи будет вместе с тем и решением составной задачи (рис. 37). Таким образом, порядок вычисления результатов простых задач всегда один и тот же, он не зависит от приема рассуждений при составлении плана.

Дадим схему анализа и синтеза разобранной нами задачи. Схема показывает: 1) как при синтезе данные в задаче величины путем соединения в простые задачи приводят к решению вопроса составной задачи; 2) как при анализе, наоборот, вопрос составной задачи расчленяется и решение основывается на данных задачи.

Несомненны преимущества применения аналитического приема решения задач, при котором воспитывается умение учащихся рассуждать и достигается большая строгость, целеустремленность и последовательность умозаключений в противоположность синтетическому приему, где путем ряда отдельных

вопросов как бы случайно приходят к цели¹. Но, с другой стороны, для учащихся V класса и более ранних годов построение последовательной цепи умозаключений, вытекающих друг из друга, как это требуется согласно аналитическому приему, бывает затруднительно. Рассуждения при синтетическом приеме проще и легче, чем при аналитическом, еще и потому, что подобрать вопрос к данным легче, чем наоборот. Кроме того, при аналитическом плане работы большая часть простых задач, на которые расчленяется сложная задача, может быть решена только после решения последующих простых задач, и в большей части, не получая решения простой задачи, приходится устанавливать все последующие простые задачи и только после этого приступить к их решению. При синтетическом же приеме работы каждая простая задача устанавливается полностью со всеми данными и искомыми и может быть немедленно решена. Поэтому при решении составной задачи в школе чаще применяют такой прием: составление плана начинают с анализа (аналитическим приемом), но, не доведя его до конца, приступают к непосредственному решению задачи (синтетически).

Как уже сказано выше, и при синтетическом приеме в процессе рассуждений при выборе простых задач „заглядывают вперед“: можно ли будет использовать эту простую задачу для решения сложной, т. е. пользуются анализом; в этом случае говорят, что при обучении арифметике пользуются синтетически-аналитическим методом. При решении задач не может быть в чистом виде применен ни анализ, ни синтез: анализ и синтез взаимно допол-

¹ При синтетическом приеме решения задачи возможны ошибки двух родов: и при подборе искомого, и при подборе данных. При аналитическом приеме решения возможны ошибки только при подборе данных. Между прочим, может казаться, что по мере составления и решения простых задач подбор данных облегчается тем, что число их становится меньше, но это не так: число данных может не уменьшиться: 1) вместо использованных данных появляются новые данные—результат предыдущих простых задач и 2) часто одно данное, однажды использованное при решении простой задачи, используется и при решении другой, третьей задачи и т. д.

няют друг друга. „Аналитическим“ или „синтетическим“ названы приемы решения задач, смотря по тому, преобладает ли метод анализа или синтеза в процессе рассуждения. Несомненно, что надо приучать учащихся пользоваться и тем и другим приемом. Подробный анализ задачи (с последнего вопроса) очень полезно проводить с учащимися при подытоживающем изложении, при обзоре и проверке составной задачи, уже решенной синтетически.

Это способствует уяснению метода решения рассматриваемой задачи и учит последовательно и четко проводить рассуждения.

§ 3. Подготовка учащихся к решению составных задач

Затруднения учащихся при решении задач происходят от многих причин. Проанализируем основные и в связи с ними установим отдельные методические приемы обучения решению задач.

1) Так как решение составной задачи сводится к решению ряда простых задач, то приступить к решению сложных задач можно только после того, как учитель убедится, что учащимися усвоены простые задачи, решаемые каждым из четырех арифметических действий (рассмотрены нами в соответствующих главах).

В зависимости от результата проверки знаний учащихся учитель использует все или только некоторые из указываемых нами приемов и упражнений.

2) Так как основная трудность при решении простых задач, на которые расчленяется составная задача, заключается в установлении взаимосвязи между данными и искомыми (знание и раскрытие соответствующей зависимости), то надо упражнять учащихся в составлении вопроса для определения данных, в подборе данных для ответа на поставленный вопрос и в указании действия, которым находится ответ на вопрос задачи (устные упражнения).

С этой целью учитель может использовать любую простую задачу. Например, в задаче сказано: „За один день добыто 16,5 *t* угля, за второй день

16,8 т". Или: в задаче сказано: „За один день добыто 16,5 т угля, всего добыто 33,3 т угля“.

а) Учитель может предложить учащимся самим поставить вопрос для каждой задачи и указать действие для ответа на поставленный вопрос.

Для 1-й задачи возможны вопросы: сколько тонн угля добыто за 2 дня? (решают сложением). Или: на сколько тонн угля добыто во второй день больше, чем в первый? (вычитанием).

б) Учитель ставит вопрос и предлагает ученикам сказать, какие данные надо иметь для ответа на поставленный вопрос. Например: какие данные надо иметь, чтобы ответить на вопрос: сколько стоит одна тетрадь? сколько километров проехал велосипедист или поезд? сколько гектаров вспахал трактор? и т. д.; какое еще данное надо иметь, чтобы ответить на вопрос, сколько тонн картофеля собрано с 3 га картофельного поля? сколько пальто можно сшить из 30 м ткани? и т. д.; полезно, чтобы учащиеся не только ответили на вопрос, какие надо знать данные, но и сказали, какое действие надо выполнить, подобрали числовые значения для данных и решили и проверили составленную задачу.

3) Для того чтобы учащиеся уяснили процесс решения составной задачи как последовательного ряда простых задач, полезно проделать с ними упражнение, заключающееся в составлении составной задачи сначала из двух, затем из трех простых задач; например, взять ту же рассмотренную выше задачу (см. рис. 37), решить первую простую задачу, затем вторую и соединить их в одну сложную задачу третьим вопросом. Но и эти упражнения по существу являются упражнениями начальной школы; учитель в V классе должен убедиться, что его учащиеся понимают процесс составления составной задачи и постановку вопросов.

4) Часто затруднения учащихся при решении задач связаны с недостаточной прочными навыками в выполнении самих действий; иногда задача одного и того же типа решается учащимися когда данными служат небольшие целые числа, и не решается ими, когда данные—числа многозначные. Поэтому упражнение в решении задач на то или иное действие

следует проводить с учащимися только после того, как ими хорошо усвоены необходимые действия, когда они выполняются ими быстро и точно.

В отдельных случаях полезно предварительно решить (устно) задачу того же типа, но заменив многозначные числа двузначными дробные — целыми, для того чтобы числа не отвлекали внимание учеников от содержания задачи.

Укажем, что учитель должен считать задачу решенной учащимися при условии, что и план решения задачи составлен правильно, и вычисления правильно доведены до конца, и (по возможности) решение проконтролировано. К сожалению, часто учащиеся ссылаются на правильность взятого ими „хода решения“, недооценивая, что неправильный полученный ими ответ обесценивает работу, независимо от причины ошибки.

§ 4. Чтение и запись условия задачи. Чертеж

1. Одна из основных причин, по которой учащиеся не решают задачи, заключается в непонимании ими полностью или частично условия задачи. Это происходит или от недостаточно четкой и выразительной дикции учителя при чтении им задачи, или от недостаточного навыка учащегося в области чтения, или от недостаточного навыка в чтении про себя при самостоятельном решении задач, или от некоторой небрежности и невнимательности при чтении, вследствие которой ученик часто решает часть задачи, выхватывая отдельные фразы из условия задачи¹. Учителю необходимо в порядке подготовки к уроку тщательно продумывать способ, которым в каждом отдельном случае он предложит учащимся задачу (чтение условия).

1-й способ заключается в том, что учитель наизусть говорит учащимся содержание задачи. Этот

¹ Нередки случаи, когда учащиеся сосредоточивают свое внимание только на числах задачи и пробуют комбинировать их наугад или, увидев в тексте задачи слово „увеличено на“, немедленно применяют действие сложения, независимо от вопросов, как, например, в задаче, где сказано, что выработка ткани увеличена на 135 м по сравнению с планом и составляет 695 м. Каков был план?

прием следует применять при решении сложной задачи, способ решения которой, по мнению учителя, нов для учащихся и может их затруднить.

2-й способ предложения задачи учащимся — чтение задачи по задачнику учителем или учеником. При этом приеме учащиеся учатся пользоваться математической книгой, в частности задачником. В этом случае учитель или сам читает вслух задачу (причем крайне полезно, чтобы учащиеся следили по задачнику за процессом чтения и на этом примере учились), или предлагает одному из учащихся прочесть вслух задачу из задачника. В последнем случае учитель должен четко повторять за учащимися отдельные слова, оттеняя голосом те или другие соотношения, делая указания по поводу чтения.

Иногда следует на уроке упражнять учащихся в тихом чтении задачи (про себя), для того чтобы тем самым подготовить их к самостоятельной работе (в классе и дома). Дав необходимое время для прочтения задачи, следует предложить кому-либо из учащихся повторить ее для проверки и помощи в усвоении.

2. Непонимание задачи учащимися происходит нередко частью от недостаточного знания ими арифметических терминов и выражений (произведение, частное, уменьшаемое или: „взять множителем, увеличить на или в несколько раз“ и т. п.). Поэтому надо тщательно, как указано нами в соответствующих разделах, прорабатывать с учащимися математические термины и выражения. Если же в тексте задачи встречаются незнакомые учащимся слова (тара, брутто, нетто, шкив и др.), все они также должны быть предварительно объяснены учителем до чтения задачи.

3. Непонимание задачи учащимися может происходить от того, что им неясна зависимость между величинами, входящими в задачу; например, между временем, расстоянием, скоростью; между размером, стоимостью, ценой; между диаметрами соединенных ременной передачей шкивов и числами их оборотов и т. д. Надо так же тщательно предварительно выяснять, пользуясь различными примерами, незнакомое учащимся количественное соотношение между величинами.

4. Иногда затруднение учащегося в том, что он не может представить себе мысленно конкретного содержания задачи и поэтому не может приступить к ее решению. В этом случае для пояснения полезно прибегнуть к иллюстрации; например, к чертежу и к рисунку, в частности при решении задач, в которых рассматривается движение, определяется расстояние, расчленяется целое на части и т. п.

Можно применять различные приемы для того, чтобы помочь учащимся и приучить их вдумываться в содержание задачи:

1) в большинстве случаев, хотя и не всегда, следует прочитывать даваемую задачу 2 раза¹, причем при первом чтении учащиеся только слушают задачу, знакомясь с ее содержанием, при втором чтении расчленяют условие задачи и ведут запись на доске и в тетради;

2) запись задачи также должна служить вспомогательным средством для освоения содержания задачи, для ее анализа; она помогает выявить зависимость, имеющуюся между данными задачи, и тем способствует ее решению. Запись не должна быть громоздкой, поэтому не должна содержать словесного изложения содержания задачи; данные в задаче числа должны быть при записи так расположены, чтобы само расположение по возможности указывало на связь между ними. Для этой цели удобна запись данных чисел „столбиком“. Запись вопроса задачи иногда может быть опущена. Приведем запись задачи: номер задачи пишется и на доске, и в тетради в левом верхнем углу; задача читается постепенно и постепенно же ведется запись: „Три бригады рабочих ремонтировали шоссе на протяжении 8400 м“ (запись); чтение продолжается: „Первая бригада работала 108 час. и отремонтировала в час по 24 м“ (запись), дальше: „Вторая—работала 105 час. и отремонтировала в час по 28 м“ (запись). Ставится вопрос: „Сколько метров шоссе осталось отремонтировать третьей бригаде?“ (можно поставить знак вопроса в третьей строчке, правее записи, в столбце).

¹ Имеется опасность, что учащиеся, ожидая вторичного чтения, будут недостаточно внимательно вслушиваться при чтении задачи в первый раз.

Запись: №...	I 108 час. по 24 м
	II 105 час. по 28 м
	III ?

Всего . . . 8400 м

Конечно, условия некоторых задач не могут быть записаны (столбиком) так, как это здесь указано, но основные записи условия должны всегда соблюдаться, а именно: немногословность записи, в то же время наличие кратких и четких пояснений, сближение взаимосвязанных величин, для того чтобы запись условия помогла учащемуся освоить условие задачи и в то же время свидетельствовала об этом.

Нередко ученики не записывают ни на доске, ни в тетрадях условие задачи, если задача взята из имеющегося у них задачника, и во время ее решения все время заглядывают в задачник не только для того, чтобы восстановить числовые данные условия задачи, но и для того, чтобы прочитать, „о чем дальше“ говорится в задаче, чтобы поставить следующий вопрос. Конечно, такой прием не способствует обучению решения задач и не служит делу развития логического мышления учащихся.

3) После того как задача записана, полезно (но не обязательно каждый раз) повторить с учащимися ее содержание. Если спрошенный учащийся затрудняется связно повторить задачу, то можно помочь ему восстановить содержание ее при помощи вопросов, следуя записи, причем малоценны вопросы, вроде: „О чем говорится в задаче?“, „Что говорится?“ и т. д. Для воспроизведения условия задачи можно поставить следующие вопросы: „Сколько бригад рабочих ремонтировало шоссе?“, „Сколько часов работала первая бригада и по сколько метров ремонтировала в час?“ и т. д.

4) После повторения условия задачи приступают к ее решению.

Самостоятельное обдумывание задачи есть одно из условий, помогающих научиться решать задачи. И учитель должен учесть это в своей работе. При классной работе не следует торопить учащихся решать задачу немедленно вслед за прочтением и повторением условия; надо предоставить им возмож-

ность обдумать план решения, затем предложить одному-другому учащемуся бегло сказать намеченный им план решения задачи. После этого можно приступить к решению задачи на доске с тщательным выяснением всех этапов работы.

5) Повторяем, один из приемов обучения решению задач, указываемый нами, заключается в том, что учитель развивает у учащихся умение представлять себе наглядно, возможно конкретнее те данные, ту зависимость, которая дается в условии задачи. С этой целью иногда пользуются иллюстрацией; в частности, при решении задач на движение обычно пользуются иллюстрацией в виде прямолинейного отрезка. Например, к задаче: „Из двух мест, расстояние между которыми 243 км, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста, из которых один проезжал по 13 км в час. По сколько километров в час делал другой, если известно, что они встретились через 9 час. после выезда?“

Запись: №... I. 13 км в час; 9 час.
 II. ? 9 час.

Дается рисунок, где стрелки показывают направление движения. При записи условия два связанных между собой данных (13 км в час и 9 час.) оказались рядом (сближены), в то время как в тексте задачи они разобщены и подметить зависимость между ними труднее.

Структура задачи. I. В каждом разделе задачника по арифметике имеются задачи, в тексте которых зависящие друг от друга данные сближены или разобщены, в которых вопрос поставлен в конце текста, в середине и в начале.

Сначала для упражнения следует выбирать задачи, в которых вопрос четко отделен от данных задачи и поставлен в конце текста, потом предложить для решения задачи, в которых вопрос стоит в начале или в середине текста и связан с данными при помощи придаточных предложений („если известно“, „причем“ и т. д.).

Учащиеся, как известно, успешнее решают задачи, которые обычно называют „приведенными к ряду простых задач“, или просто „приведенными“ (в ко-

торых данные условия расположены в порядке требуемых действий), чем „неприведенные“ (не отвечающие выше указанному порядку).

Если учащиеся не имеют достаточного навыка в решении „неприведенных“ задач и в этом заключаются затруднения при решении задач, то учителю следует восполнить этот пробел, а именно: видоизменять формулировку условия некоторых задач, делать их „приведенными“¹, а затем решать те же задачи по условию, данному в „неприведенном виде“.

Задача „неприведенная“: „Успеет ли велосипедист, проезжающий 10 км в час и находящийся на расстоянии 200 м от переезда железной дороги, переехать рельсы, прежде чем закроют проезд, что случается за 2 мин. до прохода товарного поезда через переезд, если известно, что поезд еще находится на расстоянии 1350 м от переезда и идет с $\frac{1}{2}$ своей нормальной скорости, которая составляет 54 км в час?“

Та же задача в „приведенном“ виде: „Поезд идет с $\frac{1}{2}$ своей нормальной скорости, которая составляет 54 км в час, и находится на расстоянии 1350 м от переезда. Переезд закроют за 2 мин. до прохода поезда. Велосипедист, который проезжает 10 км в час, находится на расстоянии 200 м от переезда. Успеет ли он переехать рельсы прежде, чем закроют переезд?“

Мы не считаем необходимым в средней школе сначала решать только одни из указанных задач, потом—другие. Мы указываем учителю на сравнительную трудность задачи в зависимости от ее структуры и предлагаем в случае надобности (в случае неясности для учащихся содержания сложной задачи) сначала выбрать для упражнения задачи, более простые по структуре текста.

2. Для воспитания у учащихся сознательного отношения к условию задачи иногда предлагают давать учащимся задачи как с лишними данными, так

¹ Этому способствует и рекомендованная нами выше запись условия задачи.

и с недостаточным числом их. Например, в вышеприведенной задаче можно указать день и месяц события, как лишнее данное в тексте условия. Но наиболее естественными задачами этого рода будут задачи с конкретным содержанием, когда они предложены учителем или учащимися (см. гл. I). Пусть, например, надо произвести расчет стоимости побелки комнаты или оклейки ее обоями. Можно: а) предложить учащимся самим определить, какие величины надо знать для решения этой задачи, и найти их числовые значения (задача без числовых данных); б) дать размеры стен и обоев, не указав размеры окон или дверей, не подлежащих оклейке или побелке (задача с недостающими данными); в) дав все необходимые размеры, дать и размеры стен, пола комнаты или размеры близлежащего коридора и т. д. (задачи с лишними данными).

§ 5. Примеры решения составной задачи. Запись

1. В качестве примера рассмотрим задачу, записанную выше в § 4, стр. 407. Приступая к решению задачи, учащиеся должны прежде всего наметить план решения. Для составления плана рассуждаем (устно) так: „Надо узнать, сколько метров шоссе из общего числа метров осталось отремонтировать третьей бригаде¹, для этого надо знать, сколько метров шоссе отремонтировали первая и вторая бригады; постараемся это узнать“. Запись решения (по вопросам):

1) Сколько метров шоссе отремонтировала первая бригада? $24 \cdot 108 = 2592$ (м)

$$\begin{array}{r}
 1) \times \begin{array}{r} 24 \\ 108 \end{array} \\
 \hline
 192 \\
 24 \\
 \hline
 2592
 \end{array}$$

2) Сколько метров отремонтировала вторая бригада?

¹ Составление плана начинаем аналитическим приемом, в дальнейшем задача решается синтетически.

$$28 \cdot 105 = 2940 \text{ (м)}$$

$$2) \begin{array}{r} \times 28 \\ \hline 140 \\ 28 \\ \hline 2940 \end{array}$$

3) Сколько метров отремонтировали первые две бригады вместе? $2592 + 2940 = 5532 \text{ (м)}$

$$3) \begin{array}{r} + 2592 \\ + 2940 \\ \hline 5532 \end{array}$$

4) Сколько метров шоссе осталось отремонтировать третьей бригаде? $8400 - 5532 = 2868 \text{ (м)}$

$$4) \begin{array}{r} - 8400 \\ - 5532 \\ \hline 2868 \end{array}$$

Ответ. 2868 м шоссе осталось отремонтировать третьей бригаде.

Вся работа (и записи и вычисления) должна быть выполнена последовательно, аккуратно и должна быть снабжена нумерацией решаемых простых задач. Надо воспитывать у учащихся привычку проверять полученное решение.

Приведем для примера рассуждения к первому вопросу (устные): „Так как первая бригада ремонтировала в 1 час. 24 м шоссе, всего же она работала 108 час., то за 108 час. она отремонтирует в 108 раз больше, чем за один час (или 108 раз по 24 м). Эта задача (простая) решается умножением: $24 \cdot 108$ “ и т. д.

При решении этой задачи можно ограничиться частичной проверкой решения: $2592 + 2940 + 2868 = 8400 \text{ (м)}$.

$$\begin{array}{r} 2592 \\ + 2940 \\ \hline 2868 \\ \hline 8400 \end{array}$$

От учащихся V класса нет необходимости каждый раз требовать подробной записи решения, подобно приведенной выше. Подробной записи тре-

буют преимущественно: а) при самостоятельном решении учащимися задач в классе и дома и б) при решении задач, наиболее затрудняющих учащихся (указаны ниже), для того чтобы учитель мог проверить ход рассуждений учащегося и даваемые им формулировки вопросов простых задач. В частности, на классной доске нет необходимости всегда записывать словами вопросы, так как они должны четко и громко произноситься учащимися у доски и повторяться учителем с тем, чтобы каждому учащемуся в классе вопрос был слышен и ясен. На доске и в тетрадях записываются только выполняемые действия.

2. Следует учить записывать решение задачи, сопровождая пояснением решение каждой простой задачи; в частности, это полезно при решении задачи нового „типа“, например:

1) $24 \cdot 108 = 2592$; 2592 м шоссе отремонтировала первая бригада;

2) $28 \cdot 105 = 2940$; 2940 м шоссе отремонтировала вторая бригада;

3) $2592 + 2940 = 5532$; 5532 м шоссе отремонтировали обе бригады;

4) $8400 - 5532 = 2868$; 2868 м шоссе осталось отремонтировать третьей бригаде.

3. При решении более трудных задач или задач нового для учащихся „типа“ полезно предлагать им не только ставить вопросы к каждому действию (устно и письменно), но и сопровождать получаемый ответ пояснением (устным и письменным). Такая подробная запись поможет учащимся воспроизвести дома то, что было ими проработано в классе на уроке.

4. Для того чтобы развивать речь учащихся, умение формулировать свои мысли, полезно иногда решать с ними задачи (давать для самостоятельного выполнения дома) с подробной (расширенной) записью вопросов, включая в текст и числовые данные, над которыми будет выполнено действие; это подготавливает к решению задач с подробным объяснением. Например:

1) Сколько метров отремонтировала I бригада за 108 час. работы, если она ремонтировала в час 24 м?

2) Сколько метров отремонтировала II бригада за 105 час., если она отремонтировала в час 28 м?

3) Сколько метров отремонтировали первые две бригады, если одна из них отремонтировала 2592 м, а другая—2940 м и т. д.

Выше приведен план решения задачи по вопросам. Вопросы плана могут быть сформулированы кратко или расширенно (как показано выше). Вычисления, соответствующие вопросам (простым задачам), могут быть даны после каждого вопроса или после изложения плана в целом. К той и другой форме записи решения задачи полезно приучать учащихся.

5. В последние годы многие учителя проводят с учащимися пятых и sixth классов решение арифметических задач с подробным письменным объяснением. Это представляет несомненные трудности как для учителя, так и для учащихся, поэтому учителю следует каждый раз особенно тщательно подготавливать такую работу.

Подробное объяснение к решению задачи может быть дано различно. Наиболее полным объяснением следует считать объяснение, данное по следующей схеме: 1) анализ задачи (иногда частичный анализ), который показывает путь к составлению плана решения задачи; 2) план решения задачи по вопросам с подробной (расширенной) их записью (т. е. последовательность простых задач, которые будут решены); 3) решение простых задач, сопровождаемое рассуждением, объясняющим выбор действия; могут быть даны пояснения и к ответу в каждом действии; 4) проверка решения задач и 5) ответ (полный). Все этапы этой работы показаны нами выше.

При письменном объяснении типовой задачи от учащихся V и VI классов можно ожидать в тех случаях, когда это нужно, пояснение сделанного предположения, а также обоснование выбора действия; например, использование умножения при нахождении дроби числа, деления—при решении обратной задачи и т. д.

Перед тем как задать на дом первую задачу с подробным письменным объяснением, целесообразно во все объяснение устно разработать с учащимися в классе с тем, чтобы 2—3 человека его повтори-

ли¹. Выполненная домашняя работа каждого учащегося должна быть тщательно проверена учителем (как сочинение по русскому языку), недочеты в работе должны быть индивидуально с ним разобраны. Число задач, решаемых с подробным письменным объяснением, обычно невелико, примерно одна задача в месяц.

Частая проверка записи самостоятельно решенных учащимися задач, наблюдения в классе за тем, чтобы учащиеся придерживались определенного порядка записи действий в тетрадях, обязательны. Также обязательно исправление в записях учащихся не только арифметических, но и грамматических ошибок. Многословной, не подготовленной учителем записи в тетрадях по арифметике учащихся V класса допускать не следует. Такие записи влекут за собой большое число грамматических ошибок, изжитием которых преподаватель арифметики не имеет возможности заняться. Когда учащиеся в классе записывают словами план решения задачи, учитель или указывает, как пишутся некоторые трудные слова (в решенной задаче: „шоссе“, „ремонтировать“), или спрашивает менее подготовленных учащихся, как они напишут эти слова. Полезно такие слова выписать на доске.

Все указания, которые были сделаны нами в отношении выполнения вычислений устно или полуписьменно при рассмотрении соответствующих действий, должны соблюдаться и в вычислениях при решении задач (запись в строчку результата при умножении и делении на однозначное число; вычитание дополнением и т. п.).

Числовая формула. Начиная с первых уроков в V классе, надо записывать решение некоторых задач в виде числовой формулы (строки), показывающей, над какими числами, в какой последовательности и какие действия надо выполнить для получения ответа.

¹ Для того чтобы не задерживать более успевающих учащихся, можно с ними приступить раньше, чем со всем классом, к записи подробного объяснения решения задачи, дав им необходимые пояснения в порядке индивидуального задания, с последующей проверкой его выполнения.

Запись числовой формулой решения задачи, рассмотренной выше:

$8400 - (24 \cdot 108 + 28 \cdot 105) = 2868$. Такая запись делает более наглядной взаимосвязь между величинами, рассматриваемыми в задаче, и подготавливает учащихся к составлению в дальнейшем буквенных выражений в курсе алгебры. Запись решения задачи числовой формулой удобно давать тогда, когда она не громоздка; учащиеся могут видеть, что составление формулы и последующее вычисление упрощает работу, так как всегда освобождает от необходимости вычислять промежуточные результаты (образцом может служить решение задач на „сложное тройное правило“), а иногда позволяет уменьшить число действий или упростить вычисления, используя законы и свойства действий.

Проверка. 1. Проверка решения задачи имеет большое значение в деле воспитания у учащихся привычки доводить работу до конца, самому контролировать свою работу, ответственно выполнять ее. Проверка решения имеет также большое значение для воспитания сознательности и умения решать задачи, так как нередко только в процессе проверки задачи ученик глубоко вникает в ее содержание и осознает функциональную зависимость, которая в ней рассматривается. Так, например, было при решении задачи, нередко затрудняющей учащихся: „Одно число больше другого на 187 и составляет 15% его. Найти эти числа“.

Решение. $15\% = \frac{3}{20}$; $20 - 3 = 17$; $187 : 17 = 11$;
 $11 \cdot 20 = 220$; $11 \cdot 3 = 33$.

Ответ. 220 и 33.

Проверка. 1) Разность $220 - 33 = 187$; 2) $\frac{33}{220} = \frac{3}{20} = 15\%$. Задача решена верно; проверены все условия задачи, что является обязательным при проверке полученного ответа.

Теперь допустим, что в рассматриваемой задаче неправильно выполнено деление, а именно: получено $187 : 17 = 10$; $10 \cdot 20 = 200$ и $10 \cdot 3 = 30$. Отношение

полученных чисел $\frac{30}{200} = 15\%$ (верно), но $200 - 30 \neq 187$.

2. Часто учителя после решения задачи предлагают составить задачу, причем поставить одно из данных в качестве искомого, а найденный ответ включить в условие. Для вышерассмотренной задачи можно составить следующие новые задачи: 1) „Одно число больше другого на 187 и равно 220. Сколько процентов составляет меньшее число от большего?“ (Проверяется только одно условие основной задачи: 15%.) 2) „Одно число составляет 15% другого и равно 33. На сколько оно меньше другого числа?“ (Проверяется условие, выраженное числом 187.) 3) „Имеются два числа 220 и 33. Узнать, на сколько одно число больше другого и сколько процентов меньшее число составляет от большего?“ В качестве проверки указанный путь не удобен и потому, что он громоздок, и потому, что он не всегда проверяет все условия задачи; но само по себе составление таких задач полезно, так как раскрывает для учащихся структуру задач и учит их самостоятельно составлять задачи.

3. В случае, когда одна и та же задача решается различными способами, никакая специальная проверка не нужна. Готовясь к уроку, учитель должен продумать различные возможные приемы решения одной и той же задачи¹ и выделить наиболее рациональный. Учащихся, предложивших оригинальный прием решения задачи, надо поощрять.

4. Не всегда следует заниматься проверкой решения задач с многозначными или составными именными числами, но очень полезно проверять простые задачи на дроби, на проценты, некоторые типовые задачи с двузначными и трехзначными числами и т. п.

Наименования. В различных методиках и учебниках арифметики даются различные образцы записи решения задач и расстановки наиме-

¹ В дальнейшем при изложении методов решения задач они указываются.

нования¹. Поэтому не удивительно, что и в школьной практике мы встречаем самые разнообразные записи. Не останавливаясь на всем разнообразии записей и расстановок наименований при решении задач, записанных нами по тетрадам учащихся, приведем лишь те, которые встречаются более часто и имеют то или иное обоснование. Пусть надо к 24 *м* прибавить 35 *м*; пишут:

- 1) 24 *м*+35 *м* = 59 *м*, 2) 24+35 = 59 *м*, 3) 24+35 = 59 (*м*), 4) 24+35 = 59; 59 *м*; 5) 24+35 = 59.

Последняя запись правильна, так как действия производят над отвлеченными числами (и учащиеся должны это усвоить), но мы считаем полезным при решении задачи иметь запись наименований, чтобы учащийся видел цель выполненного им действия и знал, сколько он получил и что означает полученный им ответ. Поэтому при решении задач следует предпочесть записи выполняемых действий, сопровождаемые наименованием чисел. Из четырех остальных форм записи, отвечающих этому требованию, надо отвергнуть только вторую, так как эта запись как бы показывает, что от сложения двух отвлеченных чисел может получиться число именованное или неоднородное с данными. В частности, эта запись очень распространена в случае деления по содержанию, например пишут $120:8=15$ дней, что нельзя признать убедительным. Мы считаем приемлемым для школы записи 1), 3) и 4). Записи 3) и 4) мы не различаем, потому что в обеих действия записаны над отвлеченными числами, результат же с наименованием, подчеркивающим для учащегося его смысл, или приписывается отдельно, или наименование пишется рядом с числом в скобках. В применяемых учебниках по арифметике раньше была принята запись 1), когда наименования, показывающие характер величин и объектов совокупностей, рассматриваемых в задаче, пишутся при каждом числе. В данной „Методике“ мы придержи-

¹ Известный методист А. И. Гольденберг не был сторонником записи наименований; С. И. Шохор-Троцкий, напротив, высказывался за употребление наименований.

ваемся расстановки наименований 3) и 4)¹ принятой в учебнике Киселева, для того чтобы учащийся пользовался одним каким-либо приемом.

Указание. В отдельных случаях, сознательно употребляя при записи наименования, приходится на основании смысла задачи изменить наименования. Например, надо узнать, сколько учащихся в классе, в котором 17 мальчиков и 14 девочек; следует записать:

$$17+14=31 \text{ (ученик) и т. д.}$$

Как писать наименования в задачах, в которых требуется вычислить площадь и объем, а также по площади или объему найти один из размеров? Этот вопрос тоже является спорным в методике арифметики. В справочниках обычно пишут размеры площади $4 \text{ м} \times 1\frac{1}{2} \text{ м}$ или объема: $3 \text{ м} \times 4 \text{ м} \times 2 \text{ м}$; часто встречаются записи $(4 \cdot 1\frac{1}{3}) \text{ м}$ или $(3 \cdot 4 \cdot 2) \text{ м}$; реже, но встречаются записи $(4 \cdot 1\frac{1}{3}) \text{ м}^2$ и $(3 \cdot 4 \cdot 2) \text{ м}^3$.

При записи действия, которым вычисляется площадь (или объем), распространены те же указанные 5 расстановок наименований и иногда

$$6) 4 \frac{1}{3} \text{ кв. м} \cdot 2 = 8 \frac{2}{3} \text{ кв. м} \text{ или}$$

$$7) (4 \frac{1}{3} \cdot 2) \text{ кв. м} = 8 \frac{2}{3} \text{ кв. м.}$$

Если быть последовательным, то, согласно расстановке наименований, принятой в учебнике арифметики Киселева, следует практически при решении задач, требующих вычисления площади или объема тела, остановиться на записях:

$$4 \frac{1}{4} \cdot 3 \frac{1}{5} = 13,6 \text{ (кв. м)} \text{ или } 4 \frac{1}{4} \cdot 3 \frac{1}{5} = 13,6;$$

13,6 кв. м, которые мы и рекомендуем.

¹ Так предлагает К. П. Аржеников в своей „Методике“.

Пусть надо найти высоту сарая, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, если длина его 4,5 м, ширина 2,2 м, а объем 19,8 куб. м.

Запись: 1) $4,5 \cdot 2,2 = 9,9$ (кв. м); 2) $19,8 : 9,9 = 2$ (м) не вызывает никаких недоразумений.

Большое значение при обучении решению текстовых задач имеет практика в решении учащимися значительного числа задач. Как правило, учитель должен на каждом уроке арифметики или решать с учащимися составную задачу, или задать такую задачу для решения на дом с тем, чтобы проверить выполнение задания на следующем уроке. Примерно, за учебный год в V классе должно быть решено не менее 200 составных задач (не примеров). Не меньшее значение при обучении решению задач имеет самостоятельная работа учащихся, требующая тщательного обдумывания содержания задачи, самостоятельности в рассуждении, в выборе рационального способа решения задачи, в проверке правильности полученного ответа. Но предварительной ступенью к самостоятельному решению задач учащимися является работа под руководством учителя над усвоением условия задачи, над анализом и составлением определенного плана решения задачи, над четкой последовательной записью решения и другими этапами работы. Все эти вопросы рассмотрены нами выше в 3, 4 и 5 параграфах.

При рассмотрении многих задач как в настоящей главе (в дальнейшем), так и в других главах (в частности, в IX и X) указываются различные приемы для решения одной и той же задачи. Учителю следует поощрять инициативу учащихся, желающих использовать иной прием решения задачи, чем тот, которым решается задача на доске. Следует самому предлагать учащимся тогда, когда это возможно, указать иной прием решения и всегда подчеркивать преимущества того или другого приема решения, как, например, меньшее число действий, упрощение вычислений или др.

§ 6. Классификация задач, решаемых в курсе арифметики

Некоторые критерии классификации: задачи чисто арифметические и алгебраические.

В методической литературе по арифметике имеется много попыток классифицировать задачи, решаемые в курсе арифметики при помощи четырех арифметических действий, с точки зрения их содержания, приемов решения и др. Так, все рассмотренные нами выше задачи, простые и составные, обычно называют задачами „чисто арифметическими“ в противоположность другой группе задач, так называемых „замысловатых“, обычно называемых задачами „алгебраическими“ в курсе арифметики или „типовыми“. Первым из русских методистов попытался дать классификацию задач А. И. Гольденберг, причем он называл чисто арифметическими задачами те, в „которых зависимость искомого числа от данных чисел настолько проста, что представляется возможным объединять как бы сразу или почти сразу те действия, выполнение которых необходимо и достаточно для определения искомого“. Задачами же „алгебраического“ характера он называл такие задачи, в которых зависимость между искомым числом и данными числами не настолько „прозрачна“.

Признак, указанный Гольденбергом, внося субъективную оценку „простоты“, „прозрачности“, не мог служить определенным критерием для классификации задач¹.

Трудность решения „алгебраической“ задачи арифметическими приемами часто заключается в том, что для решения ее приходится выполнять действия над числовыми значениями величин, не находящихся друг от друга в непосредственной зависимости, в противоположность тому, что имело место при решении разобранных выше так называемых чисто арифметических задач. При решении „алгебраиче-

¹ Некоторые классификации задач рассмотрены в „Методике арифметики“ Ф. И. Егорова; в „Очерках по методике арифметики“ Ф. А. Эрна; в „Методах решений арифметических задач“ И. И. Александрова.

ских" задач приходится прибегать к „предположениям" и „допущениям"; поэтому решение этих задач требует сообразительности от учащихся и нередко даже показа учителем определенного приема их решения (приема решения задач определенного „типа“).

Исходя из сказанного, характерным признаком задач „алгебраического" типа считают „прием решения при помощи предположения, заменяющего данную задачу другой задачей, легко решаемой обычными арифметическими приемами". Но и этот критерий не может быть безоговорочно положен в основу классификации задач, так как немало задач, которые могут быть решены и при помощи предположения, и без него.

Задача. Сезонный рабочий получал за рабочий день 29 руб. и в среднем расходовал в сутки на питание, квартиру 14 руб. 50 коп. За июль месяц у него осталось 333 руб. 50 коп. Сколько рабочих дней было у него в июле?

Решение с предположением.

1) $29 - 14,5 = 14,5$; 14 руб. 50 коп. оставалось у рабочего в конце каждого рабочего дня;

2) $14,5 \cdot 31 = 449,5$; 449 руб. 50 коп. осталось бы у рабочего за июль месяц в предположении, что все дни были рабочие;

3) $449,5 - 333,5 = 116$; в действительности у рабочего осталось за июль месяц на 116 руб. меньше, т. е.

4) $116 : 29 = 4$; 4 нерабочих дня было в июле;

5) $31 - 4 = 27$; 27 дней рабочих.

Решение без предположения.

1) $14,5 \cdot 31 = 449,5$; 449,5 руб. истрачено рабочим за июль месяц на питание, квартиру.

2) $449,5 + 333,5 = 783$; 783 руб. заработал рабочий за июль;

3) $783 : 29 = 27$; 27 раз содержится дневной заработок рабочего во всем его заработке; 27 рабочих дней.

Хотя, как показано, вышеприведенный критерий для характеристики задач, относящихся к задачам „алгебраического" характера, не может считаться бесспорным, но действительно он является одним из характерных признаков и в дальнейшем проводится нами.

**Распределе-
ние задач по
типам.** Приводя кратко некоторые попыт-
ки классификации задач, решаемых в
курсе арифметики, надо сказать и об
имеющемся во многих сборниках дореволюционного
времени распределении задач по „типам“¹, подобно
распределению задач по типам, имевшемуся в стар-
ринных руководствах. Распределение задач имело
целью ввести известную систему в обучение реше-
нию задач; это было, конечно, крайне желательно.
Но осуществление поставленной цели не всегда бы-
ло удачно. В старину авторы группировали задачи
по внешним признакам содержания, например, в
„Арифметике“ Магницкого был особый тип задач
„тройная торговля в товарных овощах с вывеской“
и т. п.² Критерии для распределения задач по ти-
пам в арифметических задачниках предреволюцион-
ного периода также крайне разнообразны, не выдер-
жаны; некоторые задачи объединяются в один тип
по своему содержанию или даже по отдельному
термину, встречающемуся в содержании; другие
объединяются приемом решения, общим для всех
задач данного типа; третьи—по тому и другому
признакам; для четвертых—сами авторы не могут
охарактеризовать общий признак и т. п.

Большим недостатком введения „типов“ задач в
преподавание арифметики было то, что учащийся
стремился при решении задачи определенного типа
вспомнить и использовать указанный ему прием,
вместо того чтобы сознательно ее решить, вникнув
в соотношение величин, рассматриваемых в задаче.

Далее мы указываем на неудачу иных попыток
классифицировать арифметические задачи. Но в пе-
дагогическом отношении последовательный подбор
задач по определенным признакам следует считать
полезным в задачнике для учителя и в методиче-
ском руководстве для него. Признаком распределе-
ния задач по типам в первую очередь должно

¹ „Сборник задач“ Ф. Борисова и В. Сатарова; „Новый зада-
чник“ Соколова и Сахарова; „Опыт систематизации употребитель-
нейших задач“ Терешкевича и др.

² О подборе задач в „Арифметике“ Магницкого рекомендуем
прочитать в „Истории методических идей по арифметике в России
XVIII в.“ Галанина, М., 1915.

быть последовательное усложнение тех зависимостей между данными и искомыми, которые рассматриваются в задаче, и в связи с этим различие приемов решения задач, методов их решения. Зная, какие приемы, методы решения затрудняют учащихся, учителю следует возвращаться к ним, подбирая соответствующие задачи для практики учащихся в их решении.

Классификация задач по типу соответствующего уравнения.

Выше мы указали на неудачу некоторых попыток установить отличие чисто арифметических задач от задач „алгебраического“ характера в курсе арифметики. Много иных попыток сделано для определения каждой из этих групп задач. Исходя из того, что каждую задачу можно решить уравнением, многие авторы классифицируют задачи по типу того уравнения, к решению которого сводится решение данной задачи.

С. И. Шохор-Троцкий дает такой критерий: чисто арифметическими называются задачи, при решении которых над искомым, обозначенным x , не производится согласно условию задачи какое-либо действие или производится только одно действие, в результате которого получается известное число. Прочие задачи относятся к задачам алгебраического характера. Но и критерий, даваемый Шохор-Троцким, не устанавливает классификации задач, так как способ составления уравнения для решения какой-либо задачи может быть различным в зависимости от хода рассуждений. Рассуждая одним способом, можно причислить одну и ту же задачу к чисто арифметическим, рассуждая другим способом—к алгебраическим¹.

В работе И. И. Александрова „Методы решений арифметических задач“ сделана первая попытка систематизировать задачи по методам их решения. Все задачи разбиваются им на 2 группы:

¹ Задача. Вычислить частное, если делимое равно 115, делитель 18 и остаток 7.

Решение I. $x = \frac{115 - 7}{18}$

Решение II. $x \cdot 18 + 7 = 115$

1) задачи, в которых прямо или косвенно указаны действия, какие надо совершить с данными числами, и 2) задачи, в которых над неизвестным числом совершен ряд определенных действий; результат этих действий известен, причем И. Александров не называет эти задачи „арифметическими“ и „алгебраическими“. Действительно, в этих терминах нет необходимости, но ими удобно пользоваться для краткости речи; если характеризовать уравнением, то задачи первой группы можно было бы обозначить $x = f(a, b, c, \dots, m)$, задачи второй группы $f(x, a, b, c, \dots) = 0$.

Классификация задач по числу действий. К чисто арифметическим задачам как в действиях с целыми числами, так и с обыкновенными и десятичными дробями мы относим:

1) Все простые задачи, решаемые одним из четырех действий:

$$x = a + b; \quad x = a - b; \quad x = a \cdot b; \quad x = \frac{a}{b}.$$

Простые обратные задачи (или сформулированные в косвенной форме) мы также называем чисто арифметическими:

$$x \pm a = b; \quad a \pm x = b; \quad x \cdot a = b; \quad \frac{x}{a} = b; \quad \frac{a}{x} = b.$$

К ним же относим задачи на нахождение дроби (части) числа и числа по известной величине его дроби (части) и отношения одного числа к другому.

2) К чисто арифметическим составным (сложным) задачам относим задачи в 2, 3 и т. д. действия вида:

$$x = a \pm b \pm c \text{ (решаемые сложением и вычитанием);}$$

$$x = a \cdot b \cdot c \text{ (решаемые умножением);}$$

решаемые тремя первыми действиями вида:

$$x = a \pm bc$$

$$x = ab + cd + e$$

$$x = (a \pm b)c$$

$$x = ab - (cd + ef)$$

$$x = (ab \pm cd)m$$

$$x = a - (b + c + d)m$$

$$x = (a \pm b) c \pm d$$

и т. д.

Задачи, решаемые делением совместно с другими действиями:

$$x = c : (a : b) \qquad x = (a : b) : (c : d)$$

$$x = a : \left(\frac{a}{b} + c \right) \qquad x = \frac{ab}{cd}$$

$$x = (a : b) \cdot c \qquad x = \frac{abc}{d}$$

$$x = \frac{ab}{c} \qquad x = \frac{abc}{def} \text{ и. т. п.}$$

В методической литературе по арифметике выдвигалось предложение систематизировать составные чисто арифметические задачи по „действиям и числу действий“. В большей или меньшей степени эта мысль проводится в каждом задачнике и в некоторой степени характеризует постепенность в нарастании трудности при решении задач; но все же трудность решения задачи в очень малой степени определяется числом действий, которыми она решается, или той формулой, к которой приводится ее решение. Так, на разбор задачи, решаемой двумя действиями, из которых оба деления $[a : (b : c)]$ или одно (первое) умножение, второе — деление $(a \cdot b : c)$, учащиеся, проверенные нами, затратили вдвое больше времени, чем на решение задачи в 4 или 5 действий, из которых 3 — умножения и 1 — сложение трех слагаемых (вида $ab + cb + ef$). Задачи, решаемые по одной формуле, одним числом действий, также далеко не всегда бывают одинаковой трудности; например, в случае, когда задачи решаются по формулам $a : (b : c)$ или $a : b : c$, — первая задача труднее второй; в каждой из этих формул в случае, когда оба деления отвечают на вопрос: „сколько раз одно число содержится в другом?“, задача значительно труднее, чем в случае, когда эти действия применяются для деления числа на равные части, и т. п.

Трудность задачи зависит от понимания учащимся зависимости между величинами, входящими в задачу, от реальности для них содержания задачи (фабулы), от характера задачи (будет ли это задача отвлеченная, задача бытовая, задача с геометрическим или другим содержанием):

Классификация задач по содержанию.

Содержание задач также не может быть основным критерием классификации; как задачи „чисто арифметические“, так и задачи „алгебраические“ в курсе арифметики“ могут иметь своим содержанием одну и ту же фабулу: движение тел, выполнение определенной работы, оплату покупки и т. д. В самом деле, рассмотрим 3 задачи:

Задача 1. Составлена смесь из двух сортов конфет; 1 кг конфет стоит 13 руб. Узнать, сколько стоит 1 кг конфет другого сорта, если известно, что купили по 9 кг конфет того и другого сорта и за всю покупку заплатили 243 руб.

Задача 2. Из двух мест, расстояние между которыми 243 км, выехали одновременно навстречу друг другу 2 велосипедиста, из которых один проезжал в среднем по 13 км в час. По сколько километров в час делал другой, если известно, что они встретились через 9 час. после выезда?

Задача 3. Двое рабочих изготовили за 9 час. работы 243 детали. Один из них изготовлял в час 13 деталей. Сколько деталей изготовлял в час другой рабочий?

Числовая формула решения всех этих задач:

$$\frac{243-13 \cdot 9}{9} = 14; 14 \text{ км}; 14 \text{ руб.}; 14 \text{ деталей.}$$

Для решения любой из этих задач требуется выполнить одни и те же 3 действия в одной и той же последовательности. Ясно, что нет основания для классификации этих задач по содержанию; основным является прием, метод решения. Но при обучении решению задач, в частности, при выяснении какого-либо метода решения, полезно рассматривать задачи различного содержания, тогда учащиеся глубже поймут и лучше усвоят самый метод их решения.

Замечание. Хотя, как сказано выше, число действий при решении задач не может служить критерием классификации задач, но усложнение составных задач в V классе по сравнению с задачами, решаемыми в начальной школе, нередко приводит к увеличению числа действий и соответственно к увеличению трудности их решения. Например:

Задача 1. Из двух мест, расстояние между которыми 576 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда, из которых один проезжал 60 км в час и через 6 час. после выхода он встретил на промежуточной станции также пришедший в это время другой поезд, который был в пути 3 часа. Сколько километров в час делал второй поезд?

Задача 2. Из двух мест, расстояние между которыми 576 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда, из которых один проезжал по 210 км за каждые $3\frac{1}{2}$ часа и через 6 час. после выхода, в 20 час. 55 мин., он встретил на промежуточной станции также пришедший в это время другой поезд, который вышел в $17\frac{11}{12}$ часа. Сколько километров в час делал второй поезд?

При решении этой задачи по сравнению с решением задачи 1 приходится дополнительно выполнить

следующие действия: $210 : 3\frac{1}{2} = 60$ (км);

$20 \text{ час.} 55 \text{ мин.} = 20\frac{11}{12}$ часа; $20\frac{11}{12} - 17\frac{11}{12} = 3$ (часа). Если

бы в задаче 2 вместо данного числа (6) часов, было указано время выхода первого поезда, то для решения задачи пришлось бы выполнить еще одно действие; то же если бы было указано, что время движения первого поезда в k раз больше времени движения второго поезда, или на k часов больше, или составляет $k\%$ от времени движения второго поезда.

В этих случаях, т. е. при решении задач аналогичного содержания, степень трудности решения их определяется числом действий.

Учитель может усложнить задачу, имеющуюся в задачнике, дополнительными условиями, и наоборот, если ученика затрудняет решение задачи, предложенной в задачнике, учитель может, вычислив некоторые промежуточные результаты, предложить ученику для решения сначала упрощенную задачу, затем перейти к решению задачи из задачника.

Устные упражнения. Большое значение при обучении решению задач имеет также устное решение задач. Приступая к решению задачи методом новым для учащихся, целесообразно показать решение аналогичной задачи на одно-или двузначных числах, которые легко запоминаются и позволяют учащимся все внимание сосредоточить на содержании задачи. Эти подготовительные задачи решаются устно.

В тех случаях, когда решение задачи затрудняет учащихся, полезно развивать у них навык самим устанавливать аналогию между этой задачей и более легкой, решение которой им известно, тем самым отыскивать затруднявшее их решение задачи.

§ 7. Методы решения задач

Метод приведения к единице. При решении „чисто арифметических“ задач очень часто приходится иметь дело с величинами, находящимися в прямо и обратно пропорциональной зависимости. Эти задачи в дальнейшем курсе арифметики (после изучения вопроса о пропорциональности величин и составления пропорций) учащиеся будут решать по указанному правилу, как задачи на „простое“ и „сложное тройное правило“. При изучении умножения и деления целых чисел и дробных они решают эти же задачи по соображению, методом, общим для всех задач этого рода, который называется методом „приведения к единице“ (при прямой пропорциональности рассматриваемых величин сначала выполняется деление, потом умножение; при обратной пропорциональности—наоборот).

Задачи. 1) На токарном станке за 7 час. нарезано 56 болтов. Сколько болтов нарежут на том же станке за 12 час.?

Решение. $\left(\frac{56}{7} \cdot 12\right)$ болтов = 96 болтов.

2) Для отопления дома приготовлено топливо на 80 дней при норме расхода в 525 кг на 1 день. На сколько дней хватит того же топлива при ежедневном расходе в 700 кг?

Решение. $\frac{525 \cdot 80}{700}$ (дней), или $\frac{3}{4} \cdot 80 = 60$ (дней).

Запись по действиям:

1) На сколько дней хватит того же запаса топлива, если ежедневно будут тратить 1 кг?

$$525 \cdot 80 = 42000 \text{ (дней).}$$

2) На сколько дней хватит того же запаса топлива, если ежедневно будут тратить 700 кг?

$$42000 : 700 = 60 \text{ (дней).}$$

Подробно о решении указываемых задач и затруднениях учащихся при объяснении см. гл. XIII „Пропорции. Пропорциональные величины“.

Метод отношений.

При изучении действий с дробными числами те же задачи могут быть решены „методом отношений“.

Решение. 1) Время работы на токарном станке увеличилось в отношении $\frac{12}{7}$. Соответственно (в этом же отношении) изменится (увеличится) число нарезанных болтов.

Ответ. $(56 \cdot \frac{12}{7})$ болтов; 96 болтов.

2) Ежедневный расход топлива изменился (увеличился) в отношении $\frac{700}{525}$, или $\frac{4}{3}$. Число дней соответственно уменьшится (обратная пропорциональность).

Ответ. $(80 \cdot \frac{3}{4})$ дней, или $(80 : \frac{4}{3})$ дней.

В последнем случае задача (с обратно пропорциональными величинами) решается двумя действиями деления.

„Метод отношений“ целесообразно применить тогда, когда метод „приведения к единице“ не удобен в промежуточных рассуждениях (см. гл. XIII, § 4 „Задачи на тройное правило“).

Метод введения условной единицы.

1. Методом „введения условной единицы“ решаются многие задачи с целыми и дробными числами. Далее нами приводятся группы так называемых „типовых“ задач, при решении которых этот метод имеет большое применение, в частности при решении задач, в которых рассматривается кратное

отношение искомым. **Задача.** Число $14\frac{1}{4}$ представляет собой сумму четырех слагаемых. I слагаемое в $2\frac{1}{2}$ раза больше II, а II на $1\frac{3}{4}$ меньше III; IV слагаемое составляет $\frac{1}{5}$ от I. Найти эти слагаемые.

Запись условия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \right\} 14\frac{1}{4} \quad \left| \begin{array}{l} \text{в } 2\frac{1}{2} \text{ раза больше II} \\ \text{на } 1\frac{3}{4} \text{ меньше III} \\ \text{составляет } \frac{1}{5} \text{ I} \end{array} \right.$$

Решение. Из записи условия видно, что удобно принять III слагаемое за 1 (единицу) (или за одну часть). Если II слагаемое считать равным III (единице), то сумма всех четырех слагаемых составит:

$14\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} = 16$, I слагаемое составит $2\frac{1}{2}$ части (единицы), а IV — $\frac{1}{2}$ единицы. III слагаемое равно:

$$\frac{16}{2\frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2}} = 3\frac{1}{5}; \quad \text{II} = 1\frac{9}{20};$$

I—8; IV — $1\frac{3}{5}$. Проверить.

Этим методом решаются также задачи на „совместную работу“ или задачи „на бассейны“. Эти задачи имеют историческое значение, и в задачаниках дореволюционного периода они занимали видное место.

Задача Лакруа (известного французского автора целого ряда пользовавшихся большой популярностью учебных руководств по элементарной математике): „Один фонтан наполняет бассейн в

$2\frac{1}{2}$ часа, другой — в $3\frac{3}{4}$ часа. Во сколько времени оба фонтана,

действуя вместе, наполнят бассейн?“

Ответ. $1\frac{1}{2}$ часа¹.

Греческая задача:

„Я бронзовый лев; две струи вытекают из моих глаз, одна из моего рта и еще одна из ноги. Мой правый глаз наполняет бассейн в два дня; мой левый глаз—в три дня, а моя нога—в четыре дня; шести дней достаточно, чтобы наполнить его из моего рта. Если сразу потекут все струи из глаз, и из ноги, и из рта, во сколько часов наполнится бассейн?“

Аналогичные задачи помещены в задачнике арифметики армянского математика VII века Анании из Ширака.

Метод, которым решаются эти задачи в курсе арифметики,—„введение условной единицы“, имеет большое образовательное значение и служит подготовкой к решению соответствующих задач методом составления уравнений.

Задача 1. Из двух мест, расстояние между которыми 105 км, выехали одновременно навстречу друг другу 2 велосипедиста. Один проезжает весь путь за 8 час., а другой за 7 час. Спрашивается, через сколько часов после выезда они встретятся?

Задача 2. Из двух мест выехали одновременно 2 велосипедиста навстречу друг другу. Один велосипедист может проехать весь путь за 8 час., а другой—за 7 час. Спрашивается, через сколько часов после выезда они встретятся в пути?

П л а н и р е ш е н и е.

1) Сколько километров проезжал в 1 час первый велосипедист?

$$105 : 8 = 13\frac{1}{8} \text{ (км)}$$

2) Сколько километров проезжал в 1 час второй велосипедист?

$$105 : 7 = 15 \text{ (км)}.$$

1) Какую часть пути проезжал в 1 час первый велосипедист?

$$\frac{1}{8} \text{ часть.}$$

2)...

$$\frac{1}{7} \text{ часть.}$$

¹ Г. Н. Попов, Сборник исторических задач, задача 437.

3) На сколько километров приближаются велосипедисты один к другому за 1 час?

$$15 + 13 \frac{1}{8} = 28 \frac{1}{8} \text{ (км.)}$$

4) Через сколько часов встретятся велосипедисты?

$$105 : 28 \frac{1}{8} = \frac{105 \cdot 8}{224} = \frac{56}{16} = 3 \frac{11}{15} \text{ (час.)}$$

3) На какую часть всего пути приблизились велосипедисты один к другому за 1 час?

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{15}{56} \text{ (части)}$$

4) Через сколько часов они встретились?

$$1 : \frac{15}{56} = \frac{56}{15} = 3 \frac{11}{15} \text{ (часа)}$$

О т в е т один и тот же: через 3 часа 44 мин. после выезда.

Задача 3. 960 книг надо переплести за кратчайший срок. Одна переплетная мастерская берется выполнить эту работу за 16 дней, другая за 24 дня и третья за 48 дней. Работа была распределена между тремя мастерскими. В какой срок была выполнена вся работа?

Задача 4. Заказ на переплет книг одна мастерская берется выполнить за 16 дней, другая за 24 дня, а третья за 48 дней. Заказ был распределен между тремя мастерскими. В какой кратчайший срок была выполнена вся работа?

Р е ш е н и е.

$$\frac{960}{960 : 16 + 960 : 24 + 960 : 48} = \frac{960}{60 + 40 + 20} = \frac{960}{120} = 8 \text{ (дней)}$$

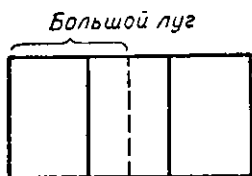
$$\frac{1}{\frac{1}{16} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}} = \frac{1}{\frac{6}{48} + \frac{2}{48} + \frac{1}{48}} = \frac{1}{\frac{9}{48}} = 8 \text{ (дней)}$$

Сравнивая условия задач 1 и 2, 3 и 4, надо обратить внимание учеников на то, что в задачах 1 и 3 даны размеры всего пути или всего заказа (105 км, 960 книг), в задачах 2 и 4 эти числа не даны—величина пути, размер работы приняты за 1. Формулировка вопросов в задачах 2 и 4 иная, чем в задачах 1 и 3. Числа 105 и 960 являются лишними данными; они нужны при решении задач в целых числах.

(Для внеклассной работы.) Задача о косцах. (Задача Л. Н. Толстого в несколько видоизмененной редакции.) „Косцы нанялись выкосить 2 луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина косцов осталась на первом лугу и к вечеру его докосила, а другая половина косцов перешла косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшаяся часть работы выполнил один косец?“

Решение.

I способ. Работу всех косцов за 1 день примем условно за 1; тогда в первый день на большой луг затрачено $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



Малый луг

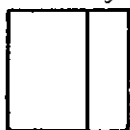


Рис. 38.

единицы, а на меньший луг затрачено в первый день только $\frac{1}{4}$ единицы (всей работы всех косцов); надо же затратить для того, чтобы скосить весь меньший луг, $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$ единицы, т. е. на второй день осталось сделать $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ часть всей работы всех косцов за день, — ее выполнил один косец.

Всего было $1 : \frac{1}{8} = 8$; 8 косцов.

II способ. Можно работу $\frac{1}{2}$ косцов за $\frac{1}{2}$ дня принять за 1 и т. д.

Решение с иллюстрацией (рис. 38). Указание. В первый день сделаны 3 части (единицы) работы на большом лугу и одна часть на малом, всего 4 части. Во второй день одним косцом за день сделано лишь $\frac{1}{2}$ части (такой же); значит, 4 части работы были выполнены $4 : \frac{1}{2} = 8$ косцами.

Среднее арифметическое. При решении арифметических задач встречается термин „среднее арифметическое“ двух или нескольких чисел, при этом учащиеся знакомятся с понятиями средней скорости, средней цены, среднего времени и др. и учатся вычислять „средние величины“; это не вызывает затруднений у учащихся. Труднее обратная задача, когда известны среднее арифметическое двух чисел и одно из них (или их разность, или отношение), а надо найти эти числа.

Задача. Среднее арифметическое двух чисел равно 130; одно из чисел 150. Найти другое (устно). Учащиеся устанавливают, что среднее арифметическое двух чисел, т. е. полусумма двух чисел 130, значит, сумма этих чисел 260. Одно число 150, значит, другое 110.

Проверка. $\frac{150+110}{2} = 130.$

К этой же группе задач относятся задачи на смешение (I рода). Например, задача: „Смешали $12\frac{1}{2}$ кг конфет по $6\frac{2}{5}$ руб. за 1 кг; $13\frac{1}{2}$ кг по $14\frac{3}{4}$ руб. за 1 кг и $1\frac{2}{5}$ кг—по $9\frac{1}{2}$ руб. за 1 кг. Сколько в среднем стоил 1 кг смеси?“ (Ответ дать с точностью до 1 коп.)

Числовая формула решения задачи:

$$\frac{6\frac{2}{5} \cdot 12\frac{1}{2} + 14\frac{3}{4} \cdot 13\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} \cdot 1\frac{2}{5}}{12\frac{1}{2} + 13\frac{1}{2} + 1\frac{2}{5}} \approx 10,67;$$

10 руб. 67 коп.

При решении этой задачи находим „среднее арифметическое“; обычно его называют „взвешенным“ (сложным), так как находится не просто среднее арифметическое цен, а среднее арифметическое цен, взятых по нескольку раз. Пусть произвели измерение, причем m раз результат измерения дал число a ; n раз получилось число b и p раз—число c ; тогда средневзвешенным будет

$$\frac{a \cdot m + b \cdot n + c \cdot p}{m + n + p}.$$

Задачи „алгебраические“ в курсе арифметики.

Некоторые методисты считали и считают, что „типовым“ задачам („замысловатым“, решаемым особыми приемами) не место в курсе арифметики, что они должны рассматриваться в курсе алгебры и решаться составлением уравнения. Не следует, конечно, злоупотреблять в школьной практике числом таких задач и решением труднейших из них, но образовательное значение этих так называемых „алгебраических задач“ в курсе арифметики значительно: они служат развитию находчивости, сообразительности учащихся, они требуют

для своего решения вдумчивости в работе, тщательного проникновения в условие задачи, в имеющуюся зависимость между величинами.

В частности, в V классе как простые, так и составные чисто арифметические задачи должны уже быть известны учащимся из курса начальной школы, и в V классе после повторения и дополнительной практики в решении этих задач полезно решать задачи „алгебраического характера“.

Разнообразие этих последних так же, как и чисто арифметических задач, очень велико.

ГРУППА ЗАДАЧ

Восстановление числа

А. Целые числа

Метод
обратных¹
действий.

Выше уже указаны простейшие из задач „алгебраического характера“, основанные на зависимости между данными и искомыми обратных действий. К простейшим же задачам следует отнести задачи-загадки, которые иногда даются в отвлеченной форме (более простой), иногда в виде задачи с текстом.

Пример. Надо найти число, если известно, что после прибавления к нему, вычитания из него, умножения и деления его на известные числа в результате получится также известное число:

$$(x + a \pm b = c, \text{ или } x \cdot a \pm b = c; \text{ или } \frac{x}{a} \pm b = c, \text{ или } a \pm bx = c \text{ и т. п.}^2)$$

Задача 1. Если от утроенного задуманного числа отнять 54, то получится 279. Какое число задумано?

Не следует решать или записывать эту задачу уравнением $x \cdot 3 - 54 = 279$. Исключительно на основе

¹ „Обратный“ тем, при помощи которых получен результат, указанный в условии задачи.

² В алгебраическом своем решении приводящиеся к одному уравнению первой степени с одним неизвестным.

„здравого смысла“ должны учащиеся V класса вычислить неизвестное число. Они должны четко себе представить, что после того, как от утроенного искомого числа отнимут 549, получится 279; если бы (предположение) не отняли 54, то было бы $279 + 54 = 333$. Это и есть утроенное задуманное число, значит, задумано (искомое число) $333 : 3 = 111$. Таким образом, „открыто“, „выделенно“ неизвестное число „методом обратности“, „инверсий“.

Обязательно проверить полученный ответ:
 $3 \cdot 111 - 54 = 279$.

Такие задачи-загадки с целыми числами учитель может составлять сам, предлагая одним учащимся задумать число, прибавить к нему число, отнять от него, помножить его и т. д. и сказать полученное в результате число, а другим учащимся — узнать число, задуманное их товарищем. При этом методе „восстановления числа“ применяется „обратный порядок действий“.

Замечание. Иногда даются такого же характера задачи-загадки с тем лишь отличием, что после выполнения некоторых действий над неизвестным числом получается результат, также содержащий неизвестное число (например, $3x + 5 = 4x$ и т. п.).

Б. Дробные числа

Тем же методом „восстановления числа“ решаются задачи, аналогичные рассмотренным, в разделах „Обыкновенные дроби“ и „Десятичные дроби“. Если учащиеся хорошо разбираются в решении этих задач с целыми числами, то при решении задач того же типа с дробными числами перед ними будет лишь одна трудность: в выполнении действий с дробными числами; в частности, в нахождении числа по известной его части (по дроби), рассмотренной в соответствующей главе о дробях и в решении задач, к ней сводящихся, усложненных.

Это „сведение“ решаемой задачи к основной должно быть тщательно разобрано с учащимися.

Задача 2. Если к неизвестному числу прибавить $\frac{3}{4}$ его да еще 40, то получится 180. Найти не-

известное число. Причем решение этой задачи уясняется учащимися на основании рассмотренного выше приема для целых чисел, а именно: допускают, что не прибавлено 40, тогда, откидывая 40 от 180, устанавливают, что 140 составляет $\frac{7}{4}$ искомого числа, и искомое число 80. Проверка: $80 + 80 \cdot \frac{3}{4} + 40 = 180$.

Несколько труднее задача 3. Если от $\frac{5}{12}$ известного числа вычтем 99, то получим $\frac{3}{16}$ того же неизвестного числа. Найти это число. Выразив в одинаковых долях: $\frac{5}{12} = \frac{20}{48}$ и $\frac{3}{16} = \frac{9}{48}$, можно сказать, что $\frac{11}{48} x = 99$, откуда $x = 9 \cdot 48 = 432$.

Проверка. $\frac{5}{12}$ от 432 составляют 180; $\frac{3}{16}$ от 432 составляют 81; $180 - 99 = 81$.

Исторические задачи из индусского трактата „Сущность искусства счисления“.

1) „Требуется найти число, которое, будучи умножено само на себя, сложено с двумя, затем удвоено, вновь сложено с тремя, разделено на 5, наконец, умножено на 10, в результате дает 50“.

2) Найти число, которое, будучи увеличено двумя третями самого себя и единицей, даст 10.

Рассмотренный метод инверсии—„решения задач с конца условия“—учит учащихся последовательно, логически рассуждать; он охотно ими применяется в различных случаях. Например, задача-шутка, известная в различных вариантах: „Три брата попросили хозяйку приготовить на ужин картофель. Пока хозяйка варила картофель, все они заснули; сначала проснулся старший брат и, увидев на столе картофель, съел свою долю и опять заснул; через некоторое время проснулся второй и, не зная, что старший брат уже ел картофель, тоже съел свою долю и заснул; наконец, проснулся младший и сделал то же, что и старшие братья. Когда старший брат опять проснулся, то разбудил своих братьев, и тогда все объяснилось; оставшиеся 24 картофелины поделили между собой средний и младший братья. Сколько штук картофеля подала хозяйка?“

Решение. 1 способ. После того, как старший брат съел

$\frac{1}{3}$ картофеля, остались $\frac{2}{3}$; после того, как средний брат съел $\frac{1}{3}$

остатка, осталось $\frac{2}{3}$ от $\frac{2}{3}$, т. е. $\frac{4}{9}$ всего картофеля: после младшего брата осталось $\frac{2}{3}$ от $\frac{4}{9}$, т. е. $\frac{8}{27}$ всего сваренного картофеля; $\frac{8}{27} x = 24$ картофелины, откуда искомое число равно 81.

II способ („с конца“). 24 картофелины составляют $\frac{2}{3}$ того числа их, которое осталось после среднего брата, т. е. средний брат оставил 36 картофелин; аналогично узнаем, что старший оставил 54 картофелины после того, как съел $\frac{1}{3}$ всего сваренного количества. Всего было 81 картофелина.

Рассматриваемые нами в курсе арифметики задачи „алгебраического характера“ при решении их в курсе алгебры приводят к составлению уравнений 1-й степени. Выше рассмотрены задачи, решаемые в курсе алгебры одним уравнением с одним неизвестным. В дальнейшем рассмотрим задачи, которые легче решить в курсе алгебры составлением системы двух (или более) уравнений. Рассмотрение начнем с некоторых частных случаев. Метод решения заключается в исключении одного из двух неизвестных (или других неизвестных, кроме одного) путем выражения его через другое неизвестное (замены другим неизвестным). Анализ вытекающих отсюда следствий определяет решение задачи. Иногда все неизвестные выражаются через вспомогательное неизвестное.

II ГРУППА ЗАДАЧ

Нахождение двух чисел по данной их сумме и разности

А. Целые числа

Метод разностного сравнения чисел.

$$\begin{aligned}x + y &= a \\x - y &= b\end{aligned}$$

Задача 1. Кусок полотна в 104 м надо разрезать на 2 такие части, чтобы в первой было на 16 м больше, чем во второй. По сколько метров полотна будет в каждой части?

Указание. Эти задачи решаются путем „предположения“, „допущения“, что числа уравниваются,

и при этом условии узнается их сумма, которая потом и делится на столько равных частей, сколько искомым.

I способ. Если бы первая (большая) часть куска полотна по длине была бы такая же, как вторая (т. е. была бы на 16 м меньше, чем в действительности), то вся длина куска была бы на 16 м меньше: 1) $104 - 16 = 88$, т. е. длина куска полотна при сделанном предположении равнялась бы 88 м; 88 м следует разделить на 2 равные части, для того чтобы узнать длину меньшей части: 2) $88 : 2 = 44$; 44 м в меньшей части.

3) $44 + 16 = 60$; 60 м в большей части куска полотна.

II способ. Если бы вторая (меньшая) часть куска полотна по длине была бы такая же, как первая (т. е. была бы на 16 м больше, чем в действительности), то вся длина куска была бы на 16 м больше: 1) $104 + 16 = 120$; 120 м составила бы длина всего куска полотна.

2) $120 : 2 = 60$; 60 м в большей части;

3) $60 - 16 = 44$; 44 м в меньшей части куска.

Иллюстрации к I способу:

ко II способу:

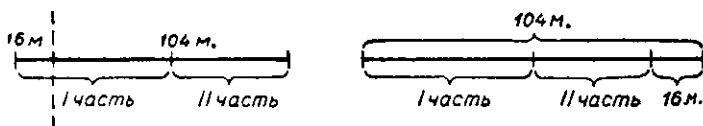


Рис. 39.

Замечание. 1) Надо обратить внимание учащихся на то, что в первом случае сначала находится меньшая часть, а во втором случае — большая. Почему?

2) При решении первых задач нового типа выбирают задачи с небольшими числовыми данными с тем, чтобы записи и вычисления не затемняли сущности решения задачи. Желательны сначала устные решения и с записями только результатов действий.

3) Оба способа арифметического решения рассматриваемого типа задач диктуются алгебраическим их решением:

$$\begin{aligned}x + y &= a \\x - y &= b \\ \hline 2x &= a + b; \quad x = \frac{a + b}{2} \\ 2y &= a - b; \quad y = \frac{a - b}{2}.\end{aligned}$$

4) Обычно при решении задач учащиеся затрудняются в формулировке первого вопроса. Наличие двух способов решения подчеркивает необходимость полной формулировки вопроса: „Какой длины был бы кусок полотна, если бы первая (вторая) часть была такой же длины, как вторая (первая)?“

Иногда вопрос формулируется так: „Узнать длину удвоенной меньшей (большей) части“. После анализа задачи можно дать и такую формулировку вопроса.

5) Как всегда, решение задачи должно заканчиваться проверкой правильности полученного ответа, в данном случае: $60 + 44 = 104$ (м); $60 - 44 = 16$ (м).

6) Задачи рассматриваемого типа учащиеся решают и в начальной школе. Но все же нередки случаи, когда после прочтения условия вышеразобранной задачи кто-либо из учащихся предлагает сначала 104 разделить на 2, а другие сейчас же прерывают его словами: „неверно“. Учителю следует использовать этот факт и указать учащимся III способ решения той же задачи (см. ниже).

Предварительные упражнения. Задача 2. В двух ящиках 128 кг чая. Если из первого переложить во второй 4 кг, то в обоих ящиках будет чая поровну. Сколько чая в каждом ящике?

Вопрос. На сколько килограммов чая в первом ящике больше, чем во втором?

Ответ. На 8 кг. Почему?

После выяснения этого вопроса учащиеся могут решить задачу двумя способами, указанными выше.

$$\begin{array}{ll}128 - 8 = 120 \text{ (кг)} & \text{или } 128 + 8 = 136 \text{ (кг)} \\ 120 : 2 = 60 \text{ (кг)} & 136 : 2 = 68 \text{ (кг)} \\ 60 + 8 = 68 \text{ (кг)} & 68 - 8 = 60 \text{ (кг)}\end{array}$$

Проверка. $60 + 68 = 128$ (кг); $68 - 4 = 60 + 4$.

Устные упражнения. 1) В одном ящике чая больше, чем в другом, на 10 кг. Сколько килограмм-

мов чаю надо переложить из одного ящика в другой, чтобы в обоих ящиках стало чая поровну? Ответ. 5 кг.

2) Имеются два числа: 100 и 60. Сколько единиц надо отнять от большего числа с тем, чтобы, прибавив их к меньшему, получить равные числа? Ответ. Половину 40, т. е. 20.

Проверка. $100 - 20 = 80$ и $60 + 20 = 80$.

3) Двое имели 240 руб. Когда один дал другому 30 руб., то у них денег стало поровну. Сколько денег было у каждого?

Когда у них денег стало поровну, то у каждого было по 120 руб. ($240 : 2 = 120$). Но при этом один дал другому 30 руб., значит, у одного было $120 - 30 = 90$ (руб.), у другого $120 + 30 = 150$ (руб.).

Проверка: $90 + 150 = 240$; 240 руб.; $90 + 30 = 120$.

Вопрос. На сколько рублей у одного было больше, чем у другого?

Ответ. На 60 руб. (дважды 30).

4) На сколько единиц одно число больше другого, если известно, что, отняв от одного из них 20 и прибавив их к другому, мы получим равные числа? Ответ. На 40 (дважды 20). Проверить на числах.

III способ. После вышеприведенных и аналогичных упражнений вполне понятен будет третий способ решения задачи 1:

1) $104 : 2 = 52$ (м)

3) $52 + 8 = 60$ (м)

2) $16 : 2 = 8$ (м)

4) $52 - 8 = 44$ (м)

Проверка. $60 + 44 = 104$ (м); $60 - 44 = 16$.

Случай трех чисел.

Задача 3. Разделить 1800 на такие три части, чтобы первая была на 400, а вторая на 200 больше третьей.

	Ответ
Запись условия: I на 400 больше III	800
II на 200 больше III	600
III	400
	<hr/>
	1800

I способ. Если бы все три числа были равны наименьшему числу (третьему), то сумма их составляла

бы $1800 - 400 - 200 = 1200$; значит, наименьшее число $1200 : 3 = 400$ и т. д.

II способ. Если бы все 3 числа были равны наибольшему числу (первому), то сумма их была бы $1800 + 400 + 200 = 2400$, тогда наибольшее число $2400 : 3 = 800$ и т. д.

III способ. Если бы все 3 числа были равны второму числу, то сумма их составила бы $1800 - 200 + 200 = 1800$ и второе число $1800 : 3 = 600$.

Задача 4. Три куска гранита весят вместе 156 кг. Первый кусок на 18 кг тяжелее второго, а второй на 15 кг легче третьего. Сколько весит каждый кусок гранита?

I на 18 кг тяжелее II	}	156 кг
II на 15 кг легче III		

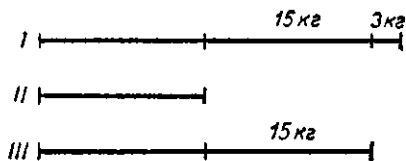


Рис. 40а.

I способ. Если допустить, что вес каждого куска гранита равен весу II куска, то вес всех трех кусков составит 123 кг, потому что

I на 18 кг тяжелее II	}	Решение.
II		
III на 15 кг тяжелее II (см. рис. 40а).		

$$156 - 18 - 15 = 123 \text{ (кг)}$$

$$123 : 3 = 41 \text{ кг (рис. 40б)}$$

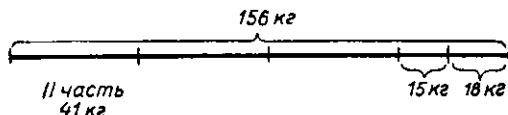


Рис. 40б.

Проверка.	Вес	II куска	41 кг
		III "	56 "
		I "	59 "
			156 кг

II способ. Если допустить, что вес каждого куска гранита равен весу III куска, то вес всех трех кусков составит 168 кг.

I на 3 кг тяжелее III, потому что II на 15 легче III (см. рис. 40в)

Решение.
 $156 + 15 - 3 = 168$ (кг)
 $168 : 3 = 56$ (кг); это вес III куска и т. д.

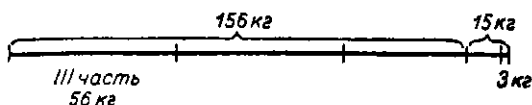


Рис. 40в.

Можно решить задачу, допустив также, что вес каждого куска гранита равен весу I куска; тогда общий вес всех трех кусков составил бы $156 + 3 + 18 = 177$ (кг), а вес I куска $177 : 3 = 59$ (кг) (см. рисунок 40 г).

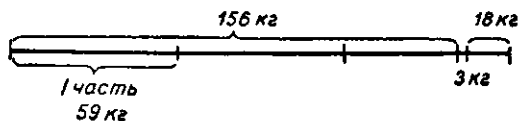


Рис. 40г.

Усложненные задачи.

Часто задачи рассматриваемого типа усложняются: 1) требованием найти 3, 4 и более числа, 2) большими числовыми данными, 3) дополнительными условиями (задачи 5, 6), 4) отвлеченной формулировкой (в математических терминах) (задачи 7, 8).

Задача 5. С двух участков общей площадью в 357 га собрали урожай картофеля в среднем по 20 т 8 ц с 1 га. Узнать площадь каждого участка, если известно, что с одного участка собрали на 21008 ц больше, чем с другого.

Предварительно надо узнать урожай, полученный с двух участков: $20 \text{ т } 8 \text{ ц} = 208 \text{ ц}$; $208 \cdot 357 = 74256$ (ц); затем делить его на 2 части, из которых одна больше другой на 21008 ц.

Задача 6. Двое имели вместе 86 руб. После того как первый дал второму 10 руб., у него оста-

лось на 12 руб. больше, чем оказалось у второго после получения 10 руб. Сколько денег было первоначально у каждого?

Предварительно надо узнать, на сколько рублей у I было больше, чем у II. Если бы после передачи 10 руб. первого второму у обоих оказалось бы денег поровну, то это означало бы, что у I было на 20 руб. ($10 \cdot 2 = 20$) больше, чем у II, но в действительности после передачи денег у I оказалось еще 12 руб. лишних; значит, до передачи у него было больше, чем у II, на 32 руб. ($20 + 12 = 32$). Значит, 86 руб. надо разделить на 2 части, из которых одна больше другой на 32 руб.

Задача 7. Сумма двух чисел равна 890, а разность этих чисел равна 100. Найти оба числа.

Текст этой задачи аналогичен тексту рассмотренных выше задач, но читается в математических терминах: „сумма, разность, частное“ и т. п. Это является новой трудностью для учащихся; такие упражнения помогают учащемуся освоить математические термины. Приступая к решению задачи, следует установить, что показывают сумма и разность двух чисел, и если нужно, рассказать условие задачи своими словами, например: „Два искомого числа вместе (сумма их) составляют 890, а одно из них более другого (разность между ними) на 100. Найти эти числа“.

Б. Дробные числа

Задача 8. Если к задуманному мною числу прибавить некоторое число, то получится 15, а если от того же задуманного мною числа отнять то же второе число, то получится $1\frac{3}{4}$. Какое число мною задумано и какое число предполагалось прибавить в первом случае и отнять во втором?

При решении этой задачи (в противоположность решению задачи 7) предварительно надо установить, что сумма двух искомого чисел есть 15, а их разность $1\frac{3}{4}$.

Решение. 1) $15 - 1\frac{3}{4} = 13\frac{1}{4}$

2) $13\frac{1}{4} : 2 = 6\frac{5}{8}$

3) $6\frac{5}{8} + 1\frac{3}{4} = 8\frac{3}{8}$

Ответ. $6\frac{5}{8}$ и $8\frac{3}{8}$.

Проверка. Сумма

$$6\frac{5}{8} + 8\frac{3}{8} = 15;$$

разность $8\frac{3}{8} - 6\frac{5}{8} = 1\frac{3}{4}$.

III ГРУППА ЗАДАЧ

Нахождение двух (или более) чисел по данной их сумме и отношению (кратному)

А. Целые числа

Метод введения условной единицы (пропорциональное деление).

$$x + y = a$$

$$\frac{x}{y} = b$$

Эти задачи обычно называются задачами „на пропорциональное деление“. Они подробно рассматриваются в VI классе в теме „Пропорциональное деление“, где дается форма записи их решения. Там учащиеся изучают вопрос о пропорциональности величин и знакомятся с соответствующими терминами.

Изучая действия с целыми числами и дробными в начальной школе и в V классе, учащиеся решают эти задачи „методом пропорционального деления“, не оперируя термином „пропорционально“ и не придерживаясь какой-либо установленной формы рассуждений или записи. Последнее придает этим задачам большое значение в деле развития сообразительности и умения рассуждать.

Задача 1. Разделить 2568 на две такие части, чтобы одна была в пять раз больше другой.

Вопросы. Как предлагается разделить число 2568? На сколько равных частей надо разделить число 2568? Четко выясняется сделанное „допущение“, что меньшая часть числа состоит из одной частицы.

Б. Дробные числа

Задача 2. В двух колхозах 270 лошадей; в одном из них в $1\frac{1}{2}$ раза более, нежели в другом.

Сколько лошадей в каждом колхозе?

Задача 3. В двух ящиках 390 болтов. Сколько болтов в каждом ящике, если число болтов в первом составляет $\frac{2}{3}$ числа болтов во втором?

В задачах 1 и 2 отношение было выражено целым и смешанным числом; решение задач в этих случаях обычно не затрудняет учащихся.

В задаче 3 отношение выражено правильной дробью, что усложняет задачу. Полезно обратиться к рисунку (рис. 41).

Если допустить, что число болтов в I ящике составляет одну часть (единицу), то число болтов во II ящике составит $\frac{2}{3}$ (единицы).

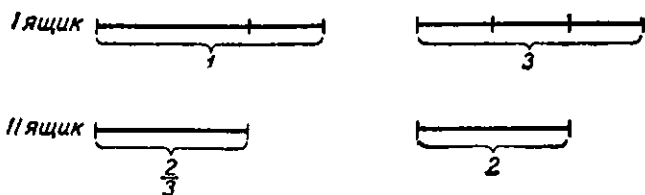


Рис. 41.

Затем задача решается или 1) в дробных числах: 390 болтов составляют $1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$ части; значит, в большем ящике $390 : 1\frac{2}{3}$, т. е. 234 болта, в меньшем $234 \cdot \frac{2}{3}$, т. е. 156 болтов.

Проверка. $234 + 156 = 390$; $\frac{156}{234} = \frac{78}{117} = \frac{2}{3}$.

Или 2) в целых числах: если число болтов в I ящике составляют 3 частицы, то число болтов во II ящике составляют 2 такие же частицы; значит, 390 болтов составляют 5 частиц и т. д.

Замечание. Арифметическое решение рассматриваемого типа задач диктуется их алгебраическим решением:

$$x + y = a;$$

$$\frac{x}{y} = b;$$

$$x = y \cdot b;$$

$$y(b+1) = a;$$

$$y = \frac{a}{b+1}; \quad x = \frac{a}{b+1} \cdot b.$$

$$\text{В данной задаче } a = 390; b = \frac{2}{3}.$$

Усложненные задачи. Обычно задачи рассматриваемого типа усложняются: 1) требованием найти 3, 4 и более числа, 2) большими числовыми данными, 3) отвлеченной формулировкой, 4) дополнительными условиями.

В. Целые числа.

Задача 4. На заводе в трех цехах работают 1824 человека. В первом цехе в 5 раз больше рабочих, чем во втором, а в третьем столько рабочих, сколько в первых двух цехах вместе. Сколько рабочих в каждом цехе?

Решение этой задачи не затрудняет учащихся:

$$\frac{1824}{1+5+6}, \text{ т. е. } 152 \text{ человека во II цехе, и т. д.}$$

Метод проб (испытаний). *Замечание.* Эти задачи решались следующим приемом: допустим, например, что во втором цехе 19 человек, тогда в I—95 человек, в III—114 человек. Всего при сделанном допущении в цехах должно быть 228 человек, т. е. в 8 раз меньше действительного числа их. Этот прием решения задачи 4 называется Александровым¹ „методом подобия“ в отличие от первого метода „пропорционального деления“, „в котором узнается размер каждой части, зная число частей“. „Метод подобия“ заключается в том, что, предположив размер каждой час-

¹ И. А. Александров, Методы решений арифметических задач.

ти, определяют, во сколько раз этот размер больше или меньше требуемого размера. Мы показали на примере задачи 4, что нет необходимости „предполагать размер“ (19 человек); кроме того, этот прием может крайне усложнить решение задачи в случае неудачного допущения размера одной из частей (удачно нами взят размер в 19 человек) и может привести задачу, решаемую в целых числах, к необходимости решать ее в дробных числах.

Задача 5. Среднее арифметическое двух чисел 46, одно число в 3 раза больше другого. Найти эти числа.

Задача 6. В двух корзинах было поровну яблок. После того как из одной корзины продали 150 яблок, а из другой 194, в первой корзине осталось в 3 раза больше яблок, чем во второй. Сколько яблок было в каждой корзине?

Объяснение. 44 лишних яблока ($194 - 150 = 44$), проданных из II корзины, составляют 2 части яблок, оставшихся в I корзине ($3 - 1 = 2$). Значит, во II корзине осталось 22 яблока ($44 : 2 = 22$), а в I осталось 66 яблок ($22 \cdot 3 = 66$). В I корзине было ($150 + 66 = 216$) 216 яблок, во II ($194 + 22 = 216$) 216 яблок. Решение является частично и проверкой задачи, а именно: в обеих корзинах было поровну яблок.

На рисунке 42 $AB = CD$; отрезки AB и CD соответствуют числу яблок, бывших в I и II корзинах.

Отрезок KB соответствует числу 150; $MD - 194$; отрезок ME — числу 44.

Остаток яблок в I корзине изображен отрезком AK (3 частицы).

Остаток яблок во II корзине изображен отрезком CM (1 частица) и т. д.

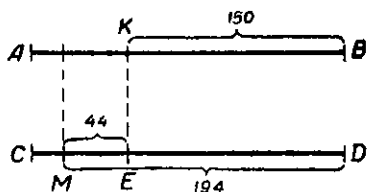


Рис. 42.

Г. Дробные числа

Задача 7. Сумма двух чисел $16\frac{5}{8}$; частное от деления большего числа на меньшее $2\frac{1}{2}$. Узнать эти числа.

Указание. Устанавливают, что частное $2\frac{1}{2}$ показывает, что одно число в $2\frac{1}{2}$ раза больше другого.

Задача 8. Ученик издержал 0,9 руб. на покупку книги и бумаги, причем за книгу заплатил в 9 раз дороже, чем за бумагу. Сколько стоила книга и сколько бумага? Задача решается устно: 0,9 руб. = =90 коп. Бумага стоит 9 коп., книга—81 коп.

Задача 9. Трое получили за сделанную работу 136 руб. Первый получил 0,75 того, что получил третий, а второй в 2,5 раза больше третьего. Сколько получил каждый?

Запись	I	136	0,75 того, что III в 2,5 раза б. III 1	0,75	24 руб.
условия	II			2,5	80 руб.
и	III			1	32 руб.
ответа				4,25	136 руб.

$$1) 136 : 4,25 = \begin{array}{r} 13600 \\ \underline{1275} \\ 850 \\ \underline{} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 425 \\ \underline{} \\ 32 \end{array} \quad 32 \text{ руб. получил III;}$$

$$2) 32 \cdot 0,75 = 32 \cdot \frac{3}{4} = 24 \text{ (устно);}$$

$$3) 32 \cdot 2,5 = 64 + 16 = 80 \text{ (устно).}$$

$$\text{Проверка. } \frac{24}{32} = \frac{3}{4} = 0,75; 80 : 32 = 2,5.$$

Задача 10. Как должны три переписчицы распределить между собой $217\frac{1}{2}$ руб., полученные за выполненную работу, если известно, что одна из них выполнила $\frac{2}{5}$ работы, другая $\frac{2}{3}$ того, что выполнила первая, а третья— всю остальную работу?

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \right\} 217 \frac{1}{2} \text{ руб.} \left| \begin{array}{l} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} \text{ того, что I} \\ \text{остальное} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{2}{5} \text{ части всей работы} & 87 \text{ руб.} \\ \frac{4}{15} \text{ " " "} & 58 \text{ руб.} \\ \frac{1}{3} \text{ " " "} & 72 \frac{1}{2} \text{ руб.} \end{array}$$

I способ решения.

- 1) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ (части всей работы);
- 2) $1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{15} = 1 - \frac{10}{15} = \frac{1}{3}$ (часть всей работы);
- 3) $217 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{435-2}{2 \cdot 5} = 87$ (руб.);
- 4) $217 \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{435 \cdot 4}{2 \cdot 15} = 29 \cdot 2 = 58$ (руб.);
- 5) $217 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{435 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{145}{2} = 72 \frac{1}{2}$ (руб.).

II способ решения (см. задачу 3). Выразив дроби $\frac{2}{5}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{1}{3}$ в одинаковых долях, имеем: $\frac{6}{15}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{5}{15}$. Значит, первая переписчица должна получить 6, вторая—4 и третья—5 одинаковых частиц денег, т. е. $217 \frac{1}{2}$ руб. приходится на 15 частиц, и т. д.

Проверка. $\frac{87}{217 \frac{1}{2}} = \frac{87 \cdot 2}{435} = \frac{2}{5}$; $\frac{58}{87} = \frac{2}{3}$.

Задача 11. Сумма трех чисел $20\frac{3}{7}$. Первое число в $1\frac{1}{2}$ раза меньше второго и составляет $\frac{2}{3}$ третьего. Найти эти числа.

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{2}{3} \right. \\ \left| \frac{2}{3} \right. \\ \left| 1 \right. \end{array} \cdot 1\frac{1}{2} = 1 \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{2}{3} \right. \\ \left| \frac{3}{3} \right. \\ \left| \frac{3}{3} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} 2 \text{ частицы} \\ 3 \text{ " } \\ 3 \text{ " и т. д.} \end{array}$$

Решение. III число принято за 1 (условная единица). I число составляет $\frac{2}{3}$ его, т. е. составляет $\frac{2}{3}$ условной единицы. В то же время это I число в $1\frac{1}{2}$ раза меньше II, т. е. II число в $1\frac{1}{2}$ раза больше I и составляет $\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = 1$; II число тоже равно условной единице.

Задача 12. Сумма двух чисел равна 1. Найти эти числа, зная что $\frac{1}{2}$ первого числа равна $\frac{1}{3}$ второго.

I способ. Если $\frac{1}{2}$ первого числа равна $\frac{1}{3}$ второго, то все первое число составляет $\frac{2}{3}$ второго. Приняв второе число за 1 (условную единицу), решают по общему приему.

II способ. Если $\frac{1}{2}$ первого числа равна $\frac{1}{3}$ второго (рис. 43), то I число состоит из двух таких частей, каких во II числе содержится 3, и т. д.

Задача 13. У двух братьев 48 орехов. $\frac{2}{3}$ числа орехов, имеющих у одного брата, равны $\frac{2}{5}$ числа орехов, имеющих у другого брата. Сколько орехов у каждого брата?

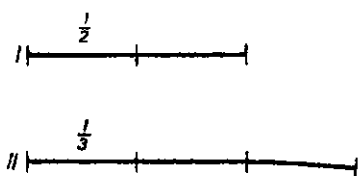


Рис. 43

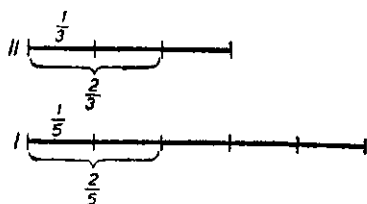


Рис. 44.

Указание (см. рис. 44). Все число орехов I брата составляют 3 частицы, а все число орехов II брата 5 таких же частиц. Задача решается устно.

IV ГРУППА ЗАДАЧ (аналогичная III группе)

Нахождение двух (или более) чисел по данной их разности и отношению (кратному)

А. Целые числа.

$$x - y = a$$

$$\frac{x}{y} = b$$

Задача 1. Найти два числа, разность которых 1800, а частное от деления одного числа на другое равно 26. Выясняют, что, во-первых, разность 1800 показывает, что одно число больше другого на 1800, во-вторых, частное 26 показывает, что одно число больше другого в 26 раз. Дается иллюстрация (рис. 45).

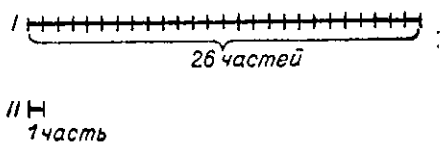


Рис. 45.

Б. Дробные числа

Задача 2. Разность двух чисел $12\frac{5}{6}$; одно число составляет $\frac{1}{7}$ другого. Найти эти числа.

Решение. Если одно число составляет $\frac{1}{7}$ другого, то меньшее число можно принять за 1 (одну частицу), тогда большее составит 7 (таких же частиц). Ясно, что 6 частиц составляют $12\frac{5}{6}$ и т. д.

Задача 3. Двумя тракторами вспахали землю; первым из них вспахали $\frac{13}{15}$ того, что вспахали вторым. Сколько гектаров обработали каждым трактором, если первым вспахали на $192\frac{1}{4}$ га менее, чем вторым?

$$\begin{array}{l} \text{I} \left| \frac{13}{15} \right| \text{ на } 192\frac{1}{4} \text{ га менее II.} \\ \text{II} \left| \right| \end{array}$$

I способ. Допустим, что земля, вспаханная II трактором, составляет 15 частиц; тогда земля, вспаханная I трактором, составит 13 таких же частиц; на 2 частицы приходится $192\frac{1}{4}$ га и т. д.

II способ. Допустим, что земля, вспаханная II трактором, составляет 1, тогда разность $\frac{2}{15}x = 192\frac{1}{4}$ га.

При этом способе рассуждений учащимся не всегда ясно, что означает число x ; за x они ошибочно принимают размер всей земли, вспаханной обоими тракторами.

Задача 4. Найти два числа, разность которых равна 3 и частное от деления одного числа на другое также равно 3 (устно).

Решение. Надо найти 2 числа, зная, что первое число больше второго в 3 раза и это составляет 3 единицы. Сделав рисунок, увидим, что 2 частицы ($3-1=2$) составляют 3 единицы, значит, меньшее число равно $1\frac{1}{2}$, а большее $4\frac{1}{2}$. Действительно, $4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 3$ и $4\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} = 3$.

Замечание. Решение задач рассматриваемой группы в общем виде:

$$x - y = a; \quad x = y \cdot b;$$

$$\frac{x}{y} = b; \quad by - y = a;$$

$$y = \frac{a}{b-1};$$

$$x = \frac{a}{b-1} \cdot b. \text{ Метод решения таков}$$

же, как для задач группы III пропорционального деления.

Задача 5. Разность двух чисел 40. Если из первого числа вычесть $\frac{4}{5}$ его, а из второго $\frac{2}{3}$ его, то получим равные остатки.

Решение. Разность 40 показывает, что одно число больше другого на 40. Кроме того, известно, что $\frac{1}{5}$ часть первого числа $\left(1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\right)$ составляет столько же единиц, сколько $\frac{1}{3}$ второго $\left(1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\right)$. Какое из чисел больше? Первое число больше, так как меньшая его часть, только $\frac{1}{5}$, равна $\frac{1}{3}$ второго числа (см. рис. 46).

Из рисунка ясно, что если первое число состоит из 5 частиц, то второе состоит из трех таких же частиц. 2 частицы составляют 40.

I число 100.

II число 60.

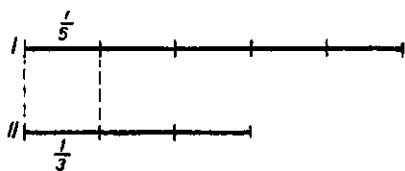


Рис. 46.

Проверка: если от 100 отнять $\frac{4}{5}$ от 100, т. е. 80, то останется 20. Если от 60 отнять $\frac{2}{3}$ от 60, т. е. 40, то останется 20. Остатки равны.

Усложненные задачи.

Следует остановиться на задачах, усложненных тем, что в них дается сумма или разность и отношение между искомыми числами после некоторого их изменения. Задачи эти обычно решаются с использованием иллюстраций; решение их способствует развитию сообразительности учащихся.

Задача 6. На одном складе муки в 3 раза больше, чем на другом. Если из одного склада вы-

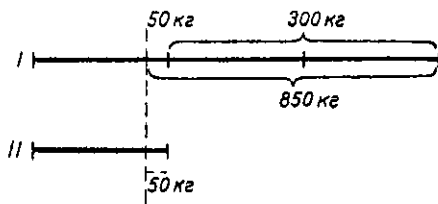


Рис. 47.

вести 850 кг, а из другого 50 кг, то на обоих складах муки останется поровну. Сколько муки на каждом складе?

На рисунке 47 показано: 1) что на I складе было муки в 3 раза больше, чем на II (отрезок в 3 раза больше); 2) что со II склада вывезли 50 кг, а с I вывезли также 50 кг да еще 800 кг (850 кг); 3) что на обоих складах муки осталось поровну.

Ясно по рисунку, что 2 части имевшейся муки составляют 800 кг; значит, на втором складе было 400 кг (1 часть), а на первом—1200 кг (3 части). Задача решается устно.

Проверка. $1200 - 850 = 350$ (кг) и $400 - 50 = 350$ (кг).

Задача 7. Сумма двух чисел 410; частное от деления большего числа на меньшее равно 7 и остаток 10. Найти эти числа (устно).

Условие дано в математических терминах. Надо их раскрыть.

Решение. Если бы одно число было больше другого только в 7 раз, то сумма этих двух чисел составляла бы не 410, а $410 - 10 = 400$. Меньшее число равно 50, а большее $50 \cdot 7 + 10 = 360$.

Действительно, если 360 разделить на 50, то в частном получится 7, в остатке 10; $360 \div 50 = 410$.

Задача 8. Частное от деления двух чисел равно 3, а остаток 10. Если сложить делимое, делитель, частное и остаток, то получится 143. Найти делимое и делитель (устно).

Сначала находят сумму только делимого и делителя: 1) $143 - 3 - 10 = 130$, где 3 — частное, а 10 — остаток.

В дальнейшем задача решается так же, как предыдущая:

2) $130 - 10 = 120$

3) $1 \div 3 = 4$ (части)

4) $120 : 4 = 30$; это меньшее число

5) $30 \cdot 3 + 10 = 100$; это большее число

Проверка. $100 + 30 + 3 + 10 = 143$; разделив 100 на 30, получим в частном 3 и в остатке 10.

1. Историческая задача¹ (для внеклассной работы).

„Ослица и мул шли вместе, нагруженные мешками равного веса. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. „Что ты жалуешься,— сказал мул,—если ты мне дашь один твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я тебе дам один свой мешок, наши грузы только сравняются“. Сколько было у каждого?“

Указание. У мула на 2 мешка больше, чем у ослицы, 4 мешка приходится на одну часть.

Ответ. У мула 7 мешков, у ослицы 5.

2. Приведем еще одну задачу, которую с интересом решают учащиеся: „У мальчика столько же сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько братьев и сколько сестер?“

Ответ. Сестер 3, братьев 4.

Указание. Из I условия видно, что братьев было одним больше, чем сестер. Из II условия следует, что братьев будет вдвое больше, чем сестер, если считающую сестру не принимать во внимание; кроме того, в этом случае братьев будет на 2 больше, чем сестер.

Выше рассмотренные группы задач, которые в курсе алгебры решаются путем составления системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными с последующим исключением одного из неиз-

¹ Г. Н. Попов, Сборник исторических задач по элементарной математике, ОНТИ, 1936, № 83, 98 и др.

вестных, в курсе арифметики также приводят к необходимости „исключить“ одно из неизвестных, причем в некоторых случаях это выполняется методом замены одного неизвестного другим, в других случаях—путем сравнения чисел или непосредственно данных в задаче или уравненных между собой.

V ГРУППА ЗАДАЧ

а) Исключение одного искомого заменой его другим

А. Целые числа

Метод замены. Задача 1. Задача из рассказа А. П. Чехова „Репетитор“. „Купец купил 138 аршин черного и синего сукна на 540 руб. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?“

I. Если допустить, что все купленное сукно было синее, то оно стоило бы $(5 \cdot 138 = 690)$ 690 руб., а не 540 руб., т. е. на 150 руб. дороже. Эта разница в 150 руб. составила из двухрублевой $(5 - 3 = 2)$ разницы на каждом аршине черного сукна; значит, черного сукна было 75 аршин $(150 : 2 = 75)$, а синего— 63 аршина $(138 - 75 = 63)$.

Проверка. $5 \cdot 63 + 3 \cdot 75 = 315 + 225 = 540$.

II. Можно допустить, что было куплено только черное сукно. Тогда сначала получим ответ: куплено 63 аршина синего сукна.

Замечание. Полезно решать эти задачи обоими способами и выяснить, почему в первом случае сначала узнается число аршин черного сукна, а потом— синего, во втором случае—наоборот.

Китайская задача из трактата „Девять отделов искусства счета“. „В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно только, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов“.

Задача 2. 8 м сатина и 5 м ситца стоят 83 руб. 50 коп. 1 м сатина на 2 руб. 80 коп. дороже 1 м ситца. Сколько стоит 1 м сатина и 1 м ситца в отдельности?

Решение. Допустим, что вместо ситца куплен сатин, тогда:

1) $2 \text{ руб. } 80 \text{ коп.} \cdot 5 = 14 \text{ руб.}$ (5 м сатина стоили бы на 14 руб. дороже 5 м ситца).

2) $83 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} + 14 \text{ руб.} = 97 \text{ руб. } 50 \text{ коп.}$ (стоили бы 13 м сатина).

3) $97 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} : (8+5) = 7 \text{ руб. } 50 \text{ коп.}$ (стоит 1 м сатина).

4) $7 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} - 2 \text{ руб. } 80 \text{ коп.} = 4 \text{ руб. } 70 \text{ коп.}$ (стоит 1 м ситца).

Проверка. $7 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} \cdot 8 + 4 \text{ руб. } 70 \text{ коп.} \cdot 5 = 60 \text{ руб.} + 23 \text{ руб. } 50 \text{ коп.} = 83 \text{ руб. } 50 \text{ коп.}$

Полезно составить план решения задачи и в предположении, что был куплен только ситец (почему в этом случае сначала узнают стоимость 1 м ситца?).

$ax + by = c$ Задача 3. У меня в кармане в 3 раза больше двугривенных, чем пятиалтынных; всего у меня 6 руб. 75 коп.

$y = kx$ Сколько у меня в кармане тех и других монет?

Решение. На каждый пятиалтынный приходится 3 двугривенных, т. е. если допустить, что одна монета в 15 коп., то другая должна быть в 60 коп., чтобы их было поровну. Такие 2 монеты дали бы 75 коп., и их было бы по $675 : 75 = 9$. Ответ. 9 пятиалтынных, 27 двугривенных.

Проверка. $9 \cdot 15 + 27 \cdot 20 = 135 + 540 = 675$; 6 руб. 75 коп.

Б. Дробные числа

Задача 4. Сколько весит 1 куб. м дуба и 1 куб. м сухой ели, если $6\frac{1}{2}$ куб. м дуба и $2\frac{2}{5}$ куб. м ели весят $6\frac{16}{25} \text{ т}$, причем вес 1 куб. м дуба в $1\frac{1}{3}$ раза больше, чем вес 1 куб. м ели?

Дуб	$6\frac{1}{2}$ куб. м	$6\frac{16}{25} \text{ т}$	1 куб. м весит	Ответ
			в $1\frac{1}{3}$ раза больше	
Ель	$2\frac{2}{5}$ куб. м			$\frac{3}{5} \text{ т}$

Решение. I. Допустим, что вместо дуба взята ель. Для того чтобы сохранить тот же вес $6\frac{16}{25} m$, придется взять вместо $6\frac{1}{2}$ куб. м дуба $8\frac{2}{3}$ куб. м ели. Значит, $11\frac{1}{15}$ куб. м ели весят $6\frac{16}{25} m$; 1 куб. м ели весит $\frac{3}{5} m$; 1 куб. м дуба весит $\frac{4}{5} m$:

$$1) 6\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{13 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 8\frac{2}{3} \text{ (куб. м);}$$

$$2) 8\frac{2}{3} + 2\frac{2}{5} = 11\frac{1}{15} \text{ (куб. м);}$$

$$3) 6\frac{16}{25} : 11\frac{1}{15} = \frac{166 \cdot 15}{25 \cdot 166} = \frac{3}{5} \text{ (m);}$$

$$4) \frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5} \text{ (m).}$$

II. Допустим, что вместо ели взят дуб. Для сохранения веса в $6\frac{16}{25} m$ придется взять дуба только $1\frac{4}{5}$ куб. м $\left(2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{3} = \frac{12 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5} \right)$ вместо $2\frac{2}{5}$ куб. м ели и т. д.

Проверка.

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{5} \cdot 6\frac{1}{2} &= \frac{4 \cdot 13}{5 \cdot 2} = \frac{52}{10} = 5\frac{1}{5} \text{ (m)} \\ \frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{5} &= \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{5} = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25} \text{ (m)} \end{aligned} \right\} 5\frac{1}{5} + 1\frac{11}{25} = 6\frac{16}{25} \text{ (m).}$$

Задачи на смешение II рода. Этим же методом исключения одного неизвестного путем замены его другим решаются задачи, которые в методиках арифметики и в задачниках называются задачами на „смешение II рода“¹.

¹ Различались задачи „на смешение“ двух видов: а) по данной цене единиц смешиваемых веществ ($p_1; p_2$) и количеству их ($m_1; m_2$) узнается цена единицы смеси $n = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{m_1 + m_2}$ б) по данной цене единиц смешиваемых веществ ($p_1; p_2$) и цене единицы смеси (n) определяются количества смешиваемых веществ, если известно количество всей смеси (m). Задачи на смешение II рода

Задача 5. Купили 1,6 кг конфет двух сортов ценой по 6,8 руб. и 8,4 руб. за 1 кг. В среднем цена 1 кг смеси равнялась 7,5 руб. Сколько купили тех и других конфет?

Решение I (в предположении, что купленные конфеты все 1-го сорта):

$$\frac{7,5 \cdot 1,6 - 6,8 \cdot 1,6}{8,4 - 6,8} = \frac{1,6(7,5 - 6,8)}{1,6} = 0,7 \text{ (кг)}.$$

Ответ. 0,7 кг более дорогого сорта;

0,9 кг более дешевого сорта.

Решение II (пусть все конфеты 2-го сорта):

$$\frac{8,4 \cdot 1,6 - 7,5 \cdot 1,6}{8,4 - 6,8} = \frac{1,6(8,4 - 7,5)}{1,6} = 0,9 \text{ (кг) и т. д.}$$

Усложненные задачи. Задача 6. Мальчик купил 3 груши и 10 яблок за 3 руб. 75 коп., причем за 3 груши он заплатил дороже, чем за пару яблок, на 51 коп. Сколько стоила 1 груша и 1 яблоко?

Решение I. Если бы вместо трех груш мальчик купил яблоки, то он мог бы купить 2 яблока, но получил бы сдачи 51 коп. и всего он купил бы 12 яблок ($10 + 2 = 12$) и заплатил бы 3 руб. 75 коп. — 51 коп. = 3 руб. 24 коп. за 12 яблок, значит, одно яблоко стоит 3 руб. 24 коп.: $12 = 27$ коп., а одна груша стоит 35 коп.:

$$\left(\frac{27 \cdot 2 + 51}{3} = 35 \right).$$

Решение II. Если бы вместо яблок мальчик купил груши, то вместо 10 яблок он мог бы купить 15 груш (5 пар яблок, 5 раз по 3 груши), но должен был бы заплатить 3 руб. 75 коп. + 51 коп. · 5 = 3 руб. 75 коп. + 2 руб. 55 коп. = 6 руб. 30 коп. За 6 руб. 30 коп. он мог купить 18 груш и т. д.

называются в настоящее время в некоторых метод. руководствах „задачами на предположение“. По проводимой нами классификации все задачи „алгебраического характера“ являются задачами „на предположение“: при решении их пользуются „допущением“, „предположением“. Задачи „на смешение“ I рода являются составными арифметическими задачами, которые решаются рассмотренным выше методом использования „среднего арифметического“ или „среднего взвешенного“.

VI ГРУППА ЗАДАЧ

б) Исключение одного искомого уравнением данных

А. Целые числа

Метод уравнивания данных.

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{array}$$

Задача 1. Фабрика выпустила 700 пар мужской обуви и 400 пар детской, всего на сумму 58000 руб. В другой раз она выпустила 1000 пар мужской и 400 пар детской обуви на 76000 руб. Сколько стоит пара мужской и пара детской обуви?

Запись условия:

700 пар мужск. обуви	и 400 пар детск.	за 58000 руб.
1000	" 400	" 76000 руб.

1) Надо выяснить, что стоимость обуви второго выпуска превышает стоимость первого выпуска только потому, что во второй раз выпущено мужской обуви больше, чем в первый раз;

2) надо установить, на сколько пар мужской обуви выпущено во второй раз больше, чем в первый раз (на 300 пар), и на сколько рублей поэтому уплачено дороже во второй раз (на 1800 руб.). Дальнейшее не представляет затруднений.

Б. Дробные числа

Задача 2. За 1,5 кг товара одного сорта и 28 кг другого сорта уплатили 252,5 руб. В другой раз за 30 кг второго сорта и 4,5 кг первого сорта уплатили 325,5 руб. Сколько стоит 1 кг каждого сорта?

Запись условия: 1,5 кг; 28 кг; 252,5 руб.
4,5 кг; 30 кг; 325,5 руб.

Заметив, что во второй раз куплено в 3 раза больше товара I сорта, можно уравнивать число килограммов товара первого сорта, купленных оба раза, а именно, предположив, что первая покупка была в 3 раза больше действительной. Тогда задача будет решаться аналогично предыдущей задаче:

4,5 кг;	84 кг;	757 руб. 50 коп.
4,5 кг;	30 кг;	325 руб. 50 коп.

Примечание. С более подготовленными классами можно рассмотреть случай, когда допускается изменение одного и другого условия для уравнивания числовых данных. Решение не требует дополнительных пояснений.

VII ГРУППА ЗАДАЧ

Изменение одного из сомножителей на несколько единиц

Обычно учащиеся пятых классов твердо знают изменение произведения только в случае умножения или деления одного из сомножителей на некоторое число. Поэтому прежде чем приступить к решению нижеуказанных задач (да и независимо от этих задач), следует выполнить с учащимися некоторые упражнения на изменение произведения в случае, когда к одному из сомножителей прибавляют (или от него отнимают) некоторое целое или дробное число. Например: „Узнать, как изменится произведение, если множимое, равное 6, оставить без изменения, а к множителю прибавить 10 (или отнять 10)“. Ответ. Увеличится (или уменьшится) на 60. Решение в общем виде. Пусть сомножители x и y . Изменение одного из них a . Тогда изменение произведения $(x + a) \cdot y - xy = ay$. Зная изменение произведения ay и изменение одного сомножителя a , вычисляют второй сомножитель y .

Задача 1 (устно). Учащиеся собрали по 45 коп. с каждого ученика для оплаты проезда на выставку, но оказалось, что у них не хватило для этой цели 1 руб. Но если бы они собрали по 60 коп. с каждого, то у них осталось бы еще 2 руб. Узнать, сколько учащихся участвовало в поездке и сколько стоил проезд.

Указание. Разница в 3 руб. объясняется тем, что каждый учащийся дополнительно внес 15 коп. Значит, было 20 учащихся; проезд стоил $(45 \cdot 20) \text{ коп.} + 1 \text{ руб.}$ или $(60 \cdot 20) \text{ коп.} - 2 \text{ руб.} = 10 \text{ руб.}$

¹ Решение задач V, VI и VII групп не входит в программу по арифметике, но учащиеся встречаются их во многих книгах и журналах, предназначенных для „занимательного“ чтения по математике. Учитель должен знать методику объяснения их решения.

Задача 2. Для посадки кустов выделили несколько грядок. Садовник рассчитал, что если он на каждую грядку посадит по 3 куста, то ему придется выделить еще 6 грядок для посадки всех кустов, а если он посадит по 5 кустов на грядку, то у него останутся свободными 4 грядки. Сколько кустов хотел посадить садовник и на скольких грядках?

1) $5 - 3 = 2$; на 2 куста во II раз посадили на каждой грядке больше, чем в I.

2) $3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 = 38$; на 38 кустов посадили во II раз больше, чем в I.

3) $38 : 2 = 19$; на 19 грядках хотел садовник посадить кусты;

4) $3(19 + 6) = 75$ или $5 \cdot (19 - 4) = 75$; 75 кустов хотел посадить садовник.

Замечание. Алгебраическое решение задачи: если через x обозначить число грядок, то число предназначенных для посадки кустов в I раз составит $3x + 3 \cdot 6$, а во II раз $5x - 5 \cdot 4$; значит, $3x + 3 \cdot 6 = 5x - 5 \cdot 4$;

$$18 + 20 = 5x - 3x;$$

$$38 = 2x; x = 38 : 2;$$

$$x = 19.$$

Б. Дробные числа

Задача 3. Произведение двух чисел $11\frac{1}{4}$; если к одному из них прибавить $\frac{1}{2}$, то произведение будет равно $12\frac{1}{2}$. Узнать эти числа.

I сомножитель		к I прибавить $\frac{1}{2}$
II " "		
произведение	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$

1) Изменение произведения при изменении одного из сомножителей (в данном случае I):

$$12\frac{1}{2} - 11\frac{1}{4} = 1\frac{1}{4};$$

$$2) 1\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4} \cdot 2 = 2\frac{1}{2}; \text{ II сомножитель } 2\frac{1}{2}.$$

$$3) 11\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{45 \cdot 2}{4 \cdot 5} = 4\frac{1}{2}; \text{ I сомножитель } 4\frac{1}{2}.$$

$$\text{Проверка. } 4\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = 11\frac{1}{4}; 5 \cdot 2\frac{1}{2} = 12\frac{1}{2}.$$

В рассмотренных группах задач показаны основные арифметические приемы решения задач „алгебраического“ характера; они, конечно, не исчерпывают все разнообразие возможных их „типов“ и не включают особо „замысловатых“ задач, решение которых, по нашему мнению, может иметь место лишь во внеклассной работе.

Из сделанного обзора видно, что в разделе целых чисел и в разделах обыкновенных и десятичных дробей имеются арифметические задачи, решаемые одинаковыми приемами. Таким образом, одного и того же типа задачи решаются сначала с целыми числами в качестве данных, затем с дробными. Это повторение вместе с расширением практики должно способствовать развитию умения решать задачи.

Возражения против введения задач „алгебраического“ характера в курс арифметики часто аргументируют тем, что приемы их решения представляют собой замаскированное решение уравнений. Нам кажется, что приведенные примеры показывают, что все эти задачи решаются без знания алгебраических приемов решения уравнений; в то же время решение этих задач учит учащегося вникать в существо вопроса, воспитывает логическое мышление учащегося, развивает сообразительность. Никакое заучивание учащимися приемов решения задач недопустимо. Классификация групп задач приведена нами исключительно для учителя¹.

Раньше было указано решение задач, которые обычно назывались задачами „на смешение I рода“—как сложных арифметических и „II рода“—как задач алгебраического характера.

¹ Как в стабильном задачнике по арифметике, так и в других арифметических сборниках задач имеются задачи, для решения которых используются приемы, вышеуказанные в настоящей „Методике арифметики“.

Теми же приемами решаются задачи, содержанием которых является концентрация растворов или крепость спирта и задачи „на сплавы и пробы“.

Указания. а) Крепость чистого спирта принимается за 1 (100% или 100°). В том случае, когда спирт смешан с водой, число градусов, измеряющее крепость смеси, показывает процентное отношение (по объему) чистого спирта ко всей смеси.

б) Благородные металлы (золото, серебро) обычно в быту употребляются с примесью других металлов (лигатура). Проба показывает отношение веса чистого серебра к весу сплава и выражается в промилле (тысячных долях).

Говорят: „835-я проба“; это значит $0,835 = 835/1000$.

Приведем решение некоторых задач.

Задача 1. Из имевшегося запаса в 10 л 70% серной кислоты израсходовали 2 л и долили такое же количество воды. Сколько процентов получилась кислота?

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 10 \text{ л} \\ \text{II} \quad 2 \text{ л} \end{array} \left| \begin{array}{l} 70\% \\ 0\% \end{array} \right. \quad \text{Решение. В 8 оставшихся литрах } 70\%$$

кислоты содержится $(8 \cdot 0,7 = 5,6)$ 5,6 л чистой (100%) серной кислоты; в 2 л воды не содержится серной кислоты (0 л); значит, в получившихся 10 л раствора 5,6 л чистой серной кислоты, т. е.

$$\frac{5,6}{10} = 0,56 = 56\%.$$

Запись решения: $\frac{8 \cdot 0,7 + 2,0}{8 + 2} = 0,56 = 56\%$.

Задача 2. Имеется серебро 850-й пробы и 720-й. Сколько надо взять того и другого серебра, чтобы получить 1 кг 40 г сплава 800-й пробы?

В сплаве 800-й пробы (1040 · 0,8) г чистого серебра; если бы оба сплава были 800-й пробы, то чистого серебра в них было бы (1040 · 0,85) г. Ошибка, вытекающая из сделанного допущения, составляет:

$$1040 \cdot 0,85 - 1040 \cdot 0,8 = 1040 \cdot 0,05 = \frac{1040}{20} = 52 \text{ (г)}.$$

Значит,

$$\frac{52}{0,85 - 0,72} = \frac{52}{0,13} = 400; \quad 400 \text{ г сплава II сорта} \\ 640 \text{ г I сорта.}$$

Замечание. После изучения вопроса о делении в отношении, обратном пропорциональному данным числам (гл. XIII), задача может быть решена иным способом:

Проба	Разность	
I 0,85	0,80	Количество серебра надо взять в отношении, обратном числам 0,05 и 0,08, т. е. в отношении 8 : 5:
II 0,72		
		$\frac{1040}{13} \cdot 8 = 640 \text{ (г)}$ и $\frac{1040}{13} \cdot 5 = 400 \text{ (г)}$.

§ 8. Наглядность при решении задач

Наглядное пособие в виде прямой линии, прямолинейного отрезка, которое применялось выше при пояснении задач, чем-либо затрудняющих учащихся, проверено на практике в течение многих лет; его значение не только вспомогательное при решении данной задачи, оно имеет и образовательное значение: приучает сводить арифметические вопросы к геометрическим (отрезкам), подмечать общий прием решения аналогичных задач.

Но положительные результаты достигаются лишь в том случае, когда учитель предоставляет учащимся достаточно самостоятельности в изображении условия и решения задачи при помощи отрезков, дает им подумать, испробовать различные приемы наглядного изображения и умело приходит им на помощь в случае необходимости.

При решении задач, которые не затрудняют учащихся, применение наглядного пособия, конечно, излишне. В то же время имеются группы задач, решение которых становится простым и ясным при использовании отрезка, в то время как решение их без использования наглядного пособия затрудняет многих учащихся. Кроме выше рассмотренных задач, такими является группа задач, в которых требуется найти 2 числа, значения которых изменяются, а разность между ними остается постоянной (или равной нулю).

Например: „Дочери теперь 8 лет, а матери 38 лет. Через сколько лет мать будет втрое старше дочери?“

У к а з а н и е. Отрезки прямой (рис. 48) (соответствующие числам 38 и 8) должны примерно по длине быть один больше другого в 5 раз (изображены сплошной линией); прирост лет (обозначен пунктиром) должен быть одинаков для одного и другого отрезка, но они должны быть примерно так взяты, чтобы весь отрезок AC был втрое длиннее отрезка DE . Тогда для учащихся будет действительно наглядно, что 8 лет и добавочные годы (отрезок, обозначенный пунктиром) составляют одну часть, а 38 лет и добавочные годы составляют 3 части.

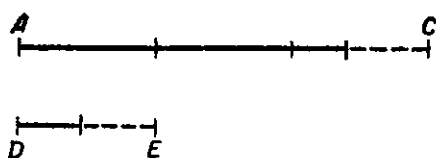


Рис. 48.

Значит: $38 - 8 = 30$;
30 лет приходится на
2 части; 15 лет прих-
одится на одну часть
и $15 - 8 = 7$; через 7 лет
мать будет втрое стар-
ше дочери.

- Проверка. 1) $8 + 7 = 15$ (лет)
2) $38 + 7 = 45$ (лет)
3) $45 : 15 = 3$; в три раза.

§ 9. Самостоятельное составление задач учащимися

1. Составление задач учащимися имеет значение для их математического развития, для повышения интереса к занятиям математикой, для их политехнической подготовки. Удачно составленная, одобренная учителем задача доставляет удовлетворение ее автору и побуждает его к дальнейшей работе.

2. Учитель предлагает учащимся или составить задачу, удовлетворяющую определенным условиям, или придумать задачу, какую они сами хотят. Так, при изучении любой темы программы по арифметике учитель предлагает составить задачу по этой теме; например, задачу, в которой требуется умножить или разделить число на обыкновенную дробь, найти дробь числа, найти процентное отношение чисел и т. д.; составить задачу в 2—3 действия, или составить задачу на определенные действия (сложение, умножение), или в определенной последовательности действий, например, составить задачу, которая решалась бы по формуле:

$$(a+b)c; a + b \cdot c;$$

$$\frac{ab + cd}{a + b} \quad \text{и т. д.}^1$$

3. Когда учитель дает задание составить задачу по определенным числовым данным или по определенной числовой формуле, например, $\frac{1,6 \cdot 5 + 2,4 \cdot 7}{5 + 7}$,

¹ Указано в соответствующих главах данной „Методики“.

учащиеся нередко предлагают нереальный текст для задачи, не отдавая себе отчета, что не всякое число может соответствовать стоимости 1 кг хлеба, росту человека, весу головы кита и т. д. И когда однажды учащийся предложил задачу, при решении которой плата за квартиру рабочего составила 96% его заработка, со всех концов класса раздалась протестующие возгласы.

4. Составление задач с нереальными данными или даже с содержанием, не соответствующим действительности, имеет место и тогда, когда предлагают учащимся повторить сюжет задачи с изменением числовых данных („составить задачу вроде этой“) и они переносят содержание задачи с определенными числовыми данными, могущими изменяться в определенных границах (вес предмета, стоимость, размер, скорость и т. п.), на любые произвольные числа. Наши учащиеся сами, как уже сказано, критически относятся к подобного рода задачам, но учитель должен своевременно выправлять такие нереальные задачи; кроме того, он должен предлагать учащимся выписывать из газет, журнальных статей и других источников числовые данные для использования их при составлении задач. Эта работа способствует расширению кругозора учащихся, разнообразию содержания составляемых ими задач.

5. Для самостоятельного составления задач учащимся можно предложить использовать разнообразные таблицы сравнительных скоростей (пешехода, лошади, автомобиля, самолета и др.), удельного веса различных веществ, сравнительных глубин океанов, длин больших рек, расстояний от Москвы до других городов и т. д.

6. Большое воспитательное значение имеет самостоятельное составление задач учащимися на определенную указываемую учителем тему при условии, что учащиеся сами установят, какие числовые данные нужны для ее решения, и самостоятельно найдут их. Такими являются задачи, возникающие во время экскурсии на завод, на строительство жилого дома, в поле, когда там убирают хлеб, стоят стога сена, на реку, когда по ней сплавляют лес, и т. д.

7. Когда учащиеся предлагают однотипные задачи

с различными числовыми данными, учитель может использовать их для вывода общей формулы решения, выписав с этой целью их в виде таблицы. Решение предложенных различных частных случаев при этом полезно составлять и оставлять решение задач в виде числовых строчек, не выполняя немедленно промежуточных вычислений.

Поощряя учащихся к самостоятельному составлению задач, учитель должен в первую очередь сам составлять задачи, как это нами указывается в отдельных главах этой книги. В частности, учитель должен составлять задачи, аналогичные тем, которые даны в арифметическом задачнике, и решать их в классе с тем, чтобы оставить задачи из задачника для самостоятельной домашней работы учащихся.

Учащиеся V и VI классов охотно сохраняют свои удачно составленные задачи, вносят их в общеклассный альбом с указанием фамилии автора, доводят до сведения учащихся параллельных классов. Такое эмоциональное удовлетворение является стимулом дальнейших успешных занятий арифметикой.

Приведем задачи, составленные учащимися VI класса¹:

1) Стоял летний день. На колхозных полях кипела работа. Шла уборка урожая. Четыре отряда пионеров г. Ташкента вызвались помогать колхозникам собирать хлопок. К концу дня пионеры четырех отрядов собрали 1890 кг хлопка. Сколько килограммов хлопка собрал каждый отряд, если количества хлопка, собранные ими, относятся, как числа 2:8:5:3?

2) В этом году в нашей стране вырастили небывалый урожай. У колхозов стало очень много хлеба. Машины друг за другом идут в город на элеватор. В колхозе „Красный Октябрь“ собрали урожай с 1 га по 390 ц. Все поле было 130 га.

Пшеницу, собранную на части поля, составлявшей 40% всего поля, перевозили на машинах; всего сделали 3 рейса. По сколько центнеров возили в каждый рейс, если во II рейс перевезли 150%, а в III рейс—400% того количества зерна, которое перевезли в I рейс?

¹ Школа № 1 г. Челябинска; стиль задач сохранен.

Глава XIII

ПРОПОРЦИИ. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. Введение

Полное учение о пропорциях изложено в знаменитых „Началах“ Евклида. Евклид строит две теории пропорций: величин и чисел. Для Евклида число—„собрание единиц“—число целое, выражающее дискретную величину. В его время не было установлено взаимно однозначное соответствие между геометрической величиной (непрерывной) и числом, и отношение двух отрезков, площадей или объемов не сводилось к отношению двух чисел. В теории целых чисел (арифметика древних) Евклид вводит взаимно однозначное соответствие между целым числом и отрезком, составленным из определенного отрезка—единицы. Таким образом, известные аксиомы Евклида о величинах положены в основу арифметики целых чисел, и действия над целыми числами сведены к действиям над отрезками¹.

После введения дробного числа определения и выводы, сделанные для целых чисел, были распространены и на дробные числа.

В первом известном, неоднократно упоминаемом нами русском руководстве по арифметике Л. Ф. Магницкого не встречаются пропорции, хотя рассматриваются отношения, задачи на тройное правило и даже прогрессии. Ученик Магницкого Николай Курганов в изданной им „Арифметике“ вводит пропорции перед рассмотрением тройного правила (в 1757 г., через 54 года после издания „Арифметики“ Магницкого).

В конце того же XVIII века Дмитрий Аничков в курсе арифметики излагает пропорции и прогрессии в одной главе².

Вопрос о месте преподавания пропорций ставится методистами по-разному. Одни рассматривают пропорцию как числовое тожде-

¹ „Геометризация“ арифметики в противоположность современному сведению зависимости между геометрическими величинами к зависимости между числами—арифметизации геометрии.

² Д. Д. Галанин, История методических идей по арифметике в России XVIII века, М., 1915.

ство или уравнение с неизвестным членом и, таким образом, ставят вопрос об изучении пропорции на буквах в курсе алгебры или в теоретических курсах арифметики („пропорция изучает некоторые общие свойства“), относя туда же и рассмотрение того случая пропорций, когда члены—определенные числа, обозначенные цифрами. Последний случай является предметом изучения в курсе арифметики средней школы, как прием для решения многих задач с пропорциональной зависимостью чисел и величин, к изложению которого мы и перейдем. Сторонники исключения раздела о пропорциях из курса арифметики средней школы вносят вполне реальное предложение: задачи этого рода решать в несколько действий и некоторыми искусственными упрощающими приемами. Становясь на практическую точку зрения, они указывают, что во многих так называемых задачах „на пропорцию“ расходуется арифметическая точность и житейская практика (например, при больших партиях товара делается скидка, и количество купленного товара не пропорционально стоимости; при меньшем числе часов работы производительность труда повышается и не будет пропорциональна времени и т. п.) и что в решении задач на пропорции учащиеся, механически применяя пропорцию, доходят до курьезов, когда пытаются решать пропорцией и такого рода задачу: „Один человек пройдет весь путь за определенный промежуток времени. Сколько времени потребуется, если пойдут вместе два человека“, и т. п.

В некоторых учебниках еще сохраняется раздел „Арифметические пропорции“, в настоящее время не изучаемый в школе. Числа, входящие в зависимость $a - b = c - d$, были названы „пропорциональными“ (аналогия с кратной пропорцией выражается в наличии равенства двух отношений, называемых арифметическими, или разностными). Некоторый интерес представляет „арифметическая пропорция“, потому что она встречается при вычислении среднего арифметического двух чисел (и при рассмотрении свойства любого члена арифметической прогрессии). Из непрерывной арифметической пропорции $a - b = b - c$ имеем среднее арифметическое двух

чисел: $b = \frac{a + c}{2}$; из непрерывной геометрической пропорции

$a : b = b : c$ имеем среднее геометрическое: $b = \sqrt{ac}$.

В программе арифметики русской дореволюционной школы вопрос „о пропорции“ изучался после вопроса „об отношении“. В ныне действующей программе вопрос „об отношении двух чисел и замене отношения дробных чисел отношением целых чисел“ изучается в V классе в разделе „Обыкновенные дроби“ и повторяется в разделе „Десятичные дроби“.

В данной главе мы излагаем тему „Пропорции“ согласно указанию ныне действующей программы по арифметике для VI класса средней школы. Конечно, приступая к изучению темы „Пропорции“ в VI классе, необходимо повторить с учащимися все, что им известно об „отношении двух чисел“ из курса V класса.

Пропорции производные, непрерывные, свойство равных отношений излагаются, согласно программе, позднее, в VII и VIII классах средней школы, где они применяются к решению уравнений вида пропорции в курсе алгебры и к изучению пропорциональных отрезков и подобия фигур в курсе геометрии.

§ 2. Пропорции

Выяснение понятия. 1. На конкретных примерах выясняется новое для учащихся понятие „равенство двух выражений“.

Прежде всего можно, например, предложить учащимся записать ту мысль, что $10,3 + 6,7$ составляют столько же, сколько $10 + 7$, или что $22,2 - 5,2$ составляют столько же, сколько $10 + 7$.

2. Повторяют все, что учащиеся знают об отношении чисел и об отношении величин как отношении численных значений этих величин, полученных при одной и той же единице измерения.

3. Затем устанавливается понятие о кратной пропорции, или просто пропорции, после приведения нескольких примеров и записи равенства двух отношений.

Хорошим примером служит обычно числовой масштаб. Пусть имеем масштаб 0,01. Отрезок в 5 см на плане изображает длину в 500 см (5 м) в натуре; отрезок в 7 см на плане изображает длину в 7 м в натуре. Найдём отношения:

$$5 \text{ м} : 5 \text{ см} = 500 \text{ см} : 5 \text{ см} = 100;$$

$$7 \text{ м} : 7 \text{ см} = 700 \text{ см} : 7 \text{ см} = 100;$$

имеем пропорцию:

$$500 : 5 = 700 : 7,$$

или

$$5 \text{ м} : 0,05 \text{ м} = 100;$$

$$7 \text{ м} : 0,07 \text{ м} = 100;$$

$$5 : 0,05 = 7 : 0,07; \text{ пропорция.}$$

В учебниках обычно дается определение пропорции как равенства двух отношений. Полезно уточнить: если записать: $500 : 5 = 100$; $700 : 7 = 100$, то здесь имеются два равных отношения (отношения равны), но нет пропорции. Имеются 4 числа, из которых можно составить пропорцию: $500 : 5 = 700 : 7$.

Запись пропорции дается и при помощи двоеточия и при помощи черты:

$$5 : 500 = 7 : 700; \frac{5}{500} = \frac{7}{700}.$$

Употребление черты при записи отношения очень полезно, так как учащиеся нередко забывают, что черта при записи дроби есть знак деления, что дробное число рассматривается не только как собирание долей единицы, но и как частное от деления двух чисел.

Среди отношений, которые сравниваются, должны быть дробные отношения и отношения с дробными членами:

$$4\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4} = 7\frac{3}{4} : 3\frac{7}{8}; 2,75 : 3\frac{2}{3} = 5,5 : 7\frac{1}{3} \text{ и т. п.}$$

Чтение пропорции. Затем переходят к чтению пропорций; при этом следует упражнять учащихся в чтении пропорции различными способами. На этих упражнениях учащиеся усваивают смысл пропорции.

Пропорция $24 : 8 = 30 : 10$ читается: а) отношение 24 к 8 равно отношению 30 к 10 (если 24 разделить на 8 частей, то получится столько же, сколько получится, если 30 разделить на 10 частей); б) 24 относится к 8 так, как 30 относится к 10 (или 8 содержится в 24 столько же раз, сколько раз 10 содержится в 30); в) 24 больше 8 во столько же раз, во сколько 30 больше 10 (или 8 во столько же раз меньше 24, во сколько раз 10 меньше 30).

Пропорция $7 : 35 = 4 : 20$ читается так: а) отношение 7 к 35 равно отношению 4 к 20; б) 7 относится к 35 так, как 4 относится к 20; в) 7 составляет такую же часть от 35, какую часть 4 составляет от 20.

Название членов пропорции. Сообщаются названия членов пропорции, причем следует обратить внимание на допускаемую учащимися ошибку: в случае, когда отношения записаны в виде

¹ Учащиеся иногда пытаются сократить члены каждого отношения. Тогда они убеждаются, что взятые отношения равны $\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$, но при этом они не сохранили тех чисел, отношение которых вычисляли.

дроби, учащиеся часто называют крайними членами оба знаменателя. Для ориентировки можно отношение, записанное слева, называть первым отношением, записанное справа—вторым.

Затем следуют упражнения учащихся: а) в самостоятельном подборе четырех чисел для составления пропорции; б) в подборе чисел, из которых может быть составлена пропорция с наперед заданным отношением или наперед заданными членами отношения (двумя и тремя); в) в выборе из данных отношений таких, из которых может быть составлена пропорция; г) в проверке правильности написанного равенства. Полезно давать упражнения, в которых учащиеся должны будут установить невозможность получения равных отношений.

**Основное
свойство
пропорции.**

На тех упражнениях, в которые входят небольшие числа в качестве членов, постоянно надо проверять и устанавливать факт, что в пропорции произведение крайних членов равно произведению средних ее членов. Полезно выяснить основное свойство пропорции на числовом примере, например,

$$\frac{5}{10} = \frac{3\frac{1}{2}}{7}; \text{ после приведения обеих дробей к общему}$$

$$\text{знаменателю получается: } \frac{5 \cdot 7}{70} = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 10}{70}, \text{ откуда } 5 \cdot 7 = \\ = 3\frac{1}{2} \cdot 10.$$

Имеются различные приемы доказательства основного свойства пропорции. Одно из них:

имеем $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, умножаем обе части данной пропорции на bd , получаем:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd, \text{ откуда } ad = cb, \text{ или } ad = bc.$$

Учащиеся VI класса могут обосновать и обратное предложение, а именно: если имеются 4 числа, такие, что произведение двух из них равно произведению двух других, то из этих чисел может быть составлена пропорция.

Объяснение проводится на числовом примере. Учащиеся убеждаются, что в данном случае, например, если $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10$, то можно составить не одну, а восемь пропорций.

Знание основного свойства пропорции используется для проверки пропорции (данной пропорции или составленной самостоятельно) и для нахождения неизвестного члена пропорции.

Проверка пропорции. Проверку пропорции можно делать двумя способами: проверить равенство отношений и проверить равенство произведений крайних и средних членов.

Первый прием проверки пропорции уже приводился. Теперь даются учащимся упражнения для проверки правильности данной или составленной ими самостоятельно пропорции на основании равенства произведений крайних и средних членов; можно одновременно применять оба приема как для их сопоставления, так и для повторения предыдущего.

Перестановка членов пропорции. Проверкой пропорции (обоими способами) надо пользоваться для того, чтобы установить на числовых примерах, что пропорция останется верна, если переставить местами крайние члены пропорции друг с другом.

Объяснение. Произведение крайних членов от перестановки не изменяется, произведение средних также не изменилось, значит, и равенство между ними сохранилось (пропорция останется также верна, если переменить местами ее средние члены).

$\boxed{20} : 4 = 15 : \boxed{3}$; $20 \cdot 3 = 60$; $4 \cdot 15 = 60$ Каждое отношение равно 5.

$\boxed{3} : 4 = 15 : \boxed{20}$; $3 \cdot 20 = 60$; $4 \cdot 15 = 60$ Каждое отношение равно $\frac{3}{4}$.

Также:

$20 : \boxed{4} = \boxed{15} : 3$ Каждое отношение 5.

$$20 \cdot 3 = 3 \cdot 20; 4 \cdot 15 = 15 \cdot 4$$

$20 : \boxed{15} = \boxed{4} : 3$ Каждое отношение равно $\frac{4}{3}$.

Числа, взятые нами в рамку, полезно при записи на доске выделить рамочкой или цветным мелом, или подчеркиванием.

Надо тщательно разъяснить учащимся, что в рассмотренных случаях изменяются отношения, из которых состоит пропорция, но сохраняется равенство отношений (для каждого случая). После этого нетрудно понять (и проверить), что в пропорции можно менять местами и крайние члены и средние.

Пропорция сохраняется, если первое отношение записать вторым, а второе первым:

$$20 : 4 = 15 : 3;$$

$$15 : 3 = 20 : 4.$$

В этом случае изменилась только запись пропорции.

Для систематизации можно с учащимися на доске (и в тетрадах) записать пропорции в восьми видах.

Упрощения. Проверкой и соответствующим пояснением решаются упражнения, в которых надо сократить члены пропорции или освободить пропорцию от дробных членов.

Проверку можно выполнять любым из способов.

Пример. Будет ли верна пропорция $75 : 15 = 105 : 21$, если оба члена первого отношения разделить на 5? Почему?

Будет ли верна пропорция $75 : 15 = 105 : 21$, если разделить предыдущие члены на 5? Проверить и объяснить, почему пропорция верна, и т. д.

Указание. Объяснение можно давать, основываясь на свойстве членов отношения, но учащиеся могут оперировать и понятием о изменении частных при изменении делимых и т. д.

Правила в данном случае не даются, учащиеся должны понимать, что можно выполнить то или иное преобразование и уметь проконтролировать (проверить верность) выполненное преобразование.

Нахождение неизвестного члена пропорции. Учащиеся в предыдущих упражнениях самостоятельно составляли примеры пропорций путем подбора чисел и соответствующей проверки правильности составленной пропорции. Теперь надо поставить перед учащимися вопрос о том,

что по трем членам пропорции можно вычислить четвертый член, пользуясь основным свойством пропорции.

Упражнения решаются в такой последовательности:

$$\text{а) } x:b=c:d; \quad \text{б) } a:b=c:x; \quad \text{в) } a:x=c:d; \\ \text{г) } a:b=x:d.$$

Проведенные обследования показали разнообразие приемов, которые применяются учащимися средней школы при решении пропорции. Укажем некоторые из них.

1. В случае пропорции с дробными членами заменяют отношения дробных чисел отношением целых чисел и, избегая действий с дробями, пишут:

$$x : \frac{3}{4} = 3\frac{1}{3} : \frac{2}{5}; \quad 4x : 3 = 50 : 6,$$

откуда находят $x = 6\frac{1}{4}$; или решают еще более сложно, приводя к одному знаменателю все члены указанной выше пропорции, и, отбросив его, пишут: $60x : 45 = 200 : 24$, откуда находят $x = 6\frac{1}{4}$.

2. Отдельно выполняют деление в левой и правой частях, затем находят неизвестный член пропорции:

$$x : \frac{3}{4} = 3\frac{1}{3} : \frac{2}{5}; \quad x : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}x; \quad 3\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{25}{3}; \\ \frac{4}{3}x = \frac{25}{3}; \quad x = \frac{25 \cdot 3}{3 \cdot 4} = 6\frac{1}{4}.$$

3. Сначала находят произведение средних (крайних) членов, затем делением на известный крайний (средний) член находят искомое:

$$x : \frac{3}{4} = 3\frac{1}{3} : \frac{2}{5}; \quad \frac{3}{4} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 3} = \frac{5}{2}; \\ x = \frac{5}{2} : \frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 6\frac{1}{4}.$$

4. Сначала находят известное отношение и умножением на известный средний (крайний) член находят искомое:

$$x : \frac{3}{4} = 3 \frac{1}{3} : \frac{2}{5}; 3 \frac{1}{3} : \frac{2}{5} = 8 \frac{1}{3};$$

$$x = 8 \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{25 \cdot 3}{3 \cdot 4} = 6 \frac{1}{4}.$$

Нами доведены до конца вышеуказанные приемы решения пропорций; надо сказать, что из-за запутанности одних решений, методической нецелесообразности других часты случаи, когда учащиеся не доводят решения примера до конца.

Наилучшим приемом мы считаем следующий:

$$1) x : \frac{3}{4} = 3 \frac{1}{3} : \frac{2}{5}; x = \frac{\frac{3}{4} \cdot 3 \frac{1}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{25}{4} = 6 \frac{1}{4}.$$

$$\text{Проверка. } 6 \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{25 \cdot 2}{4 \cdot 5} = 2 \frac{1}{2};$$

$$\frac{3}{4} \cdot 3 \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 3} = 2 \frac{1}{2}.$$

$$2) 2 \frac{2}{3} : 0,03 = 1 \frac{7}{9} : x; x = \frac{0,03 \cdot 1 \frac{7}{9}}{2 \frac{2}{3}} = \frac{3 \cdot 16 \cdot 3}{100 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{50}.$$

$$\text{Проверка. } 2 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{50} = \frac{8 \cdot 1}{3 \cdot 50} = \frac{4}{75};$$

$$0,03 \cdot 1 \frac{7}{9} = \frac{8 \cdot 16}{100 \cdot 9} = \frac{4}{75}.$$

При нахождении неизвестного члена пропорции мы считаем неудачным рекомендуемый некоторыми авторами прием предварительной замены отношения дробных чисел в пропорции отношением целых чисел.

При вычислении неизвестного члена пропорции желательно сначала лишь указать числовой формулой, какие действия над какими числами должны быть выполнены, затем сделать возможные сокращения сомножителей и только после этого выполнить фактическое умножение и деление.

Упражнения, как всегда, даются в определенной последовательности трудностей; сначала данные числа—числа целые, затем—дробные (обыкновенные и десятичные).

Более сложными будут упражнения, где неизвестный член пропорции $2x$, или $3x$, или $\frac{x}{2}$ и т. д., но к концу учебного года при повторении темы учащиеся должны и с такими упражнениями свободно справляться.

$$\begin{aligned} \text{Пример. } 2x : 9 &= 2 \frac{1}{3} : 5 \frac{1}{4} ; 2x = \frac{9 \cdot 2 \frac{1}{3}}{5 \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{9 \cdot 7 \cdot 4}{3 \cdot 21} = 4 ; x = 2. \end{aligned}$$

Правило вычисления крайнего или среднего члена пропорции—по учебнику.

§ 3. Пропорциональность величин. Решение задач пропорцией

В нашей методической литературе по математике нет установленной точки зрения на распределение учебного материала при изучении пропорций и пропорциональности величин.

В программе арифметики русской дореволюционной школы после вопроса об отношении рассматривался вопрос о пропорции, затем вопрос о пропорциональной зависимости величин, который сводился к решению задач на тройное правило.

В советской средней школе придается огромное общеобразовательное и воспитательное значение введению идеи функции в преподавание математики. Тема „Пропорции. Пропорциональные величины“ является первой, в которой учащиеся в систематическом плане изучают простейшие виды функциональной зависимости величин. В связи с этим в некоторых руководствах по арифметике сначала вводится понятие пропорциональной зависимости величин, затем рассматривается вопрос о пропорциях и их использовании при решении соответствующих задач¹.

Но так как основным свойством пропорциональности величин является наличие равенства отношений двух пар соответствующих им значений (пропорция), то правильнее исходить именно из этого свойства пропорциональных величин, поясняющего учащимся термин „пропорциональные“, и, кроме того, более последовательно от

¹ Как, например, в изданном 1933 г. „Курсе арифметики для педтехникумов“ и некоторых других.

изучения отношения перейти к изучению равенства двух отношений—пропорции, не разрывая этих двух вопросов новым, требующим тщательной переработки,—понятием функциональной зависимости. Поэтому мы даем порядок изложения рассматриваемого нами раздела, принятый в стабильном учебнике: пропорции, понятие о пропорциональности величин, решение задач на пропорциональные величины.

План работы. Уже неоднократно учащиеся имели дело с переменными взаимозависимыми величинами, в частности при решении задач. Но здесь впервые подытоживаются и систематизируются накопленные ими знания. Тщательно, на примерах выясняются учащимися понятия: переменная и постоянная величины: зависимая и независимая. Примеры берутся только в числовом выражении; составляются таблицы. Примеры должны быть возможно разнообразнее и подобраны так, чтобы, анализируя данные, учащиеся могли установить в одних случаях определенную зависимость между величинами, в других случаях (более сложных) только констатировать наличие зависимости между величинами, в некоторых примерах установить независимость рассматриваемых величин.

Учитель должен сам привести несколько примеров постоянных и переменных величин и зависимости между ними и должен побуждать учащихся к тому, чтобы они самостоятельно приводили примеры и из арифметики (изменение результатов действий в зависимости от изменения данных, тексты задач), и из геометрии, и из физики (как, например, изменение веса в зависимости от изменения объема, изменение пути в зависимости от времени, от скорости движения), и из быта учащихся (плата за воду в зависимости от числа членов семьи, квартплата в зависимости от величины жилплощади и т. д.), и из производства (выработка в зависимости от времени работы, от числа станков, от производительности труда и т. п.), и из области сельского хозяйства (заработок и число трудодней; размер урожая в зависимости от количества засеянных гектаров и т. д.).

В процессе работы следует составлять с учащимися таблицы для иллюстрации функциональной зависимости в соответствии с текстом рассматриваемой задачи.

Целесообразно заранее подготовить несколько ственных таблиц, по которым можно делать в дальнейшем обобщающие выводы и проводить повторение.

Таблица I

	Время движения в часах	Средняя скорость в км/час	Расстояние от пункта отправления в километрах
Пешеход . .	3	5	15
Лошадь	3	10	30
Велосипедист .	3	14	42
Автомобиль .	3	50	150

Таблица II

Время движения поезда в часах	Пройденное расстояние от станции в километрах	Средняя скорость в км/час
2	100	50
3	150	50
4	200	50
6	300	50

Таблица III

Для прямоугольника

Основание в сантиметрах	Высота в сантиметрах	Площадь в квадратных сантиметрах
10	3	30
10	6	60
10	12	120
5	3	15
20	5	100

Таблица IV

Для прямоугольника

Площадь в квадратных сантиметрах	Высота в сантиметрах	Основание в сантиметрах
60	5	12
60	10	6
60	15	4
60	20	3

Занятие 1. Из рассмотрения приведенных зависимостей учащиеся устанавливают: 1) что величины бывают постоянные и переменные; 2) что одна и та же величина в одних условиях может быть постоянной, в других — переменной (например, скорость, площадь в таблицах I и II, III и IV);

3) что величины могут находиться друг к другу в некоторой зависимости, но могут и не зависеть одна от другой (например, в таблице II пройденное расстояние зависит от средней скорости движения, но, понятно, оно не зависит от числа человек, пользующихся данным способом передвижения, если их учесть, и т. п.);

4) что зависимость одной величины от другой выражается таким образом: если изменяются числовые данные для одной величины, то получают и другие числовые данные для другой величины, или, как говорят, с изменением одной величины изменяется и другая величина, причем всегда одному значению одной величины соответствует совершенно определенное значение другой величины (соответственные значения);

5) что зависимость между величинами есть зависимость взаимная: если, например, изменяется сторона квадрата, то изменяется площадь квадрата, и обратно;

6) что одна величина может зависеть от различных величин (таблица III, таблицы II и I).

После того как с учащимися тщательно выяснены основные понятия, переходят к рассмотрению того, как одна величина зависит от другой, и к установлению признаков сначала прямой, затем обратной пропорциональной зависимости.

Замечание. Полезно предварительно пояснить понятия прямой и обратной зависимости хотя бы на примере изменения разности в зависимости от изменения уменьшаемого и вычитаемого.

Занятие 2. Сопоставлением чисел таблиц выясняется, что существует такая прямая зависимость между двумя величинами, при которой с увеличением (уменьшением) числовых значений одной величины в несколько раз соответствующие числовые значения другой величины увеличиваются (умень-

шаются) во столько же раз. Надо показать учащимся, что в этом случае отношение двух любых числовых значений одной величины равно отношению двух соответствующих им числовых значений другой величины. Такие величины называются прямо пропорциональными друг другу; из соответствующих числовых значений этих величин может быть составлена пропорция (равенство двух отношений). Определения всех выясняемых с учащимися понятий даются по учебнику.

Т а б л и ц а V

Объем стальной отливки в кубических дециметрах	Вес отливки в килограммах
1	7,8
5	?
10	?
?	390
?	1170

У п р а ж н е н и е. Выяснить неизвестные числовые значения одной из двух прямо пропорциональных величин, данных в таблице V, когда известно по крайней мере одно ее числовое значение и известны числовые значения другой величины (не меньше двух), например:

$$\frac{x}{7,8} = \frac{5}{1}; \quad x = 39 \text{ кг и т. д.}$$

Из этих упражнений учащимся ясно, что для нахождения одного числового значения одной из двух прямо пропорциональных величин нет необходимости выписывать более двух строчек из таблицы пропорциональных величин.

Затем переходят к решению задач по задачку, в условии которых рассматриваются две прямо пропорциональные величины. Следует указать учащимся, что до решения задачи надо выяснить, будут ли данные в задаче величины прямо пропорциональными или нет. (Задачи „на простое тройное правило“.)

Запись решения задачи (способом пропорции):

Изготовлены за $3\frac{1}{2}$ часа 56 болтов

„ 12 час.— x „

$$\frac{x}{56} = \frac{12}{3\frac{1}{2}}; x = \frac{56 \cdot 12}{3\frac{1}{2}} = \frac{56 \cdot 12 \cdot 2}{7} = 192 \text{ (болта).}$$

Объяснение: а) отношение двух числовых значений одной величины равно отношению соответствующих им числовых значений другой величины или б) число изготовленных болтов (удобно начинать с искомого) увеличится во столько же раз, во сколько раз увеличилось время работы.

Крайне тщательно должны быть проработаны эти вопросы и указана определенная последовательность записи при решении задач с величинами прямо пропорциональными, хотя они по существу не затрудняют учащихся. Но только после этого можно перейти к рассмотрению и решению задач с обратной пропорциональной зависимостью величин и при этом рассчитывать, что благодаря четкости в выяснении отдельных моментов и этапов работы не будет допущена та неясность, которая часто имеет место при решении учащимися задач с обратной пропорциональной зависимостью величин.

Между прочим, в записях учащихся часто встречаются выражения „прямая“ и „обратная“ пропорции. Нет „прямой“ и „обратной“ пропорции; есть „прямая и обратная пропорциональность величин“.

Занятие 3. Сопоставлением числовых данных в задаче с текстом или чисел таблицы (например, таблицы IV) выясняется, что существует такая обратная зависимость между двумя величинами (например, основанием и высотой прямоугольника определенной площади), при которой с увеличением (уменьшением) числового значения одной величины в несколько раз соответствующие числовые значения другой величины уменьшаются (увеличиваются) во столько же раз. Таким величинам дается название обратно пропорциональных величин.

Упражнение 1. Проверить, можно ли составить пропорцию из числовых значений двух величин

(основания и высоты), данных, например, в таблице IV. Ясно, что отношение, например, $\frac{10}{5}$ не равно отношению соответствующих значений $\frac{6}{12}$; но рассматриваемые отношения—числа обратные; то же имеет место для отношений $\frac{15}{10}$ и $\frac{4}{6}$, где полученные числа $\frac{3}{2}$ и $\frac{2}{3}$ также числа обратные, и т. д. Таким образом, можно составить пропорцию, но для этого надо взять отношение двух числовых значений одной величины и обратное отношение двух числовых значений другой величины, другими словами, переставить члены второго отношения: $10:5 = 12:6$; также $15:10 = 6:4$. После тщательного выяснения вопроса можно перейти к записи: $10:5 = \frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 12:6$; так же $15:10 = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 6:4$, отношение двух значе-

Таблица VI

Диаметр в милли- метрах	Число обо- ротов в 1 мин
80	200
160	?
?	120

ний одной величины равно отношению двух соответствующих обратных значений другой величины.

2. Вычислить неизвестное значение одной из двух обратно пропорциональных величин по таблице VI.

Решение.

$$x:200 = 80:160, \text{ или } x:200 = \frac{1}{160} : \frac{1}{80};$$

$$x = \frac{200 \cdot 80}{160} = 100.$$

Запись $x:200 = 80:160$ может быть дана сразу как обратное отношение, выполненное перестановкой членов. Такое решение проще для учащихся.

3. Затем решаются задачи на „простое тройное правило“, в условие которых входят обратно пропорциональные величины (способом пропорций). Крайне полезно приучать учащихся подмечать соответствующую зависимость в изучаемых ими вопросах других наук и в окружающем быту, а также

самостоятельно составлять задачи с прямо и обратно пропорциональными величинами.

Указание. При решении задач, в условие которых входят величины обратно пропорциональные, учащиеся часто ошибаются при составлении пропорции, записывая механически: „нижнее число относится к верхнему, как“ и т. д. Надо обратить внимание учащихся на то, что если в первом отношении предыдущий член меньше последующего, то и во втором отношении предыдущий член должен быть меньше последующего, или же, наоборот, в обоих отношениях предыдущие члены должны быть больше своих последующих—только при этом условии может иметь место равенство отношений. В приведенной выше задаче в левой части пропорции число оборотов должно быть меньше, чем 200, и в правой части пропорции предыдущий член 80 действительно меньше последующего 160.

Для избежания ошибок надо при решении задач как с величинами обратно пропорциональными, так и величинами прямо пропорциональными приучать учащихся к определенному плану в работе и определенной технике: а) записывать числовые значения одной величины в одну колонку, числовые значения другой величины—в другую колонку (удобно искомым величину записывать во второй колодке во второй строчке); б) приступая к решению задачи, прежде всего выяснить, зависимые или независимые величины даны в условии задачи, и если даны величины, зависимые друг от друга, то установить, какого характера эта зависимость—прямо или обратно пропорциональная, и затем, в) математически записать эту зависимость и вычислить неизвестное.

Задача. Для погрузки нефти нужно было 30 цистерн вместимостью в 16,5 *t* каждая. Имеются цистерны вместимостью в 24,75 *t*. Сколько таких цистерн нужно для погрузки того же количества нефти?

$$\begin{array}{l} 16,5 \text{ т}—30 \text{ цистерн} \\ 24,75 \text{ т}—x \quad \text{„} \end{array}$$

Объяснение: 1) число цистерн, необходимых для перевозки нефти, зависит от вместимости каж-

дой цистерны, причем во сколько раз больше вместимость каждой цистерны (24,75 *m* вместо 16,5 *m*), во столько же раз меньшее число цистерн (x) придется употребить.

x должно быть меньше 30 во столько раз, во сколько 16,5 меньше 24,75 (оба предыдущих члена отношений меньше обоих последующих):

$$x : 30 = 16,5 : 24,75;$$

$$x = \frac{30 \cdot 16,5}{24,75} = \frac{30 \cdot 66}{99} = \frac{10 \cdot 22}{11} = 20 \text{ (цистерн);}$$

или 2) установив, что между вместимостью каждой цистерны и числом цистерн, которые необходимы для погрузки определенного количества нефти, существует обратно пропорциональная зависимость, записывают равенство отношений:

$$\frac{16,5}{24,75} = \frac{x}{30}.$$

Выше мы указали только один необходимый и достаточный признак обратной пропорциональности двух величин и на основании его решали соответствующие задачи. Из рассмотрения таблиц зависимости обратно пропорциональных величин можно установить и второй признак обратной пропорциональности величин, а именно (в условиях данного вопроса): произведение любого числового значения одной величины на соответствующее значение другой величины остается постоянным.

На основании второго признака обратной пропорциональности величин приведенная выше задача решается так (погружено требуемое количество нефти):

$$x \cdot 24,75 = 30 \cdot 16,5,$$

откуда снова

$$x = \frac{30 \cdot 16,5}{24,75} = 20.$$

Этот прием более затрудняет учащихся, чем первый, и им менее пользуются на практике.

Вопрос о коэффициенте пропорциональности неразрывно связан со всем учением о пропорциональной зависимости и, в частности, со всевозможными практическими применениями понятия пропорциональности. И потому понятны те различные попытки ввести изучение вопроса о коэффициенте пропорциональности в курс арифметики, которые сделаны в математической учебной литературе в послереволюционное время.

Общезвестны трудности, с которыми встречаются учащиеся при ознакомлении с физическими и техническими формулами, когда им, прочно усвоившим, что отношение находится только между однородными величинами, предлагают например, для нахож-

дения скорости делить величины разного рода: путь на время, для нахождения плотности делить массу на объем и т. п.

Лишь позже можно из рассмотрения таких же таблиц (II и III) и приведенных выше задач или других дать понятие о коэффициенте прямой пропорциональности величин, причем надо четко разграничить следующие два момента: признаком прямой пропорциональности величин мы считали постоянство отношения двух числовых значений одной и той же величины теперь указывается еще один признак прямой пропорциональности величин, а именно: постоянство „коэффициента пропорциональности“, т. е. отношения соответствующих числовых значений двух величин.

Например, по данным таблицы I: $\frac{15}{5}$, $\frac{30}{10}$, $\frac{42}{14}$, $\frac{150}{50}$ число 3 есть

„коэффициент пропорциональности“. Можно пояснить учащимся, что коэффициент пропорциональности есть постоянный множитель, на который надо умножить числовое значение одной величины, чтобы получить соответствующее числовое значение другой величины. Примером коэффициента пропорциональности может служить числовой масштаб, рассмотренная выше скорость равномерного движения, удельный вес вещества и т. д.

§ 4. Решение задач приведением к единице

Мы приводили выше решения задач при помощи пропорций; в условие этих задач входят две прямо или обратно пропорциональные величины, причем по двум данным числовым значениям одной величины и одному значению второй величины надо было найти другое соответствующее значение второй величины (находят по трем данным числам четвертое, им пропорциональное). В данном параграфе мы укажем другой употребляемый способ решения этих задач—способ „приведения к единице“.

Рассматриваемые задачи с пропорциональными величинами обычно назывались задачами на „тройное правило“. Учащиеся решают их впервые в разделе целых чисел, затем в разделе дробных чисел без выяснения сущности той функциональной зависимости, которая имеется между величинами, данными в условиях задачи, и без применения термина „пропорционально“; там эти задачи решаются в несколько действий. Этот прием решения рассматриваемых задач в большинстве случаев учащиеся сами указывают, когда приступают к решению задач со сложной зависимостью, и преподаватель может использовать это умение учащихся для того, чтобы показать им более рациональный прием решения при помощи записи в виде дроби.

Тройное правило называлось в средние века „золотой строкою“, „золотым правилом“.

Тройное правило занимает почетное место и в курсах арифметики всех европейских стран с XVI века, когда благодаря откры-

тию новых стран и многим техническим изобретениям широко развивались торговля и промышленность. Также и в XVII и XVIII веках это правило считалось наиболее полезным во всей арифметике (коммерческой), правилом, которое выше всех похвал, „ключ купцов“. Но часто это правило сообщалось учащимся и желающим пользоваться им без объяснений; давался порядок записи чисел и говорилось: „Перемножь два последних, что получится, дели на первое“.

При „обратном тройном правиле“¹ это правило не годилось, поэтому давалось особое правило, и в руководствах задачи на тройное правило излагались: 1) как задачи на прямое тройное правило, 2) как задачи на обратное тройное правило.

Начиная с XV века появляется большое число практических задач различных типов и соответствующих наизусть заучиваемых правил для их решения. Сюда относятся задачи из правила процентов, смещения, цепное правило и т. п., иногда приводятся задачи, требующие запоминания крайне громоздких правил для своего решения. Затем давались пятерное, семерное и тому подобные правила для решения частных случаев задач типа „сложного тройного правила“. Это направление арифметики (со средневековья) давать только правила, без выводов и объяснений, вызывавшее протест со стороны передовой русской общественности, оказало большое влияние на школьное преподавание последую его времени и, пожалуй, проявляется при решении задач на тройное правило до настоящего времени в попытках наших учащихся делить „нижнее число на верхнее“, „меньшее число на большее“ и т. п. Опасность механического решения задач учащимися усугубляется разделением соответствующих разделов в задачниках и снабжением их соответствующими заголовками „прямая“ и „обратная“ пропорциональности. Уже из заголовка учащийся может видеть, какого типа данная задача; таким образом, отпадает необходимость рассуждений. Поэтому необходимо в разделе задач с пропорциональными величинами давать задачи „смешанные“, после обзора каждого типа в отдельности. Не нужно вообще учащимся знать названий „прямое“ и „обратное тройное правило“. Они должны знать термины „прямая и обратная пропорциональности“ и учиться рассуждением решать подобные задачи.

С XVII века получил широкое распространение особый прием решения задач на тройное правило, в целых числах он сводился к введению различных упрощений при вычислении, к разложению данного числа на множители или на слагаемые, введению „промежуточного числа“, например, имеем задачу:

100 м ткани стоят 1471 руб. Сколько стоят 45 м этой ткани?

50 м	ткани	стоят	735	руб.	50	коп.
— 5 м	„	„	73	руб.	55	коп.
45 м	„	„	661	руб.	95	к п.
или 10 м стоят 147 руб. 10 коп.						
+ 40 м	„	„	588	руб.	40	коп.
+ 5 м	„	„	73	руб.	55	коп.
45 м	—		661	руб.	95	коп.

¹ Т. е. при обратной пропорциональности величин.

При практических житейских расчетах этот прием используется и в настоящее время.

План работы. Записать и решить две-три задачи с двумя пропорциональными величинами методом приведения к единице сначала с целыми числами, затем с дробными; сначала с прямо пропорциональными величинами, затем с обратно пропорциональными.

Задача 1. При рытье котлована за $3\frac{1}{2}$ часа было вынута 94,5 куб. м земли. Сколько земли будет вынута при той же производительности труда за 8-часовой рабочий день?

Дается схематическая запись условия задачи:

$$\begin{array}{l} 3\frac{1}{2} \text{ часа} - 94,5 \text{ куб. м} \\ 8 \text{ час.} - x \end{array}$$

Эту задачу умеют решать учащиеся V класса „методом приведения к единице“, записывая решение по действиям. Здесь же учащиеся должны дополнительно до решения задачи установить, что в условии задачи рассматриваются две величины (время и объем вынута земли), что эти величины находятся в прямо пропорциональной зависимости.

Объяснение к решению:

за $3\frac{1}{2}$ часа вынута 94,5 куб. м земли,

$$\text{за 1 час} - \frac{94,5}{3\frac{1}{2}} \text{ куб. м;}$$

$$\text{за 8 час.} - \frac{94,5}{3\frac{1}{2}} \cdot 8 \text{ куб. м}$$

$$\begin{aligned} \text{Запись в одну строку: } x &= \frac{94,5 \cdot 8}{3\frac{1}{2}} = \frac{94,5 \cdot 8}{3,5} = 27 \cdot 8 = \\ &= 216 \text{ (куб. м.)} \end{aligned}$$

Поясняется, почему говорят при решении подобных задач о „приведении к единице“ (2 этапа в рассуждении: от одного множества к единице и от единицы к другому множеству) и указывают, что нет необходимости выполнять вычисления после каждого поставленного вопроса. Предложенная запись в одну строку облегчает вычисления.

Затем решаются методом „приведения к единице“ задачи, в условия которых входят две обратно пропорциональные величины.

Задача 2. Для погрузки нефти нужны были 30 цистерн емкостью 16,5 *t* каждая. Сколько цистерн нужно было бы иметь для погрузки того же количества нефти, если бы цистерны были бы емкостью в 24,75 *t*?

$$\begin{array}{l} 16,5 \text{ } t \text{ — } 30 \text{ цистерн} \\ 24,75 \text{ } t \text{ — } x \text{ цистерн} \end{array}$$

$$\text{Решение. } x = \frac{30 \cdot 16,5}{24,75} = 20 \text{ (цистерн).}$$

Надо тщательно следить, чтобы вопросы (и рассуждения) при решении задачи всегда относились к искомой величине. В данной задаче все рассуждения должны относиться к числу цистерн и надо говорить: число цистерн будет больше 30 (или меньше 30 и т. д.).

Заметив, что запись решения задачи с пропорциональными величинами имеет вид дроби, учащиеся при решении задачи должны начать запись такой строчкой: $x = \dots$ и в процессе рассуждения последовательно вписывать множители в числитель и знаменатель. Промежуточные записи излишни.

Крайне полезно приучать учащихся подмечать соответствующую зависимость в изучаемых ими вопросах других школьных предметов, в окружающем быту, а также самостоятельно составлять таблицы и задачи с прямо и обратно пропорциональными величинами.

Таким образом: 1. Учащиеся упражняются в табличной записи условия задачи с пропорциональными величинами и в чтении задачи по составленной таблице.

2. Графики пропорциональных и обратно пропорциональных изменений величин учащиеся чертят на занятиях по алгебре, но и на уроках арифметики полезно пользоваться наглядными иллюстрациями (диаграммами и графиками) при решении соответствующих задач.

3. Читая учащимся условие задачи, не сообщают им, из какого раздела дается задача: из отдела ли задач с прямо пропорциональными или с обратно пропорциональными величинами.

4. Учащимся надо указать, что в задачах с пропорциональными величинами дается как бы схема практического вопроса. В жизни нет абсолютной пропорциональности величин (например, не все рабочие работают одинаково быстро).

5. Учащиеся: а) решают задачи способом пропорции; при этом они должны пояснять, на основании какого признака они считают величины, данные в задаче, пропорциональными, б) решают задачи и способом приведения к единице с подробным объяснением, в) могут решать в отдельных случаях указанным выше приемом „промежуточного числа“.

6. При решении задач с пропорциональными величинами переход к искомой величине может быть сделан через любую „единицу“. Например:

а) „Из двух сцепленных колес одно, имеющее 75 зубцов, делает 92 оборота. Сколько оборотов делает колесо с 45 зубцами?“ Промежуточным числом в данном примере может быть число 5 (5 зубцов);

б) для решения задачи, например: „ $\frac{3}{4}$ м ткани стоят 2 руб. 30 коп. Сколько стоят $3\frac{1}{2}$ м?“ Промежуточным числом может служить $\frac{1}{4}$ м, которая содержится в $3\frac{1}{2}$ м 14 раз.

Выбор способа решения и соответствующего объяснения в отдельных случаях следует предоставить учащимся, следя за тем, чтобы два основных способа были ими вполне усвоены на достаточном числе решенных задач.

7. С учащимися выясняется, что значит выражение „все прочие условия одинаковы“. Когда дается задача только с двумя пропорциональными величинами, это значит, что мы рассматриваем зависимость только между данными двумя величинами, отвлекаясь от действительной зависимости, которая всегда сложная; когда дается задача с несколькими пропорциональными величинами, мы решаем ее, учитывая последовательно пропорциональность двух величин, на время полагая, что „все прочие условия одинаковы“.

8. Укажем, что решение способом приведения к единице часто требует необычного вопроса или хода рассуждений и дает иногда странный ответ, например:

а) В задаче: „Сколько метров тесьмы можно купить на 12 руб. 61 коп., если $2\frac{1}{2}$ м стоят 9 руб. 70 коп?“ — приходится необычно ставить вопрос: сколько метров тесьмы дадут на один рубль?—в то время как естественно спросить: сколько стоит один метр тесьмы?

б) Также не всегда соответствуют обычному ходу рассуждений пояснения при ответе на те вопросы, которые ставят, решая способом приведения к единице некоторые задачи, в которых данные выражены дробными числами: например: „За $2\frac{5}{6}$ часа можно выполнить $\frac{1}{2}$ работы. Какую часть работы можно выполнить за $1\frac{1}{2}$ часа (прочие условия—размер работы, производительность труда и т. п. одинаковы)“. В этой задаче на вопрос, какую часть работы можно выполнить за 1 час, приходится пояснить, что за 1 час выполняется работы в $2\frac{5}{6}$ раза меньше.

в) Также в задаче: „Для того чтобы вырыть ров 15 м длинной, послана партия рабочих в 10 человек. Сколько надо рабочих, чтобы в тот же срок вырыть ров 27 м длины при той же ширине?“ При решении ее способом приведения к единице, когда надо поставить вопрос: сколько потребуется рабочих, чтобы в тот же срок при той же ширине рва вырыть 1 м, ответ выражается дробным числом человек: $\frac{2}{3}$ человека и т. п. Надо пояснить учащимся, что этот ответ не должен быть понят буквально: он означает, что для рытья рва в 1 м нужно произвести $\frac{2}{3}$ той работы, которую может выполнить 1 рабочий. (Эту задачу проще решить, взяв промежуточным числом 3 м; незатруднителен способ решения этой задачи и пропорцией.)

г) Также надо постоянно выяснять с учащимися смысл и иных ответов на вопрос задачи, кажущийся им иногда несообразным; так, например, если в ответе на вопрос задачи получилось, что для выполнения работы надо иметь $25\frac{1}{4}$ грузовиков или $57\frac{3}{4}$ чело-

века и т. п., то учащимся надо выяснить смысл ответа, а именно для выполнения указанной работы недостаточно 25 машин или 57 человек, но если взять 26 машин, то последний грузовик пойдет недо руженным, или 58-й человек получит неполную нагрузку (или по количеству работы, или по времени работы), но что округленно надо брать 26 машин (а не 25 хотя погрешность в этом случае была бы меньше) и 58 человек (а не 57), если не хотят оставить часть груза неперевазенной или часть работы невыполненной.

Рассмотрим еще одну задачу:

д) „Чтобы выполнить работу, 35 человек должны ежедневно работать по 8 час. По сколько часов должны ежедневно работать 40 человек, чтобы выполнить ту же работу к этому же сроку?“ Решая эту задачу способом приведения к единице, приходится устанавливать, что один человек может выполнить к сроку работу (при прочих равных условиях), работая ежедневно по $8 \cdot 35 = 280$ час., в сутках же всего 24 часа. Последующие рассуждения эту несообразность снимают, и ответ на вопрос задачи: $280 : 40 = 7$ (час.) ежедневной работы—никакой несообразности не содержит.

Для решения подобных задач, как и задачи в), следует предпочесть или способ решения пропорцией, или какой-либо из способов, видоизменяющих способ приведения к единице; например, для данной задачи целесообразно узнать размер работы в человеко-часах—получится $8 \cdot 35$ человеко-часов работы; тогда как и прежде

на одного из 40 человек придется $\frac{8 \cdot 35}{40} = 7$ (час. ежедневной работы).

Вообще при решении задач, связанных с понятием пропорциональности величин, не следует забывать, что практическое значение имеет пропорциональность между данными величинами только до тех пор, пока они не выходят из известных пределов, несмотря на совершенно правильный, с точки зрения арифметики, теоретический результат. Пусть 5 рабочих могут сделать работу за 10 час. За сколько часов сделают эту работу 1000 рабочих? Ответ „за 3 мин.“, конечно, практически неверен, так как 1000 рабочих нечего делать на этой работе, и они будут только мешать друг другу.

Но все же для решения задач с тремя и более пропорциональными величинами способ приведения к единице удобен, и надо его использовать, выяснив те трудности, о которых сказано выше.

§ 5. Сложная зависимость.

В настоящей работе надо рассмотреть несколько примеров сложной зависимости. Для этого можно исследовать те же величины, которые были прежде рассмотрены по таблицам I, II, III, IV и др.

План работы. *Занятие 1.* 1) Сопоставлением числовых значений величин, данных в таблице I и II, устанавливают, что 3 элемента равномерного движения: путь, скорость и время движения—находятся в зависимости и что: а) путь зависит от двух величин, что путь изменяется прямо пропорционально времени движения и прямо пропорционально скорости его; также из рассмотрения чисел таблиц III и IV устанавливают, что б) площадь прямоугольника изменяется прямо пропорционально основанию его и высоте. Из сопоставления чисел строчек указанных таблиц устанавливают, что а) время движения также зависит от двух величин: оно изменяется прямо пропорционально пройденному пути и обратно пропорционально скорости; что скорость изменяется прямо пропорционально пройденному пути и обратно пропорционально времени движения; так же устанавливается, что б) основание (высота) прямоугольника изменяется прямо пропорционально его площади, если высота (основание) прямоугольника не меняется, и обратно пропорционально высоте (основанию), если площадь не меняется.

Также можно разобрать с учащимися на задачах с текстом зависимость между размером любой работы, числом работников и временем работы; зависимость между стоимостью товара, его ценой и количеством купленного товара и т. д.

2) Рассматривается случай, когда одна величина изменяется обратно пропорционально двум другим величинам; например, в случае, когда надо выполнить определенную работу за определенный срок, нагрузка на одного человека во столько раз меньше, во сколько раз больше число человек, поставленных на данную работу; также нагрузка на одного человека во столько раз меньше, во сколько раз больше производительность труда каждого работающего.

По определенным числовым значениям величин можно установить, что время, на которое хватит определенного запаса хлеба, фуража и т. д., обратно пропорционально и числу людей, пользующихся этим запасом, и порции, получаемой каждым, и т. п.

Занятие 2. Решение задач со сложной зависимостью величин, входящих в условие¹.

Приведем решение одной из задач; например: „Для 24 коров запасено на 6 дней 720 кг сена, но число коров увеличилось на одну корову, и сена доставили больше, чем предполагали, а именно, доставили сена 1 т. На сколько дней хватит коровам этого сена при прежней норме?“.

Запись условия в 2 строчки не обязательна, но часто облегчает работу, помогая выяснению условия задачи:

24 коровы— 720 кг—6 дней

25 коров —1000 „ —х „

Учащиеся должны усвоить условие задачи: 1) установить, какие величины рассматриваются в задаче; какие значения даны для них; какая величина является искомой; 2) выяснить, в каком отношении находится искомая величина к остальным данным величинам.

В задаче надо узнать время, на которое хватит запасенного сена.

Спрашивается: от чего же зависит это время? когда, при каких условиях сена хватит на большее время, когда—на меньшее?

1. Ясно, что можно решать предложенную нами задачу обычным приемом решения сложной арифметической задачи (по вопросам), не считая, что подобную задачу надо обязательно решать каким-либо особым приемом.

Приведем решение указанной выше задачи с отдельной записью каждого вопроса:

1) $6 : 720 = \frac{1}{120}$; $\frac{1}{120}$ часть дня можно прокормить 24

коровы 1 кг сена согласно норме.

2) $\frac{1}{120} \cdot 1000 = 8 \frac{1}{3}$; $8 \frac{1}{3}$ дней можно прокормить 24

коровы 1 т сена;

¹ Задачи на „сложное тройное правило“; в данном случае „пятёрное“.

$$3) 8 \frac{1}{3} \cdot 24 = \frac{25 \cdot 24}{3} = 200; \text{ 200 дней можно было бы}$$

прокормить 1 корову 1 т сена по норме;

$$4) 200 : 25 = 8.$$

Ответ. 8 дней могут питаться 25 коров одной тонной сена согласно норме.

2. Приведем объяснение решения этой задачи тем же способом, но с иной записью. Если бы сена было запасено меньше, а именно 1 кг, то его хватило бы для тех же 24 коров на срок (число дней), меньший в 720 раз (прямая пропорциональность): $\frac{6}{720}$ дней, но в дей-

ствительности запасено 1000 кг сена; для тех же коров его хватит на срок, в 1000 раз больший: $\left(\frac{6 \cdot 1000}{720}\right)$ дней, но если бы этим сеном питалось не 24, а

меньшее число коров, например только одна корова, то сена хватило бы на срок (на число дней), в 24 раза больший (обратная пропорциональность):

$\frac{6 \cdot 1000 \cdot 24}{720}$ дней; для 25 коров этого же сена при той

же норме хватит на $x = \frac{6 \cdot 1000 \cdot 24}{720 \cdot 25} = \frac{100 \cdot 24}{12 \cdot 25} = 8$ (дней).

Таким образом, решение сложной задачи свелось к решению четырех простых задач и к записи одной строчки для x . (Можно указать учащимся, что такую запись в одну строчку, как в выше решенной задаче, они имели тогда, когда, решая задачу по вопросам, давали ответ числовой формулой.)

В предварительных упражнениях, рассматривая сложную зависимость, учащиеся устанавливали, в каком случае имеет место прямая пропорциональность величин, в каком случае — обратная пропорциональность. Это являлось целью работы.

При решении задачи в процессе рассуждения нет необходимости каждый раз называть зависимость, и в приведенном выше объяснении название зависимости взяты в скобки.

Упрощение при записи решения одной строкой заключается в том, что не вычисляются промежуточные

результаты: $\frac{1}{120}$, $8 \frac{1}{3}$ и т. д.; на это следует обратить внимание учащихся.

Следует поощрять инициативу учащихся, когда они хотят задачу на пропорциональную зависимость решать особым, нетипичным приемом, исходя из свойств чисел, даваемых в условии задачи.

Так, задачи с пропорциональными величинами могут быть решены „методом отношений“ или „методом пропорций“. Применим „метод отношений“ к решению выше рассмотренной задачи.

3. Имеющегося запаса сена в 720 кг хватит на 6 дней для 24 коров, но число дней, на которое хватит 1000 кг сена для того же числа коров, будет больше в отношении $\frac{1000}{720}$, или $\frac{25}{18}$, т. е. его хватит на $6 \cdot \frac{25}{18}$ дней, но при изменении числа коров в отношении $\frac{25}{24}$ сена хватит на меньшее число дней (обратная пропорциональность), т. е. $x = 6 \cdot \frac{25}{18} \cdot \frac{24}{25} = 8$ (дней).

Этот метод довольно прост, и его (полностью или частично) целесообразно использовать в практической работе с учащимися. „Метод пропорции“ мы здесь не излагаем, так как на практике он приводит к излишне громоздким вычислениям, если не использовать сложной пропорции, но сложные пропорции вообще не изучаются в нашей средней школе.

§ 6. Деление в данном отношении

Задачи деления числа в данном отношении обычно называются задачами „на пропорциональное деление“ и даже задачами на „правило пропорционального деления“. Эти разнообразные задачи имели и до сих пор имеют широкое применение.

С древних времен пропорциональное деление прилагалось в тех случаях, когда надо было делить завещанный капитал¹ между наследниками, а также в различных случаях дележа заработка, награды и т. п. Все эти задачи решались тройным правилом, и, как выше сказано, для каждой задачи имелось свое „правило“, которое уче-

¹ См. Л. Ф. Магницкий, Арифметика.

ник старался применить, когда встречал вопрос, похожий на выученный. В старых русских учебниках „правило пропорционального деления“ называлось „правилом товарищества“.

В современных учебниках по арифметике под задачами на пропорциональное деление, или, лучше, на деление в данном отношении, понимают определенный прием решения задач, основные типы которых будут перечислены ниже. Задачи эти часто решаются с помощью производных пропорций или на основании свойства ряда равных отношений, не изучаемых учащимися V класса¹, например, задачу: „Число 132 надо разделить на 2 части пропорционально числам 3 и 8“—решают так:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{8}; \quad \frac{x_1 + x_2}{x_1} = \frac{3 + 8}{3}; \quad \frac{x_1 + x_2}{x_2} = \frac{3 + 8}{8}; \quad \frac{132}{x_1} = \frac{11}{3},$$

откуда находится x_1 , и т. д. Так как учащиеся V класса не знают указанной теории, то эти задачи можно и полезно решать с учащимися непосредственно после изучения вопросов, связанных с отношением чисел. Единственным затруднением является невозможность пользоваться термином „пропорционально“ до того времени, как соответствующее понятие будет с учащимися проработано. Поэтому мы предлагаем в порядке необходимого повторения по окончании отдела о пропорциях снова вернуться к решению нескольких задач на „деление в данном отношении“, называя его „пропорциональным делением“ и употребляя соответствующие термины при вопросах и объяснении (указано ниже).

Задача 1. Приведенная выше задача может служить 1-й задачей по простоте данных: „Целое число 132 надо разделить только на 2 части, причем доля каждой части тоже выражается целым числом (3 и 8)“.

Как всегда, прежде чем приступить к решению задачи, надо тщательно разобрать с учащимися содержание условия задачи: в данном случае надо высказать смысл деления в данном отношении.

Вопрос: как надо разделить число 132? **Ответ:** так, чтобы одна часть относилась к другой, как 3 к 8, или в отношении 3:8 (позже говорят—пропорционально числам 3 и 8). **Вопрос:** что это значит? Наиболее простой ответ: а) это значит разделить число 132 на 2 части так, чтобы в одной части сохранилось 3 таких „частицы“, каких во второй содержится 8 „частиц“; б) это значит разделить число 132 на 2 части так, чтобы одна состояла из 3 таких „частиц“, „паев“, каких во второй содержится 8.

¹ Этот прием указан в „Арифметике“ А. П. Киселева, под ред. А. Я. Хинчина.

Иногда употребляющееся выражение „части“ неудобно, так как; ученику приходится говорить „первая часть“ содержит 3 „части“; слово „доля“, не имея этого недостатка, более удобно и в некоторых случаях поясняет смысл деления в данном отношении, но в других случаях, как, например, в приведенном объяснении, более удобно выражения „частица“ или „пай“, где „паем“ называется каждая из этих равных „частей“, но этот термин мало употребляется в школе.

При решении первой задачи можно ограничиться приведенными выше ответами о смысле деления в данном отношении, но в последующей работе учитель не должен забывать и по-иному толковать смысл этого деления, разнообразя пояснения, например: в) разделить число 132 в отношении 4:8—это значит разделить число 132 на две части так, чтобы вторая часть была больше первой во столько раз, во сколько раз 8 больше 4, т. е. в 2 раза (в случае, если отношение выражается целым числом, или условно—в случае,

когда отношение выражается числом $2\frac{1}{3}$; $3\frac{3}{8}$ и т. п.); или

г) разделить 132 в отношении 3:8—это значит разделить на две части, из которых одна составляет $\frac{3}{8}$ другой (случай дробного

отношения) или вторая составляет $\frac{8}{3}$ первой (равна двум первым

частям и еще $\frac{2}{3}$ ее); при решении задачи полезно проверить

ответ, вычислив сумму найденных чисел; полезно убедиться, что одно из полученных чисел составляет требуемую часть второго; или д) разделить 132 в отношении 3:8—это значит разделить его

на такие 2 части, что $\frac{1}{3}$ доля первой части содержится 8 раз во

второй части или $\frac{1}{8}$ доля второй части содержится 3 раза в пер-

вой части. Повторяем, проверка решения задачи на деление в данном отношении очень полезна для уяснения самой сущности поставленного вопроса.

При решении задач на деление в данном отношении искомые числа иногда обозначаются римскими цифрами I, II, III и т. д., иногда буквами x_1 , x_2 , x_3 и т. д. По существу в этих случаях то или иное обозначение не имеет значения, но некоторые методисты (например, Шохор-Троцкий) относят задачи на пропорциональное деление к „начальным понятиям из алгебры“ и вводят x для обозначения одного из неизвестных, т. е. решают задачи на пропорциональное деление методом уравнений, оговариваясь, что эти задачи могут быть решены и без помощи уравнения, например, данная выше задача 1 решается уравнением:

$$3x + 8x = 132,$$

где x означает 1 пай; задача: „280 надо разделить на такие 2 части,

чтобы одна составляла $\frac{3}{5}$ другой" — решается уравнением:

$$x + \frac{3}{5}x = 280,$$

где x означает всю первую часть, и т. д.

На практике в нашей школе такие записи также имеют место и вполне допустимы для учащихся VI класса.

Решение задачи сводится к следующему рассуждению: для задачи 1) 11 неизвестных частей составляют 132, откуда неизвестная часть числа 12, или для другой задачи $\frac{8}{5}$ неизвестного числа со-

ставляют 280, откуда неизвестное число $x = \frac{280 \cdot 5}{8} = 175$. Но на

практике часто учителя, пользуясь подобной записью, преждевременно решают с учащимися соответствующие уравнения с освобождением от знаменателя в то время, когда учащиеся не имеют основных сведений из теории уравнений. Мы считаем, что арифметические приемы рассуждений, при решении разнообразных задач на пропорциональное деление, имеют большое образовательное значение, и приводим их в дальнейшем.

Задача 2. Деление числа на несколько частей в отношении чисел (или пропорционально ряду чисел) 3, 4, 7. Например, надо разделить число 161 в отношении 3 : 4 : 7. Что означает эта кратко (условно) выраженная запись? Она означает, что число 161 должно быть разделено на 3 части, на три слагаемых, которые в сумме составляют 161, так что первое слагаемое состоит из 3 частиц, — второе — из 4 таких же частиц и третье из 7 таких же частиц. Условная запись: I : II : III = 3 : 4 : 7¹. Для решения задачи надо: 1) сосчитать, сколько частиц во всех 3 слагаемых, 2) узнать, как велика каждая частица, и 3) узнать каждое слагаемое (каждое из искомым чисел).

Замечания. 1. При проверке полученного ответа можно исходить из какого-либо одного из приведенных выше пояснений записи: I : II : III = 3 : 4 : 7. Например, убедиться, что $\frac{1}{3}$ первого числа, а именно $11\frac{1}{2}$, содержится 4 раза во II числе и 7 раз в III и т. д.

¹ На первых занятиях дается запись I : II : III, затем переходят к записи $x_1 : x_2 : x_3$.

2. Мы даем объяснение способа решения задач деления в данном отношении на числовом примере, но понятно, что учитель может использовать с этой целью любую задачу с текстом из задачника.

3. Крайне важно выяснить учащимся (и лучше всего проверкой решения), что в записи $I:II:III = 3:4:7$ они имели следующие отношения, только сокращенно записанные:

$$I:II = 3:4; II:III = 4:7; I:III = 3:7.$$

4. Затем можно рассмотреть задачу деления числа в отношении 4 (и более) целых чисел, решение которой не вносит каких-либо новых трудностей.

Задача 3. Дальнейшим усложнением по сравнению с задачами, решенными ранее, является то, что отношение частей, на которые надо делить данное число, дается в дробных числах.

1. Предварительно следует рассмотреть пример, в котором требуется число разделить только на 2 части, отношение которых между собой равнялось бы отношению двух дробных чисел. Учащиеся знают, что отношение дробных чисел может быть заменено отношением целых чисел, и учатся выполнять это преобразование. Им указывается желательность, но не необходимость выполнения этого преобразования, так как счет дробных чисел более затруднителен, чем счет целых чисел. Если преподаватель найдет нужным, то можно решить задачу и тем и другим приемами.

2. Пусть надо число 100 разделить в отношении

$$\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6}.$$

Прием первый. Учащиеся знают, что этой одной строчкой кратко записаны два отношения, в каждом из которых можно отношение дробных чисел заменить отношением целых чисел:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{6}{12} : \frac{9}{12} : \frac{10}{12} = 6 : 9 : 10;$$

всего частиц $6 + 9 + 10 = 25$;

одна частица $100 : 25 = 4$

искомые числа:

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 36 \\ \hline 40 \\ \hline 100 \end{array}$$

Прием второй. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{6+9+10}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$;

одна частица: $100 : 2\frac{1}{12} = \frac{100 \cdot 12}{25} = 48$; $\frac{1}{2}$ составит 24;

$\frac{3}{4}$ составит 36; $\frac{5}{6}$ составит 40. Ответ тот же.

Замечания. 1. Тщательно должно быть выяснено учащимися, что размер частицы при первом и втором приемах решения задачи неодинаков, что он уменьшится при замене отношения дробных чисел отношением целых чисел, также неодинаково число, но сохраняется отношение числа частиц отдельных частей.

2. Затем выясняется возможность и желательность сокращения членов отношения, когда дан ряд членов (для двух членов этот вопрос рассмотрен); должно быть установлено, что при этом преобразовании размер каждой частицы увеличивается; число частиц, приходящееся на каждую часть, соответственно уменьшается, но отношение их остается тем же.

В дальнейшем учитель должен следить за тем, чтобы учащиеся, где возможно, выполняли сокращение членов ряда, понимая смысл выполняемого преобразования.

3. В решенной выше задаче члены отношения были выражены обыкновенными дробями. В случае, когда они записаны десятичными дробями, рассуждения остаются те же. После замены отношения дробных чисел отношением целых чисел может иметь место сокращение членов отношений.

Задача 4. Дальнейшим усложнением в решении задач на деление в данном отношении можно считать тот случай, когда известно отношение искомым чисел; например, после преобразования дано $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : 3 : 4 : 7$ и 1) известно одно число; например, известно, что на III число приходится 60 единиц, т. е. что 4 частицы составляют 60 единиц; тогда на 1 частицу приходится 15 единиц, дальше — попрежнему. Искомые числа: 15, 45, 60, 105. Или 2) известна сумма двух или нескольких

искомых чисел или разность их, и надо найти одно число или сумму всех. Например, известно, что число IV больше I на 63, т. е. $7-1=6$ составляют 63 единицы, и на одну частицу приходится $10\frac{1}{2}$ единиц и т. д.

Учитель может разнообразить задачи, имеющиеся в задачнике, в которых предлагается разделить данное число в данном отношении, тем, что в соответствии с ответом будет считать известным или какую-либо часть числа, или сумму каких-либо частей, или разность их и предложить учащимся отыскать все число или все части, или какую-либо неизвестную часть.

Например, в задаче „Для получения замазки для дерева берут известь, ржаную муку и масло в отношении 3:2:2. Сколько нужно взять каждого материала в отдельности для получения 4,2 кг замазки?“ Ответ. 1,8 кг, 1,2 кг, 1,2 кг.

Учитель может изменить вопрос задачи, например, таким образом: „Сколько получится замазки, если имеется 1,2 кг масла (все остальные материалы должны быть взяты в указанном отношении)?“

Решение. Всего частиц $3+2+2=7$; на одну частицу приходится $1,2:2=0,6$ (кг); всего замазки имеется $0,6\cdot7=4,2$ (кг). Укажем, что часто при решении подобной задачи допускают лишние вопросы, высчитывая в отдельности, чему равна каждая часть (в данном случае высчитывая, сколько надо взять в отдельности извести и муки), а потом складывая полученные числа.

Задача 5. Пусть надо разложить число на 3 части (или на 3 слагаемых) так, что $x_1:x_2=3:4$; $x_2:x_3=8:7$. Этот случай является общим случаем деления на части в данном отношении.

Прежде всего выясняется смысл того, что на одну и ту же вторую часть в первом отношении приходится только 4 частицы, а во втором отношении 8 частиц. Значит, размер частицы в первом и во втором отношениях неодинаков. Но можно в первом отношении раздробить каждую часть так, чтобы на вторую часть пришлось тоже 8 частиц, тогда соответственно изменится число частиц, при-

ходящихся на первую часть, но размеры частиц в первом и втором отношениях будут одинаковы: (рис. 49).

$$x_1 : x_2 = 6 : 8;$$

$$x_2 : x_3 = 8 : 7;$$

тогда отношение можно будет записать одной строкой и решать задачу, как указано выше.

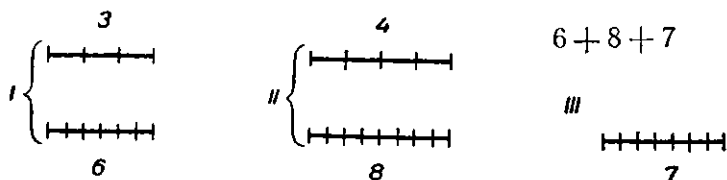


Рис. 49.

Устанавливают, что для уравнивания числа частиц, приходящихся на одну какую-либо часть (служащую связующим звеном между отношениями), надо соответствующие числа дополнить множителями до их наименьшего кратного; рассматриваются случаи соответственно трем случаям нахождения НОК двух чисел:

$$\begin{array}{lll} 1) \text{ I : II} = 3 : 4 & 2) \text{ I : II} = 3 : 4 & 3) \text{ I : II} = 3 : 4 \\ \text{II : III} = 8 : 7 & \text{II : III} = 5 : 7 & \text{II : III} = 6 : 7 \end{array}$$

Более сложные задачи в случаях, когда даны 3 различных отношения и больше, не решаются учащимися средней школы.

Приведем другое решение указанной задачи:

$$\begin{array}{l} \text{I : II} = 3 : 4 \\ \text{II : III} = 8 : 7 \end{array}$$

Первое отношение означает, что первое число составляет $\frac{3}{4}$ второго, второе отношение означает, что третье число составляет $\frac{7}{8}$ второго; тогда отношение всех трех чисел может быть записано:

$$\text{I : II : III} = \frac{3}{4} : 1 : \frac{7}{8} = 6 : 8 : 7 \text{ (попережнему).}$$

Замечания. 1. Полезно разнообразить порядок частей, даваемых в условии задачи; например, давать отношение частей $\text{I : II} = 4 : 3$; $\text{III : I} = 5 : 6$.

2. Учащиеся должны привыкнуть к определенному порядку преобразования, если два отношения даны в дробных числах, например:

$$x_1 : x_2 = 0,3 : 1,24 = 30 : 124 = 15 : 62$$

$$x_2 : x_3 = 3,1 : 1 = 31 : 10 = 62 : 20$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = 15 : 62 : 20.$$

Задача 6. Надо разделить число в отношении, обратном двум или нескольким числам (обратно пропорционально двум или нескольким числам).

1) Надо разделить число в отношении, обратном только двум числам.

Объяснение. Разделить 144 в отношении, обратном числам 3 и 5 (или обратно пропорционально числам 3 и 5)—значит разделить 144 на две части так, чтобы первая относилась ко второй не как 3:5, а как 5:3. Запись $x_1 : x_2 = 5 : 3$, и дальнейший ход решения—прежний.

Учащиеся должны проверкой убедиться, что в рассматриваемом случае можно было данное число делить в отношении $\frac{1}{3} : \frac{1}{5}$, т. е. что $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 5 : 3$.

Надо привести задачу с конкретным содержанием¹, например: „Как надо распределить сумму денег, заработанную двумя рабочими, если известно, что один за 3 часа выполнял такую же работу, какую второй выполнил за 5 часов?“ Ясно, что за то время, за которое первый рабочий выполнил $\frac{1}{3}$ работы, второй выполнил $\frac{1}{5}$ ее, значит, деньги надо разделить пропорционально числам $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$, т. е. искомые суммы: $x_1 : x_2 = \frac{1}{3} : \frac{1}{5} = 5 : 3$ — обратно пропорциональны числам 3 и 5.

2) Разделить число на части, находящиеся в отношении, обратном трем числам (или более) или обратно пропорционально нескольким числам. На-

¹ Можно с нее и начать выяснение вопроса.

пример, разделить число обратно пропорционально 2, 3, 4. Учащиеся могут записать:

$$x_1 : x_2 = 3 : 2 = 6 : 4$$

$$x_2 : x_3 = 4 : 3$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = 6 : 4 : 3;$$

но можно записать $x_1 : x_2 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ (то же отношение 3 : 2)

$$x_2 : x_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} \text{ (то же отношение 4 : 3)}$$

или сразу: $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = 6 : 4 : 3$. Дальнейшее решение задачи незатруднительно.

Устанавливается: „Чтобы разделить число обратно пропорционально данным числам, можно разделить его прямо пропорционально числам, обратным данным“.

Замечание. Выше нами рассмотрена группа задач, в которых указано отношение тех частей, которые должны быть определены. Но имеется другая группа задач как с текстом, так и отвлеченных, для решения которых учащимся самим приходится определять отношение частей, например:

1) В каком отношении надо разделить число (или каково отношение двух чисел), если известно, что одна часть должна быть больше другой в $2\frac{1}{2}$ раза?

2) Разделить число 360 на две части так, чтобы одна часть составляла $\frac{3}{5}$ другой, или 10%, или 30% другой:

$$x_1 : x_2 = \frac{3}{5} : 1 = 3 : 5; \quad x_1 : x_2 = 0,1 : 1 = 1 : 10 \text{ и т. д.}$$

Или 3) надо сделать расчет платы за коммунальные услуги: за электричество, зная мощность употребляемых ламп (тогда учащиеся должны положить, что плата взимается прямо пропорционально мощности используемых ламп); за воду, зная состав членов семьи, полагая, что плата взимается прямо пропорционально числу членов семьи, и т. п.

Для внеклассной работы могут быть предложены более трудные случаи; например, запись отношений трех и более величин по их словесной формулировке

4) Разделить число 310 на 3 части так, чтобы первая составляла $\frac{1}{3}$ второй и чтобы вторая часть составляла $\frac{4}{5}$ третьей. Запись отношений:

$$x_1 : x_2 = \frac{1}{3} : 1 = 1 : 3 = 4 : 12$$

$$x_2 : x_3 = \frac{4}{5} : 1 = 4 : 5 = 12 : 15$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 12 : 15.$$

Ответ. 40, 120, 150.

Рассматривается случай, когда дана сумма или разность чисел и отношение между их частями, например:

5) Разделить число на две части так, чтобы $\frac{1}{2}$ первой части составляла $\frac{1}{3}$ второй части. В каком отношении должно делиться данное число?

Ответ. Искомое отношение $x_1 : x_2 = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = 2 : 3$.

6) „В каком отношении нужно взять конфеты стоимостью в 7,5 руб. за 1 кг и по 7 руб. за 1 кг, чтобы средняя стоимость конфет была 7,2 руб. за 1 кг?“

Запись условия:

$$\begin{array}{l} \text{I. } 7,5 \text{ руб. за } 1 \text{ кг} \\ \text{II. } 7 \text{ руб. } \quad \text{„ } 1 \text{ кг} \end{array} \left. \begin{array}{l} \} 7,2 \text{ руб. за } 1 \text{ кг} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -0,3 \text{ руб.} \\ +0,2 \text{ руб.} \end{array} \left. \begin{array}{l} \} 0,2 \text{ кг} \\ \} 0,3 \text{ кг} \end{array} \right.$$

Задача аналогична задачам, условно названным „на смешение II рода“ (глава „Задачи“) и решенным „методом замены“. В данном случае нельзя применить „метод замены“, так как неизвестно все количество купленных конфет (или стоимость всей покупки).

Решение. При стоимости 1 кг смеси в 7,2 руб. каждый килограмм конфет I сорта оценивался де-

шевле его стоимости на 0,3 руб., а каждый килограмм II сорта, вошедший в смесь, оценивался дороже на 0,2 руб. Для того чтобы уменьшение стоимости I сорта могло быть покрыто повышением стоимости II сорта (стоимость всей покупки не изменилась), необходимо, чтобы каждый раз, когда берут 0,2 кг конфет I сорта, брали 0,3 кг II, т. е. в отношении $0,2 : 0,3 = 2 : 3$ или в отношении, обратном числам 0,3 и 0,2:

$$\frac{1}{0,3} : \frac{1}{0,2} = 0,2 : 0,3 = 2 : 3.$$

Проверка. 2 кг I сорта и 3 кг II сорта стоят вместе $15 + 21 = 36$ (руб.), или $7,2 \cdot 5 = 36$.

На 2 кг I сорта теряют $0,3 \cdot 2 = 0,6$; 60 коп.

На 3 кг II сорта получают лишних $0,2 : 3$; 60 коп.

7) И наконец, следует остановиться еще на одной задаче, которая в отвлеченных числах читается, как задача деления пропорционально двум рядам чисел (и может быть дана до изучения вопроса о пропорциональности величин).

Например: „Две артели рабочих за работу получили 2425 руб., причем одна артель в 13 человек работала 4 дня, а другая в 15 человек работала 3 дня. Сколько денег получила каждая артель, если поденная оплата каждого рабочего одна и та же?“ Учащиеся могут решить задачу следующим рассуждением:

первая артель дала 52 рабочих дня,
 вторая „ „ 45 рабочих дней;

заработок между артелями надо разделить прямо пропорционально числу рабочих дней, данных каждой артелью, считая остальные условия одинаковыми (оплату каждого, производительность труда и т. п.):

$$x_1 : x_2 = 52 : 45;$$

число частиц: $52 + 45 = 97$; на каждую частицу приходится $2425 : 97 = 25$ (руб.)

I артель получит $25 \cdot 52 = 1300$; 1300 руб.
 II „ „ „ $25 \cdot 45 = 1125$; 1125 руб.

Проверка. 2425 руб.

Указанный прием наиболее доступен учащимся средней школы.

Как известно, задачи указанного типа решаются приведением к единице. Прежде всего устанавливается, что плата распределяется между артелями: пропорционально числу работающих людей и пропорционально времени работы (число проработанных дней). Таким образом, 2425 руб. надо распределить прямо пропорционально и числу рабочих, и числу дней работы.

В предположении, что каждая артель работает по одному дню, заработок распределяется в отношении $x_1 : x_2 = (4 \cdot 13) : (3 \cdot 15)$, или в предположении, что каждая артель состояла из одного человека (об этих неудобствах при приведении к единице сказано раньше), заработок распределяется в отношении $I : II = (13 \cdot 4) : (15 \cdot 3)$. В дальнейшем задача решается по-прежнему.

При решении последней задачи учащиеся могли познакомиться со сложным термином „человеко-дней“ работы. При решении аналогичных задач учащиеся могут увидеть происхождение и других сложных терминов; например „тонно-километр“ и др.

8) Решают комбинированные задачи на пропорциональное деление и проценты. Например: „Штукатур вместе с помощником получили за работу 860 руб. Помощник работал лишь 35% того времени, которое работал штукатур; штукатур получал в день на 40% больше, чем его помощник. Сколько получал штукатур и сколько его помощник?“

Решение. Полученная сумма должна быть распределена пропорционально числу дней работы и заработной плате каждого из работавших. Отношение числа дней, которые затратили на работу штукатур и его помощник: $100 : 35 = 20 : 7$.

Отношение числа рублей, получаемых ими в день:

$$1,4 : 1 = 7 : 5;$$

871 руб. 20 коп. надо распределить в отношении

$$(20 \cdot 7) : (7 \cdot 5) = 4 : 1.$$

Ответ. 688 руб; 172 руб.

§ 7. Примеры для контрольной работы

1) Разложить 95 на три слагаемых пропорционально числам:

$$0,3 : 2 : 1\frac{1}{2}.$$

2) Найти неизвестный член пропорции:

$$x : 3\frac{1}{2} = \frac{2}{7} : 0,2.$$

3) Скорости передвижения на велосипеде и на автомобиле относятся, как $2 : 7\frac{1}{2}$. Автомобиль проехал расстояние между двумя станциями за 4 часа. За сколько часов можно проехать это расстояние на велосипеде?

4) Решить задачу в 4—5 действий, в которой требуется выполнить пропорциональное деление и процентные вычисления.

Глава XIV

ЗАДАЧИ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ В КУРСЕ АРИФМЕТИКИ

§ 1. Введение

В каждом разделе программы по арифметике V класса как в действиях с целыми числами, так и с обыкновенными и десятичными дробями ставится вопрос о решении задач с геометрическим содержанием.

В главах данной „Методики“, посвященных действиям с целыми числами и десятичными дробями, показано, как проводить повторение вопросов, связанных с мерами длины, площади, объема, веса, с преобразованием мер и с действиями над ними. Учащиеся, приходя в V класс, умеют вычислять площадь прямоугольника и квадрата, объем прямоугольного параллелепипеда и куба. Но опыт показывает, что дальнейшая работа—вычисление периметра прямоугольника или поверхности параллелепипеда и куба—представляет для них большие затруднения. Причину этого мы видим в недостаточном знакомстве учащихся со свойствами соответствующих геометрических фигур и тел, в формальном заучивании правил вычисления площадей и объемов, без широкого использования наглядности и непосредственной практической работы самих учащихся.

При ознакомлении учащихся со свойствами геометрических фигур и тел, измерением размеров которых они занимаются, должна быть широко использована наглядность и непосредственная практическая работа учащихся.

§ 2. Прямоугольник и квадрат

Эти фигуры знакомы учащимся из курса арифметики начальной школы: они всегда укажут в окружающей обстановке фигуры, имеющие форму прямоугольника или квадрата, всегда дадут изображение этих фигур на листке бумаги. В чем должна выражаться работа учителя V класса при повторении этих вопросов в действиях с целыми числами, а затем с дробными?

Учащиеся должны формулировать, какую фигуру они понимают под термином „прямоугольник“, какую—под термином „квадрат“. (Обычно ответ—это прямоугольник.)

1. С этой целью надо провести предварительную работу: напомнить учащимся, что они умеют чертить „прямую линию“, что на прямой линии они могут взять „отрезок“ (ограниченную часть прямой линии; ее концами служат точки), что они умеют чертить „угол“. Под углом они понимают фигуру, образованную двумя пересекающимися прямыми линиями. Можно ввести понятие „луча“ как части прямой, ограниченной только с одной стороны, в другую сторону луч продолжается безгранично. Можно дать определение угла как фигуры, образованной двумя лучами, исходящими из одной точки. Надо провести практические работы:

1) Начертить прямую линию и отложить на ней отрезки AB и CD . Учитель поясняет, что отрезок обозначается двумя буквами, стоящими у его концов; что длина отрезка показывает кратчайшее расстояние между этими двумя точками. Проверяет, умеют ли учащиеся измерять длину отрезка масштабной линейкой, правильно ли прикладывают ее. Учащиеся знают меры длины; надо подчеркнуть, что в результате измерения длины получается число, которое показывает, сколько раз взятая мера (единица длины) укладывается в данной длине (с точностью до 1 см, 1 мм и др., в зависимости от выбранной единицы измерения).

2) Начертить любой угол. Учитель поясняет, что лучи, которые образуют угол, называются сторонами его, а их общая точка—вершиной. Угол называют

по той букве, которая стоит у его вершины. Надо показать, как строят прямой угол при помощи угольника, и проверить, правильно ли это делают учащиеся. Полезно показать наложением, что все прямые углы равны между собой. Острый угол—это угол меньше прямого угла; тупой—больше прямого.

2. После этой предварительной работы можно перейти к уточнению имеющихся у учащихся представлений о прямоугольнике и квадрате. Рассматривая фигуры окружающей обстановки, учащиеся усваивают понятие „четырёхугольник“, т. е. фигуры с четырьмя углами и четырьмя сторонами. Прямоугольник—это четырёхугольник с прямыми углами. Следует провести практическую работу: взять хотя бы лист бумаги, имеющий форму прямоугольника, и предложить учащимся проверить, что все углы у него прямые и что противоположные стороны прямоугольника попарно равны. Затем обвести пальцем границу фигуры прямоугольника и назвать ее периметром прямоугольника. Установить, что длина периметра прямоугольника равна сумме длин всех его четырех сторон. Предложить вычислить длину периметра взятого листа бумаги. Учащиеся увидят, что для этого достаточно измерить только две его стороны, не прилежащие друг к другу. Число практических работ, аналогичных вышеуказанным, зависит от подготовки класса; работы эти следует давать для самостоятельного выполнения дома. В более подготовленных классах можно, обозначив длину одной стороны прямоугольника буквой a , другой стороны—буквой b , дать формулу для вычисления периметра прямоугольника:

$$P = 2a + 2b.$$

Следующей работой должно быть построение прямоугольника. Как уже выше указано, учащиеся умеют нарисовать прямоугольник. Надо научить их начертить его при помощи угольника: взять прямую линию и на ней отрезок (рис. 50) AB . В точке A построить прямой угол, также в точке B . На перпендикулярах отложить равные отрезки AD и BC и соединить точки D и C прямой. Проверить, что углы

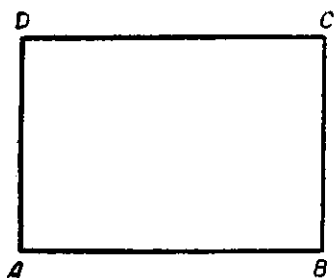


Рис. 50.

D и C будут тоже прямыми. Получится прямоугольник $ABCD$. Его периметр: $AB + BC + CD + DA$ (обводят карандашом).

Говорят, что отрезки AD и BC показывают расстояние между прямыми AB и DC ; в прямоугольнике $ABCD$ сторону AB (или DC) принято называть его основанием, а сторону

AD (или BC) принято называть его высотой. Высота с основанием всегда образует прямой угол. Понятно, что стороны прямоугольника AD и BC могут служить его основаниями, тогда расстояния между ними AB и DC будут высотами. Основание и высота называются измерениями прямоугольника. Термины „основание“ и „высота“ даются вместо терминов „длина“ и „ширина“, которые известны учащимся.

3. Затем можно перейти к решению задачи на вычисление площади прямоугольника, что почти безошибочно выполняют учащиеся, приходящие в V класс. Но почему „длину“, как они говорят, надо умножить на „ширину“, — на этот простой вопрос очень немногие спрошенные нами учащиеся смогли дать ответ. Поэтому учителю следует указать им, что задача найти площадь прямоугольника или взятого листа бумаги (или другой фигуры) состоит в том, чтобы найти число квадратных единиц, которое можно уложить на данном листе. Можно поступить попережнему: взять единицу измерения площадей (1 кв. мм или 1 кв. см), наложить на лист бумаги и сосчитать, сколько квадратных миллиметров или квадратных сантиметров уложится на нем. Хорошо, если учитель заготовит сетку квадратных сантиметров (или квадратных миллиметров), нарисованную на прозрачной бумаге — кальке, — „палетку“ и проиллюстрирует при ее помощи непосредственное измерение площади. Ребятам V класса не приходится долго объяснять, что этот прием вычисления площади прямоугольника в большинстве случаев неприемлем на практике, что имеется известный им прием

косвенного определения площади, который состоит в том, что непосредственно измеряются только длины отрезков рассматриваемой фигуры, а площадь находится вычислением: берется произведение чисел, выражающих (в одинаковых линейных единицах) основание и высоту прямоугольника.

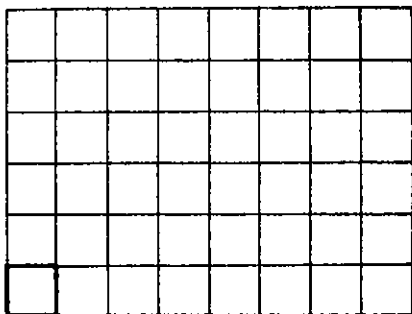


Рис. 51.

Действительно, если взять прямоугольник, основание которого 8 см, высота 6 см, то (рис. 51) незачем пересчитывать все квадратные сантиметры, которые можно наложить, достаточно сказать, что данный прямоугольник можно разбить на 6 одинаковых поперечных полос (прямоугольников), имеющих в высоту по 1 см, а в каждой из полученных полос (прямоугольников) с основанием 8 см и высотой 1 см) уложится 8 кв. см. Или в общем виде, если основание прямоугольника a см, высота b см, то его площадь содержит $(a \cdot b)$ кв. см, или $S = a \cdot b$, где S — площадь прямоугольника. Ясно, что a и b должны выражаться одинаковыми линейными единицами.

Все рассуждения проводились для случая, когда измерения прямоугольника выражены целыми числами. У учащихся V класса обычно не возникает вопрос о правомерности использования полученной формулы в случае дробных чисел. Можно обратить их внимание на этот факт при изучении „Действий над обыкновенными дробями“ (глава IX), где при изложении вопроса об умножении дробей показано вычисление площади прямоугольника, измерения которого выражены дробными числами: $\frac{2}{5}$ м и $\frac{3}{4}$ м.

Упражнения и задачи решаются как с обыкновенными, так и десятичными дробями.

Упражнение. Вычислить основание прямоугольника, если высота его 2,4 см, а площадь 8,4 кв. см.

Решение. $S = a \cdot b$; $8,4 = a \cdot 2,4$, откуда неизвестный сомножитель $a = \frac{8,4}{2,4} = 3,5$ (см).

Для квадрата соответствующие формулы: $S = a \cdot a = a^2$. Обратить внимание учащихся на то, что квадрат есть прямоугольник, все стороны которого равны, но прямоугольник не всегда квадрат.

Проведя выше указанную работу, следует обратить внимание учащихся на практическое значение умения вычислять периметры и площади фигур.

Примерные задачи: 1) Какой длины надо сделать ограду для садика, длина и ширина которого соответственно 20,5 м и 17,5 м (взять можно размеры в целых числах).

2) Узнать, с какой силой давит воздух на поверхность стола в комнате, где живет учащийся, если давление воздуха на 1 кв. см составляет 1,033 кг. Выполнить необходимые измерения.

3) Земельный участок имеет форму прямоугольника, длина которого 1 км 400 м, а ширина 900 м; $\frac{3}{5}$ этого участка засеяны овсом. Какая площадь засеяна овсом? Какой урожай овса собран с этого участка? (Средний урожай с 1 га узнать из газет, или в правлении колхоза.)

§ 3. Параллелепипед и куб

Обе эти фигуры известны учащимся, приходящим в V класс. Учителю прежде всего надо привести в систему имеющиеся у них сведения.

1. Перечислим вопросы, которые надо повторить с учащимися. Прежде всего учащиеся называют предметы в окружающей обстановке, имеющие форму параллелепипеда и куба. На одном из предметов, имеющих форму прямоугольного параллелепипеда, или на модели уточняются понятия „поверхности“ (обводится ладонью), которая состоит из 6 граней; грани имеют форму прямоугольников, поэтому параллелепипед называется прямоугольным; у куба все грани имеют форму квадратов. Прямые линии, по которым пересекаются грани, называются ребрами, их 12; три ребра сходятся в одной точке, которая

называется вершиной параллелепипеда, таких вершин 8. В вершине параллелепипеда сходятся 3 ребра, которые называются его длиной, шириной и высотой, или тремя его измерениями.

У параллелепипеда 3 измерения; у куба все измерения равны (прямоугольник и квадрат имеют только 2 измерения, а линии — прямая и кривая имеют только одно измерение). Та грань, на которую поставлен параллелепипед (или куб) и противоположная ей, называются основаниями параллелепипеда; остальные 4 грани — боковые.

Рассматривая различные параллелепипеды, устанавливают, что противоположные грани и основания их всегда равны между собой, что иногда у параллелепипеда могут быть равны между собой 4 боковые грани (если основанием его служит квадрат); если все грани равны, то это тело — куб.

2. Все учащиеся V класса скажут, как надо вычислить объем комнаты. Работа учителя снова заключается в том, чтобы уточнить и систематизировать их знания по вопросу о вычислении объема параллелепипеда и куба.

По аналогии с ранее проведенной работой по вычислению площади, в частности площади прямоугольника, указывается, что узнать объем какого-нибудь тела — это значит найти число, которое покажет, сколько кубических единиц можно поместить внутри данного тела, целиком заполнив его. Объем тела, как и площадь фигуры, обычно находится косвенным путем. Для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда надо знать (измерить) его 3 измерения. Пусть требуется найти объем прямоугольного параллелепипеда (рис. 52), длина которого 4 см, ширина 2 см, высота 6 см. Тогда в один ряд по длине параллелепипеда можно поместить 4 куб. см. таких рядов на основании параллелепипеда можно поместить 2 (ширина равна 2 см); эти (4·2) куб. см составят один слой; но по высоте параллелепипеда, равной 6 см, можно поместить 6 слоев, т. е. объем данного параллелепипеда равен (4·2·6) куб. см. Поэтому объем параллелепипеда (V), длина которого a , ширина b и высота c , равен ($a \cdot b \cdot c$) куб. см, $V = a \cdot b \cdot c$, и для того чтобы найти объем (в куби-

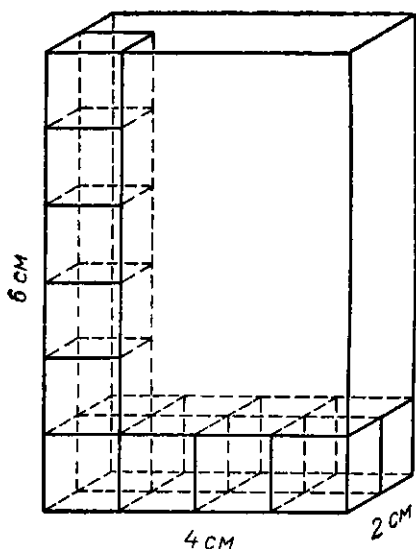


Рис. 52.

ческих метрах) прямоугольного параллелепипеда, надо перемножить числа, выражающие его три измерения в соответствующих линейных метрах. Объем куба $V = a \cdot a \cdot a$, или $V = a^3$.

Учащиеся должны объяснять на примере полученную формулу; должны уметь найти одно измерение, если известен объем и два других измерения. Например, найти глубину ямы, которую надо выкопать, если объем ее должен быть 2 куб. м, а длина и ширина по 1,2 м.

Решение. $V = a \cdot b \cdot c$; $2 = 1,2 \cdot 1,2 \cdot c$, откуда неизвестный множитель $c = 2 : 1,44 \approx 1,4$ (м).

Выясняя правило вычисления объема прямоугольного параллелепипеда, можно ограничиться выше рассмотренным случаем, когда измерения его выражены целыми числами, а затем при изучении дробей сказать учащимся, что так же вычисляется объем прямоугольного параллелепипеда, когда измерения его — числа дробные.

Практические работы: 1) Выполнить необходимые измерения и вычисления и узнать, сколько весит воздух в комнате, где живет учащийся: вес 1 куб. см воздуха приблизительно равен 1,033 г.

2) Узнать, на сколько учащихся рассчитан класс, в котором они занимаются, если на одного учащегося считать 8 куб. м воздуха.

3) Узнать, сколько ведер воды вмещает бассейн, если длина его 6,2 м, ширина 4,7 м, глубина 1 м.

Указание. Вычислить объем бассейна в куби-

ческих метрах и выразить ответ в кубических дециметрах¹. Ведро содержит приблизительно 12,3 л.

4) Вычислить объем ящика, имеющего форму куба, ребро которого 1 м ($a = 1$ м), $V = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ (куб. м); $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

В процессе работы устанавливают, что объем прямоугольного параллелепипеда может быть вычислен в кубических единицах, если известна площадь основания в соответствующих квадратных единицах и высота в соответствующих линейных единицах.

5) Узнать, до какой высоты будут положены овощи в овощехранилище, имеющее вид прямоугольного параллелепипеда, если площадь его основания 1200 кв. м, а объем овощей, которые надо поместить, 5400 куб. м.

Запись: $5400 : 1200 = 4,5$ (м).

3. Переходя к вопросу о вычислении поверхности параллелепипеда, учитель должен сначала предложить учащимся ладонью показать поверхность прямоугольного параллелепипеда. Ставятся задачи: 1) найти площадь всей этой поверхности (как говорят, полную поверхность) или 2) площадь только боковых граней, или, как говорят, площадь боковой поверхности (или боковую поверхность). Например, имеется прямоугольный параллелепипед. Известны три его измерения: 10 м; 8 м; 6 м. Учащиеся без труда найдут площадь передней грани (или задней), равную $(10 \cdot 6)$ кв. ед.; затем площадь правой (или левой) боковой грани, равную $(6 \cdot 8)$ кв. ед., и, наконец, площадь основания (нижнего или верхнего), равную $(10 \cdot 8)$ кв. ед. $S = 2 \cdot (10 \cdot 6) + 2 \cdot (6 \cdot 8) + 2 \cdot (10 \cdot 8) = 376$ (кв. ед.).

Затем, обозначив измерения прямоугольного параллелепипеда буквами a , b , c (см. рис. 53), дается формула: $S = 2ac + 2bc + 2ab$, которой

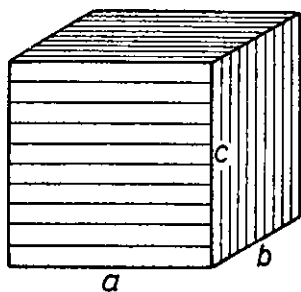


Рис. 53.

¹ Надо напомнить учащимся, что литр — мера жидкости; 1 л соответствует 1 куб. дм; 1 л воды при 4°C весит 1 кг; 1 кубометр воды при 4°C весит 1 т.

и пользуются в дальнейшем. Тщательно надо провести эту работу для того, чтобы не было часто встречающихся ошибок в наименовании единиц измерения: площадь всегда выражается в квадратных единицах (как площадь прямоугольника, так и площадь поверхности тела). S куба $= 6 a \cdot a = 6a^2$ ¹.

Задача. Комната имеет длину 5,2 м, ширину 4,1 м, высоту 3,2 м. В ней 2 окна размерами 2,0 м на 1,8 м и одна дверь размером 2,1 м на 0,9 м. Комнату решили побелить. Какую площадь придется побелить?

§ 4. Треугольник

1. После того как учащиеся повторяют правило вычисления площади прямоугольника, проще всего показать им вычисление площади прямоугольного треугольника, или „треугольника с прямым углом“ (рис. 54). Вырезанная из картона модель прямоугольника разрезается по линии, соединяющей две ее противоположные вершины (термин „диагональ“ не обязателен). Полученная фигура имеет 3 угла и 3 стороны и называется

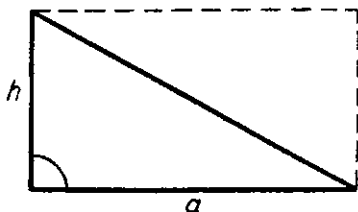


Рис. 54.

треугольником; у треугольника 3 вершины; поясняют, что „основанием“ этого треугольника обычно называют основание прямоугольника, из которого он получен при помощи разрезывания; „высотой“ треугольника называют высоту того же прямоугольника (рис. 54).

Так как каждый из полученных прямоугольных треугольников составляет половину прямоугольника, имеющего такое же основание и такую же высоту, то для вычисления площади треугольника с прямым углом надо перемножить числа, которые выражают (в одинаковых линейных единицах) основание и высоту этого треугольника, и полученное произведение разделить на

¹ С разверткой параллелепипеда учащиеся знакомятся при изготовлении его модели (см. гл. I).

2 (пополам); запись на буквах: $S = \frac{a \cdot b}{2}$; поясняют, что обычно число, выражающее высоту какой-либо фигуры, обозначается буквой h :

$$S = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Термин „прямоугольный треугольник“ учащиеся младшего возраста часто путают с термином „прямой угол“. Так как времени для четкого усвоения этих понятий недостаточно, то мы предпочитаем говорить о треугольнике с прямым углом.

Модель прямоугольного треугольника учащимся известна — чертежный треугольник. Надо предложить непосредственно измерить его основание и высоту (в миллиметрах) и вычислить площадь по формуле (в квадратных миллиметрах). Если класс слабо подготовлен, то можно не пользоваться формулой, хотя опыт неоднократно показывал, что запись на буквах не затрудняет учащихся. Здесь же полезно напомнить, что понимается под термином „периметр“, и предложить вычислить периметр того же чертежного треугольника.

2. Пользуясь чертежами и наглядными пособиями, поясняют учащимся (рис. 55), что любой треугольник составляет половину прямоугольника, имеющего с ним одинаковое основание и одинаковую высоту, поэтому площадь любого треугольника $S = \frac{ah}{2}$, где a — основание, h — высота треугольника (или соответствующего прямоугольника).

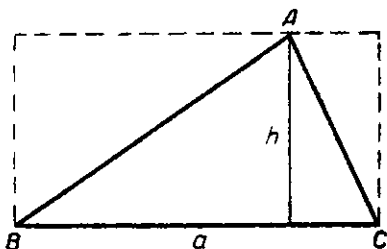


Рис. 55.

Особо надо остановиться на понятии „высота треугольника“, которая показывает расстояние между вершиной треугольника и его основанием; высота и основание при пересечении образуют прямой угол. Надо учить учащихся непосредственно проводить высоту в треугольнике и измерять ее длину.

Упражнение. Начертить в тетради любой треугольник. Одну его сторону (лучше взять большую сторону) принять за основание. Провести высоту из противоположной вершины при помощи чертежного треугольника. Измерить в миллиметрах длины основания и высоты этого треугольника и вычислить его площадь.

Практическая работа. Учитель приносит в класс несколько фигур, вырезанных из картона, и предлагает учащимся выполнить необходимые измерения и вычислить площадь каждой из этих фигур; среди них должны быть и трапеция, и многоугольник, которые разбиваются на известные учащимся фигуры треугольников и четырехугольников.

§ 5. Длина окружности и площадь круга

1. Учащиеся V класса знают, как начертить окружность; знают инструмент — циркуль. Полезно показать им, как можно начертить окружность при помощи небольшого отрезка нити, привязав его к карандашу или мелу. Желательно, чтобы учащиеся знали признаки окружности: окружность — это линия, она имеет одно измерение; окружность — это линия кривая и замкнутая; все точки этой линии отстоят на равном расстоянии от одной точки, называемой центром. Учащиеся должны знать, что эта точка — центр лежит в одной плоскости со всеми точками окружности (в плоскости листа бумаги или доски). Отрезок прямой линии, который соединяет центр окружности с какой-либо ее точкой, называется радиусом. Все радиусы одной окружности равны между собой. Длина радиуса показывает расстояние между центром и любой точкой окружности. Отрезок прямой линии, который соединяет 2 точки окружности и при этом проходит через центр, называется диаметром. Длина диаметра в 2 раза больше длины радиуса. Вот те сведения, которые должны иметь учащиеся V и VI классов для того, чтобы решать соответствующие арифметические задачи с геометрическим содержанием.

Ставится вопрос: как найти длину окружности (кривой линии)? Ее нельзя непосредственно измерить,

приложив масштабную линейку. Учитель говорит учащимся, что можно плотно охватить окружность бумажной лентой, затем развернуть эту ленту и измерить ее длину при помощи масштабной линейки. Но, конечно, как и в предыдущих задачах, имеется косвенный прием вычисления длины окружности. Такой прием имеется благодаря тому, что каждая окружность обладает одним и тем же свойством. Для выяснения этого свойства надо сравнить длину окружности и длину ее диаметра.

Ставится практическая работа. Работа эта может быть поставлена различно: часть ее может быть выполнена в классе, дополнительные измерения и вычисления предлагается выполнить дома. В классе полезно провести следующее упражнение: начертить на картоне (можно и на листе бумаги) сначала окружность, радиус которой 30 мм, затем окружность, радиус которой вдвое больше — 60 мм. Вырезать начерченные фигуры. Плотно охватить полученные круги бумажной полоской каждый, затем сделать булавкой прокол в одном месте, где один конец бумажной полоски покрывает другой. Сняв и развернув бумажные полоски, измеряют их длины при помощи масштабной линейки, с точностью до 1 мм; измерения производят несколько раз (примерно 3 раза) и записывают в таблицу среднее арифметическое полученных результатов для C , D и $\frac{C}{D}$. Буквенные обозначения поясняются.

	Диаметр (D) в миллиметрах	Длина окружности (C) в миллиметрах	Отношение $\frac{C}{D}$
1)	30		
2)	60		
3)			

Предлагается дома продолжить таблицу, измерив длины окружностей и длины диаметров различных круглых предметов: стакана, монеты и т. д.

Окончательно отношение $\frac{C}{D}$ вычисляют как сред-

нее арифметическое из всех полученных отношений (исключив явно ошибочные).

Подводя итог проделанной работе, учитель указывает, что искомое отношение $\frac{C}{D}$ всегда одно и то же, приближенно оно равно 3,14, или в обыкновенных дробях $\frac{22}{7}$. Говорят: отношение длины любой окружности к ее диаметру приближенно равно 3,14; обозначается это отношение греческой буквой π ; $\pi \approx 3,14$, или $\pi \approx \frac{22}{7}$, значит, $\frac{C}{D} = \pi$. Иногда учащиеся пишут: $\frac{C}{D} = 3,14$, или $\frac{C}{D} \approx \pi$; эти ошибки надо исправлять. Зная отношение $\frac{C}{D}$, легко вывести правило для вычисления длины окружности: $\frac{C}{D} = \pi$, откуда $C = D \cdot \pi$, т. е. длина окружности C равна произведению числа π на длину диаметра D ; $C \approx 3,14 \cdot D$ (или $C = \pi \cdot 2R$, или, переставив сомножители, $C = 2\pi \cdot R \approx 6,28 \cdot R$).

Задачи: 1) Найти длину окружности колеса паровоза, диаметр которого 1,65 м. Сколько оборотов в минуту сделает это колесо, если скорость его равна 48 км в час?

Решение. Длина окружности колеса $C = D \cdot \pi$, или $C \approx 3,14 \cdot 1,65 \approx 5,2$ (м); значит, при одном обороте колеса поезд продвинется на 5,2 м. За час поезд проходит 48 км, или в 1 минуту он проходит $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$ (км); $\frac{4}{5}$ км = 800 м; колесо сделает в 1 мин. (800 : 5,2) оборотов.

Ответ. Приблизительно 150 оборотов.

2) Начертить окружность, длина которой 22 см.

Указание. $D \approx \frac{22}{3,14}$, или $22 : \frac{22}{7} = 7$ (см).

2. Переходя к вопросу вычисления площади круга, полезно провести следующую практическую работу. Предложить учащимся начертить в тетрадях окружности любых радиусов; пояснить, что каждая окружность ограничивает часть плоскости (поверхности) и что ставится задача — найти величину этой

поверхности, или, как говорят, „площадь круга“. Учащиеся знают способ определения площади фигуры при помощи „палетки“ и применяют его в данном случае. Учителю приходится очень тщательно следить за работой учащихся, показывая им, как можно учитывать неполные квадратики. Несовершенство указанного приема учащимся ясно. Учитель переходит к выводу формулы вычисления площади круга.

Для этого можно провести такую лабораторную работу: начертить окружность с радиусом в 8 см или 12 см; вырезать начерченный круг, перегнуть его по диаметру и разрезать, затем каждый полученный полукруг снова согнуть вдвое; полученную фигуру снова согнуть вдвое и еще раз согнуть вдвое. Каждый полукруг разделится на 8 частей, всего будет 16 частей. Если разрезать полученные фигуры по сгибам на эти 16 частей и расположить их, как показано на рисунке 56, то круг превратится в фигуру,

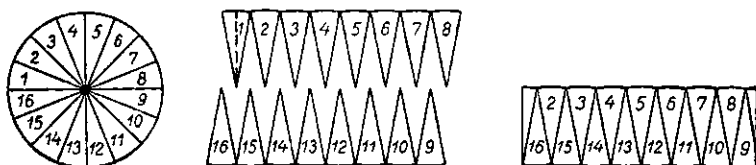


Рис. 56.

похожую на прямоугольник¹. Если разрезать круг на 32 части или больше, то получится фигура, более похожая на прямоугольник. Основание этого прямоугольника — половина окружности, а высота — радиус, или половина диаметра, откуда $S = \frac{C}{2} R$, или $\frac{C \cdot D}{2 \cdot 2}$.

Эту формулировку „площадь круга равна половине длины окружности, умноженной на радиус“, или „на половину диаметра“, должны знать учащиеся.

Так как $C = \pi \cdot D$, то $S = \frac{\pi \cdot D}{2} \cdot \frac{D}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \approx 0,785 D^2$

¹ Одну из 16 частей разрезать пополам и приложить по обе стороны получившейся фигуры.

$$\text{или } S = 2\pi R \cdot \frac{R}{2} = \pi R^2.$$

Особое внимание надо обратить на то, чтобы учащиеся сознательно длину окружности выражали в линейных мерах, а площадь круга — в квадратных.

Замечание. Имеется в продаже модель для иллюстрации вывода формулы вычисления площади круга. Но можно и самим изготовить такую модель. Для этого надо вычертить круг на толстом картоне такого же радиуса, как вычерченный круг на листе бумаги; затем разделить его на 16 частей (при помощи $\frac{1}{16}$ части такого же круга, вырезанной из бумаги). Кроме того, прежде чем разрезать круг, надо обшить его узкой тесьмой, тогда части фигуры окажутся соединенными, и учащиеся будут иметь самодельное наглядное пособие.

Задача. Для устройства круглой клумбы привязали один конец веревки длиной в 2 м к колу, вбитому в землю. К другому концу веревки привязали заостренный колышек и, натягивая веревку, провели окружность на земле. Какова длина этой окружности? Какую площадь наметили для клумбы?

§ 6. Цилиндр

1. В окружающей обстановке учащиеся легко укажут тела, имеющие форму цилиндра (карандаш цилиндрической формы, трубка, стакан и др.). Учитель показывает модель цилиндра. У цилиндра полная поверхность (проводят ладонью) состоит из двух кругов, которые называются основаниями цилиндра, и боковой поверхности (кривой поверхности). Можно предложить учащимся обернуть цилиндр (его боковую поверхность) листом бумаги так, чтобы бумага плотно прилегала к его поверхности, затем (прежде острием ножа по линейке обрезать оставшуюся бумагу) снять бумагу и развернуть ее на плоскость (см. рис. 57). Предложить вычислить площадь боковой поверхности цилиндра. Нетрудно учащимся догадаться, что площадь боковой поверхности (которую непосредственно измерить нельзя) равна пло-

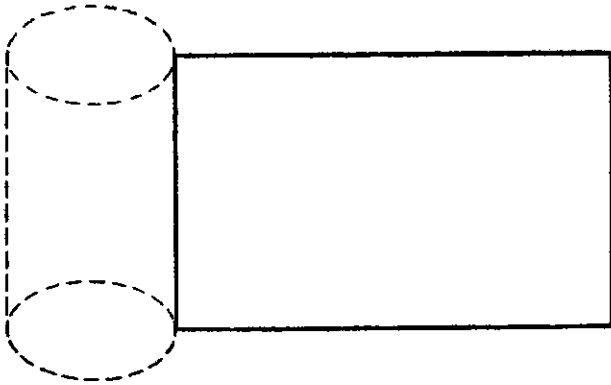


Рис. 57.

щади листа бумаги, которым она была обернута. Чтобы найти площадь листа бумаги, надо перемножить числа, выражающие длины его основания и высоты. Но основание — это длина окружности основания цилиндра, а высота листа есть высота цилиндра. Таким образом, чтобы найти площадь боковой поверхности цилиндра (в квадратных единицах), надо умножить длину окружности его основания (в линейных единицах) на высоту. Обычно опускают слова „площадь“, „длины“, и говорят: чтобы найти боковую поверхность цилиндра, надо окружность его основания умножить на его высоту.

Запись: $S = C \cdot H$. Если к площади боковой поверхности прибавить 2 равные площади оснований (кругов), то получится площадь полной поверхности, или просто — полная поверхность цилиндра.

Задача. Вычислить боковую и полную поверхность цилиндра, диаметр основания которого 6 см, а высота 15 см.

Решение и запись: $D = 6$ см; $H = 15$ см.

1) Длина окружности $C \approx D \cdot 3,14 \approx 19$ (см)

$$S_{\text{бок. цил.}} \approx 19 \cdot 15 \approx 280 \text{ (кв. см)}$$

2) Площадь каждого из двух кругов оснований:

$$S_{\text{круга}} \approx 0,785 \cdot 36 \approx 28 \text{ (кв. см)}$$

$$S_{\text{полн. цил.}} \approx 340 \text{ кв. см.}$$

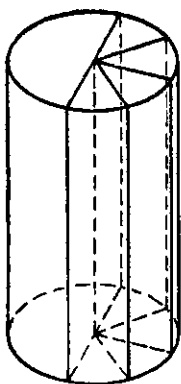


Рис. 58.

2. Объем цилиндра (в кубических единицах) вычисляется по тому же правилу, по которому вычисляется объем прямоугольного параллелепипеда, а именно: объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту. Основание цилиндра—круг.

$$V_{\text{цилиндра}} = S_{\text{круга}} \cdot H$$

или $V_{\text{цилиндра}} \approx 0,785 D^2 \cdot H.$

Указания к уроку. Учитель приносит в класс деревянный цилиндр, разрезанный пополам (вдоль); каждая его половина также разрезана вдоль на 4 или 8 равных частей (см. рис. 58), основанием каждой части служит соответствующий сектор круга, лежащего в основании цилиндра. Цилиндр оклеен материей для того, чтобы его части не распались. При вложении частей цилиндра друг в друга получается тело, напоминающее параллелепипед, объем которого учащиеся умеют вычислять. Устанавливают, что для вычисления объема цилиндра достаточно знать длины его диаметра и высоты и что получаемый результат дает приближенное значение объема.

Задача 1. Сколько литров воды вмещает цилиндрический сосуд, высота которого 1 м и внутренний диаметр основания 2 м?

Ответ. 3,14 куб. м = 3140 куб. дм = 3140 литров.

Задача 2. Измерили внутренний диаметр полого цилиндра и его высоту: $D = 8,0$ см и $H = 11,1$ см. Вычислить емкость этого цилиндра (V).

Решение. $V \approx \frac{3,14}{4} \cdot 64 \cdot 11,1 = 3,14 \cdot 16 \cdot 11,1;$

$$3,14 \cdot 16 \approx 50,2 \quad V \approx 50,2 \cdot 11,1 \approx 560 \text{ (куб. см).}$$

Можно проверить: заполнить водой данный цилиндр, а затем перелить воду из цилиндра в мензурку с делениями. Если вычисления верны, то в мензурке окажется приблизительно 560 куб. см воды.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Указания к проведению землемерных работ

Оборудование. Для проведения простейших работ на местности надо иметь 4—5 вех высотой 1,5 м, с заостренным концом, на который надет железный наконечник; 10—12 колышков высотой 10 см для втыкания в землю; рулетку или мерную ленту 10—20 м; компас; флажок; масштабную линейку.

Приборы: планшет и эккер. Планшетом может служить картон или тонкая доска площадью (40×30) кв. см; к доске кнопками прикрепляется лист бумаги (разграфленный в клетку), на котором стрелкой отмечается направление стран света (рис. 10, стр. 37).

II. Измерение расстояния на местности

Надо найти расстояние между пунктами *A* и *B* (рис. 59). В пунктах *A* и *B* ставят вехи № 1 и № 2. Между этими вехами помещают еще 2—3 вехи для

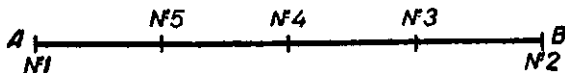


Рис. 59.

установления прямолинейности пути. В пункте *A* помещается один из участников работы, другой становится в направлении к *B* в пункте *C*, находящемся между *A* и *B*, и держит в руках веху № 3.

Первый учащийся флажком (или движением руки вправо и влево) указывает второму пункт C , где надо установить веху № 3 для того, чтобы она закрыла собой веху № 2; также устанавливаются вехи № 4, № 5 вдоль линии AB . Расстояние AB измеряется мерной лентой, веревкой или рулеткой. Для натягивания ленты между вехами втыкают колышки, на которые надевают ленту (веревку).

III. Устройство эккера

Для построения углов на местности служит прибор, называемый эккером. Простой деревянный эккер могут сделать сами учащиеся.

Приготовить из мягкого сухого дерева дощечку (рис. 9а и б, стр. 37) квадратной формы; сторона квадрата 20 см, а толщина дощечки около 1—2 см. Каждую сторону этого квадрата разделить пополам и через точки деления твердым карандашом провести две взаимно перпендикулярные прямые AB и CD . Провести также диагональ MN квадрата. Углы следует тщательно проверить транспортиром. Для более удобного пользования эккером необходимо в точках A, B, C, D , т. е. в концах перпендикуляров, воткнуть булавки или тонкие гвозди. Еще лучше в точках A, B, C, D, M, N сделать глубокие отверстия диаметром в 1—1,5 см, в которые воткнуть проволочки длиной в 3—4 см.

Самым простым штативом для эккера может служить обыкновенная палка, укороченная до таких размеров, чтобы прикрепленная к ней эккерная доска приходилась немного ниже уровня глаз работающего. Для укрепления эккерной дощечки на таком штативе необходимо в центре дощечки просверлить дыру диаметром приблизительно в 5—10 мм, а верхний конец палки закончить „пальцем“ цилиндрической формы, длиной не больше толщины эккерной дощечки. При этом необходимо, чтобы эккерная дощечка туго сидела на „пальце“ штатива.

Описанный штатив вполне пригоден для работы в поле на мягком грунте. Точность результатов работы эккером будет вполне удовлетворительна. В других случаях пользуются треножным штативом.

IV. Проверка эккера. Провешивание прямых под углом

Прежде чем приступить к работе при помощи эккера, его надо проверить. Проверку эккера производят следующим образом: сначала устанавливают эккер на штативе так, чтобы верхняя плоскость была горизонтальна, затем, заметив какой-нибудь предмет (угол дома, дерево, забор и т. д.), направляют эккер так, чтобы булавки A , B (рис. 9, стр. 37) и замеченная точка P на предмете находились на одной линии AB . Затем смотрят по направлению CD и в нескольких шагах ставят веху по направлению CD . После этого поворачивают дощечку эккера так, чтобы линия AB заняла то направление, по которому прежде была направлена CD . Если при этом новое направление CD точно укажет на метку P , то эккер приготовлен правильно и можно приступить к работе.

Направления на земле, провешенные по AB и CD , перпендикулярны друг другу.

При простых землемерных работах чаще всего приходится провешивать направления и строить на местности прямые углы. Эккером, устройство которого описано выше, это вполне возможно осуществить. Если через какой-нибудь пункт требуется провести два направления, ставят в этом пункте на треножнике эккер (рис. 9). Затем один из участников смотрит по направлению AB и показывает другому участнику работы, где нужно поставить веху. По направлению AB ставят вехи, не менее двух. Затем учащийся, стоящий у эккера, меняет свое положение и смотрит по направлению CD , другой участник переходит на это направление и также втыкает не менее, чем две вехи. Эккер должен быть неподвижен во все время работы. Таким образом, на местности будет проложено два направления под прямым углом. При помощи эккера можно провешивать углы в 90° , 45° , 135° и др. Для построения углов произвольной величины применяются более сложные приборы: астролябия, теодолит.

V. Съёмка плана эккером

Участок или здание, план которого снимают, может быть любой формы. Учащимся рекомендуется до съёмки плана эккером сделать зарисовку участка.

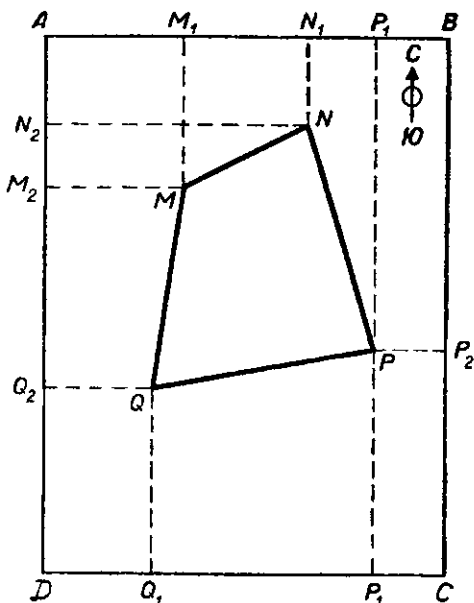


Рис. 60.

1. Расставляются вехи, которые ограничивают участок; проще всего наметить вехами вокруг него прямоугольник $ABCD$ (рис. 60); одной из сторон прямоугольника может быть забор, стена или др. Стороны прямоугольника провешиваются, и прямые углы строятся при помощи эккера.

2. Идя вдоль сторон прямоугольника (вдоль магистрали), ограничивающего участок $MNPQ$, при помощи эккера восставляют перпендикуляры (строят прямые углы) из точек $M_1, N_1, P_1, P_2, Q_1, Q_2, \dots$ (рис. 60). Точки эти выбирают на сторонах прямоугольника так, чтобы перпендикуляры прошли через все вершины здания (участка). Некоторые точки

(P_2 , Q_2 , M_2 и др.) берутся для контроля. Расстояния M_1M , N_1N , P_1P и т. д. измеряют рулеткой; наносят на план. На плане указывают направление С-Ю.

VI. Маршрутная съемка (глазомерная)

1. Планшет надо ориентировать по компасу; установить горизонтально, отметить на нем начальную точку отправления M_1 (рис. 61); в точку M_1 поставить острие карандаша или воткнуть булавку; приложив к булавке масштабную линейку, направить ее вдоль пути (по маршруту) и по краю линейки прочертить соответствующее направление (M_1M_2). Из той же точки M_1 таким же способом прочертить направление на элеватор (M_1A), на дерево (M_1B) или на другие объекты и тут же надписать, на какой объект указывает направление.

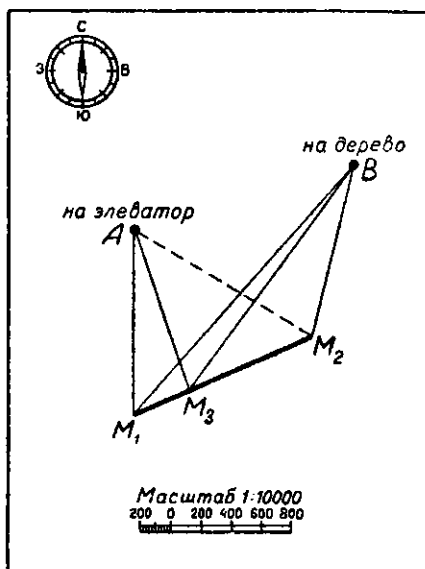


Рис. 61.

2. Из пункта, отмеченного на плане буквой M_1 , начинают путь (маршрут) в направлении к M_2 ; считают шаги; число шагов между M_1 и M_2 записывают на плане (на планшете); обычно перевод шагов в метры делают после окончания работы.

Остановившись в пункте M_2 , прочерчивают, как прежде, направление на элеватор M_2A и на дерево M_2B . Пункты A и B получаются на плане „способом засечек“ — пересечением линий M_1A и M_2A ; M_1B и M_2B . Затем продолжают идти по маршруту дальше; способом засечек отмечают положение других объектов. Для того чтобы более точно отметить поло-



Рис. 62.

жение объектов A и B , полезно еще из какого-либо пункта маршрута M_3 прочертить направления M_3A и M_3B . Идя по маршруту, условными обозначениями (рис. 62) наносится картина местности (луг справа, затем огород, мост и т. д.).

Замечание. Глазомерную съемку какой-либо местности можно делать, обходя ее, т. е. выйдя из пункта M_1 и возвратившись в него же. На планшете наносятся способом засечек отдельные объекты и окружающая местность.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

I. Литература по теории арифметики для учителя

- А. В. Васильев, Целое число, 1922.
П. Д. Белоновский, Основы теоретической арифметики, Учпедгиз 1938.
В. М. Брадис, Теоретическая арифметика, Учпедгиз, 1954.
Б. А. Тулинов и Я. Ф. Чекареев, Арифметика, Учпедгиз, 1955.
И. К. Андронов, Арифметика натуральных чисел, Учпедгиз, 1954.
В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, изд. АПН РСФСР, 1948.
В. Л. Гончаров, Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика, изд. АПН РСФСР, 1947.

II. Литература по истории арифметики

- В. П. Шереметьевский, Очерки по истории математики, Учпедгиз, 1940.
В. Беллюстин, Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики, Учпедгиз, 1941.
Д. Д. Галанин, История методических идей по арифметике в России, ч. 1, XVIII век, Л., 1915.
Г. Н. Попов, Сборник исторических задач по элементарной арифметике, ОНТИ, 1936.
Б. В. Гнеденко, Очерки по истории математики в России, ОГИЗ, М.—Л., 1946.

III. Старинные учебные руководства по арифметике в России

- Л. Ф. Магницкий, Арифметика, сиречь наука числительная, 1703.
Петр Гурьев, Практическая арифметика, 1870.
В. Буныковский, Арифметика, 1852.

IV. Литература по методике арифметики

- Ф. И. Егоров, Методика арифметики, 1917.
С. И. Шохор-Троцкий, Методика арифметики, Учпедгиз, 1935.
В. Г. Чичигин, Методика преподавания арифметики, Учпедгиз, 1952.
Е. С. Березанская, Сборник задач и упражнений по арифметике, Учпедгиз, 1953.
А. С. Пчелко, Хрестоматия по методике начальной арифметики, Учпедгиз, 1940.
Проф. А. В. Ланков, К истории развития передовых идей в русской методике математики, Учпедгиз, 1951.
Статьи в журн. „Математика в школе“ по вопросам преподавания арифметики (за все годы).
Статьи в „Сборниках“: „Из опыта преподавания математики в V—VII классах средней школы“, Учпедгиз, 1954;
„Решение задач в средней школе“, изд. АПН РСФСР, 1952;
„Преподавание математики в школе в свете задач политехнического обучения“, изд. АПН РСФСР, 1954, 2-е издание.
Н. Я. Зайцева, А. И. Зыкус, А. Н. Эрастова, Планы уроков по арифметике в V классе, Учпедгиз, 1954.
Н. И. Сырнев, Планы уроков по арифметике в VI классе, Учпедгиз, 1955.

V. Книги для чтения учащихся

- Я. И. Перельман, Занимательная арифметика, ОГИЗ, 1934.
Я. И. Перельман, Живая математика, ОГИЗ, 1947.
И. Депман, Рассказы по математике, Детгиз, 1954.
И. Депман, Из истории математики, Детгиз, 1950.
Г. Н. Берман, Счет и число, Гостехиздат, 1948.
Г. Н. Берман, Число и наука о нем, ОГИЗ, 1948.
Г. Н. Берман, Приемы счета, ОГИЗ, 1950.
М. И. Иванов, Русские счета и их использование в школе, Учпедгиз, 1953.
М. С. Тукачинский, Как считают машины, ГТТИ, 1952.
С. Голицын, Хочу быть топографом, Детгиз, 1953.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	<i>Стр.</i>		<i>Стр.</i>
От автора	3	§ 3. Указания к проведению урока: счет, число, нумерация (устная и письменная)	82
Глава I. Общие методические указания к преподаванию арифметики		§ 4. Величина. Измерение величин (общие указания)	88
§ 1. Цели обучения арифметике	5	§ 5. Указания к уроку: величина, измерение величины, меры	90
§ 2. Научные методы в преподавании арифметики	9	Глава III. Сложение	
§ 3. Воспитательная работа	14	§ 1. Введение	98
§ 4. Политехническое обучение	17	§ 2. Сложение	99
§ 5. Самостоятельная работа на уроке	40	§ 3. Законы сложения	100
§ 6. Чтение. Речь учащихся	42	§ 4. Задачи, решаемые сложением	102
§ 7. Наглядность. Диаграммы. Графики	43	§ 5. Правила сложения чисел	103
§ 8. Содержание и план занятий по арифметике	46	Глава IV. Вычитание	
§ 9. Подготовка к уроку	50	§ 1. Введение	106
§ 10. Урок	51	§ 2. Задачи, решаемые вычитанием	—
§ 11. Письменные упражнения. Записи	54	§ 3. Свойства вычитания	107
§ 12. Устные упражнения	58	§ 4. Зависимость между вычитанием и сложением	110
§ 13. Повторение	62	§ 5. Изменение суммы и разности. Скобки	113
§ 14. Домашняя работа. Тетрадь	66	§ 6. Задачи на время	118
§ 15. Учет. Работа с отстающими	68	§ 7. Примеры для контрольной работы	121
§ 16. Внеклассная работа	72	Глава V. Умножение	
Глава II. Нумерация		§ 1. Введение	122
§ 1. Введение	76	§ 2. Задачи, решаемые умножением	124
§ 2. Исторические сведения о числе и счете	77		

	<i>Стр.</i>
§ 3. Законы умножения . . .	125
§ 4. Правила умножения . . .	128
§ 5. Исторические замечания	133
§ 6. Изменение произведения	135
§ 7. Сокращенные приемы умножения	142
§ 8. Примеры для контрольной работы	143

Глава VI. Деление. Совместные действия

§ 1. Введение	144
§ 2. Задачи, решаемые делением	—
§ 3. Зависимость между делением и умножением .	148
§ 4. Свойства действия деления	150
§ 5. Деление без остатка	152
§ 6. Деление с остатком	158
§ 7. Изменение частного	162
§ 8. Порядок действия при совместных действиях. Скобки	167
§ 9. Примеры для контрольной работы	172

Глава VII. Свойства чисел. Делимость чисел

§ 1. Введение. Внеклассные занятия	174
§ 2. Делимость суммы и произведения	182
§ 3. Общий признак делимости чисел	187
§ 4. Признаки делимости чисел на 2 и на 5	189
§ 5. Признаки делимости чисел на 4, на 25, на 8 и на 125	190
§ 6. Признаки делимости чисел на 9 и на 3	192
§ 7. Числа простые (первоначальные) и составные	194
§ 8. Разложение чисел на простые множители. Показатель степени	196
§ 9. Общий делитель чисел. Наибольший общий делитель (НОД)	200

	<i>Стр.</i>
§ 10. Общее кратное чисел. Наименьшее общее кратное (НОК)	203
§ 11. Проверка числом 9	208
§ 12. Примерные упражнения для контрольной работы	211

Глава VIII. Дробные числа

§ 1. Порядок изучения вопроса	213
§ 2. Исторические сведения. Внеклассные занятия	215
§ 3. Из теории вопроса в связи с методикой преподавания	220
§ 4. Введение дробного числа	222
§ 5. Получение дробного числа при измерении	224
§ 6. Получение дробного числа при делении	227
§ 7. Чтение и запись дроби	228
§ 8. Равенство и неравенство дробных чисел	230
§ 9. Преобразования смешанного числа и неправильной дроби	232
§ 10. Увеличение и уменьшение дроби	235
§ 11. Основное свойство дроби	239
§ 12. Сокращение дроби. Несократимая дробь	241
§ 13. Приведение дробей к общему знаменателю	243
§ 14. Примерные вопросы для контрольной работы	244

Глава IX. Действия над обыкновенными дробями

§ 1. Сложение и вычитание дробных и смешанных чисел. Устные вычисления	246
§ 2. Примеры для контрольной работы	256
§ 3. Умножение дробного числа на целое число	257

	<i>Стр.</i>
§ 4. Деление на целое число	261
§ 5. Умножение на дробь	264
§ 6. Нахождение доли числа если умножение	267
§ 7. Нахождение нескольких долей числа двумя дей- ствиями	269
§ 8. Нахождение дроби чи- сла умножением. Умно- жение на правильную дробь	271
§ 9. Упражнения на умноже- ние дробных чисел	277
§ 10. Примеры для контроль- ной работы	280
§ 11. Нахождение числа по известной величине его дроби	281
§ 12. Деление дробных чисел	282
§ 13. Правила деления дроб- ных чисел	286
§ 14. Задачи, решаемые де- лением	290
§ 15. Изменение произведе- ния и частного	292
§ 16. Отношение двух чисел	295
§ 17. Примеры для контроль- ной работы на деление	302

Глава X. Десятичные дроби

§ 1. Введение	304
§ 2. Запись. Чтение десятич- ной дроби.	307
§ 3. Приведение дробей к одинаковому знаменате- лю. Сокращение дробей	314
§ 4. Равенство десятичных дробей. Сравнение де- сятичных дробей	316
§ 5. Сложение и вычитание десятичных дробей	317
§ 6. Умножение и деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.	318
§ 7. Упражнения. Задачи	322
§ 8. Примерные вопросы для контрольной работы	323
§ 9. Умножение десятичных дробей	324
§ 10. Примеры для контроль- ной работы	331

	<i>Стр.</i>
§ 11. Деление десятичных дро- бей. Деление десятичной дроби на целое число	331
§ 12. Приближенное частное	334
§ 13. Деление на десятичную дробь	336
§ 14. Примеры для контроль- ной работы	341
§ 15. Запись десятичной дро- би в виде обыкновен- ной	342
§ 16. Обращение обыкновен- ной дроби в десятичную	342
§ 17. Приближенное значе- ние дроби	345
§ 18. Совместные действия с обыкновенными и де- сятичными дробями	347
§ 19. Примеры для контроль- ной работы	348
§ 20. Периодические дроби	349
§ 21. Приближенные вычис- ления	354

Глава XI. Проценты

§ 1. Введение	364
§ 2. Предварительные упраж- нения	366
§ 3. Нахождение процентов данного числа	372
§ 4. Нахождение числа по данному числу его про- центов	376
§ 5. Нахождение процент- ного отношения двух чисел	381
§ 6. Примерная контрольная работа	387
§ 7. Практические работы	388

Глава XII. Задачи

§ 1. Введение	393
§ 2. Синтетический и анали- тический приемы	397
§ 3. Подготовка учащихся к решению составных за- дач	403
§ 4. Чтение и запись усло- вия задачи. Чертеж	405
§ 5. Примеры решения со- ставной задачи. Запись	411

	<i>Стр.</i>		<i>Стр.</i>
§ 6. Классификация задач, решаемых в курсе арифметики	421	§ 5. Сложная зависимость	495
§ 7. Методы решения задач	429	§ 6. Деление в данном отношении	499
§ 8. Наглядность при решении задач	467	§ 7. Примеры для контрольной работы	512
§ 9. Самостоятельное составление задач учащимися	468		
Глава XIII. Пропорции. Пропорциональные величины		Глава XIV. Задачи с геометрическим содержанием в курсе арифметики	
§ 1. Введение	471	§ 1. Введение	513
§ 2. Пропорции	473	§ 2. Прямоугольник и квадрат	514
§ 3. Пропорциональность величин. Решение задач пропорцией	480	§ 3. Параллелепипед и куб	518
§ 4. Решение задач приведением к единице	489	§ 4. Треугольник	522
		§ 5. Длина окружности и площадь круга	524
		§ 6. Цилиндр	528
		Приложения	531
		Список рекомендуемой литературы	537

Елизавета Савельевна Березанская
Методика арифметики

Редактор *Н. И. Лепешкина*
Технический редактор *И. В. Рыбин*
Корректор *А. А. Журавлёв*