А. Н. БАРСУКОВ

АЛГЕБРА

ЧАСТЬ

II

УЧЕБНИК
ДЛЯ 8-10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

МОСКВА • 1957

А. Н. БАРСУКОВ

АЛГЕБРА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

УЧЕБНИК
ДЛЯ 8—10 КЛАССОВ
СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Москва 1957

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Конкурсная комиссия по отбору нового учебника алгебры для 8—10 классов в составе академика П. С. Александрова, проф. А. Г. Куроша, проф. Е. Б. Дынкина, учителей средней школы П. А. Фаворского, Н. Ф. Власика, А. А. Колосова и Н. Ф. Острогского, рассмотрев представленные на конкурс рукописи учебников, рекомендовала две из них к изданию в качестве пробных учебников: рукопись, написанную А. Н. Барсуковым и рукопись, написанную коллективом авторов под редакцией А. И. Маркушевича.

ГЛАВА 1

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ЧИСЕЛ

§ 1. Возведение чисел в квадрат.

Чтобы найти квадрат числа, надо это число умножить само на себя.

Примеры.

$$135^2 = 135 \cdot 135 = 18\,225.$$

$$\left(3\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{23}{7} \cdot \frac{23}{7} = 10\frac{39}{49}.$$

$$(-2{,}4)^2 = (-2{,}4) \cdot (-2{,}4) = 5{,}76.$$

В практической деятельности возводить числа в квадрат приходится часто. Поэтому существуют различные способы, позволяющие найти квадрат числа быстрее, чем простым умножением. Укажем на некоторые из них.

1. Приемы устных вычислений. Следует знать наизусть квадраты чисел от 11 до 20, так как с ними особенно часто приходится встречаться. Квадраты чисел до 10 известны из таблицы умножения. Приведем квадраты чисел от 11 до 19.

$11^2 = 121;$	$14^2 = 196;$	$17^2 = 289;$
$12^2 = 144;$	$15^2 = 225;$	$18^2 = 324;$
$13^2 = 169;$	$16^2 = 256;$	$19^2 = 361.$

Квадраты этих чисел можно найти в уме по следующему правилу: к числу прибавить его единицы — получим десятки искомого квадрата; затем прибавить квадрат единиц.

Примеры.

$$12^2 = (12 + 2) \text{ десятков} + 2^2 = 144;$$

$$14^2 = (14 + 4) \text{ десятков} + 4^2 = 196;$$

$$17^2 = (17 + 7) \text{ десятков} + 7^2 = 289.$$

В первой части алгебры (§ 40) было показано, как вычислить в уме квадраты чисел, близких к целому числу десятков, пользуясь формулами квадрата суммы или разности двух чисел. Там же (§ 40) показан простой способ устного возведения в квадрат чисел, оканчивающихся пятеркой, а также смешанных чисел, дробная часть которых равна $\frac{1}{2}$. Эти приемы надо вспомнить и в дальнейшем применять везде, где возможно.

Покажем еще некоторые устные приемы возведения чисел в квадрат.

Выведем правило для возведения в квадрат чисел, близких к 50.

1) Пусть число M несколько больше 50. Мы можем записать его так: $M = 50 + a$. Тогда:

$$M^2 = (50 + a)^2 = 2500 + 2 \quad 50 \cdot a + a^2 = 100(25 + a) + a^2.$$

Значит, чтобы возвести в квадрат число, большее 50, можно прибавить к 25 избыток данного числа над 50 — получим сотни искомого квадрата; затем прибавить квадрат избытка.

Примеры.

$$54^2 = (25 + 4) \text{ сотен} + 4^2 = 2916;$$
$$63^2 = (25 + 13) \text{ сотен} + 13^2 = 3800 + 169 = 3969.$$

2) Если число M немного меньше пятидесяти, то запишем его в виде $M = 50 - a$ и применим формулу квадрата разности.

$$M^2 = (50 - a)^2 = 2500 - 2 \quad 50a + a^2 = 100(25 - a) + a^2.$$

Значит, чтобы возвести в квадрат число, меньшее 50, можно вычесть из 25 недостаток данного числа до 50 — получим сотни искомого квадрата; затем прибавить квадрат недостатка.

Примеры.

$$46^2 = (25 - 4) \text{ сотен} + 4^2 = 2116;$$
$$48^2 = (25 - 2) \text{ сотен} + 2^2 = 2304.$$

Выведем правило для возведения в квадрат чисел, близких к 100.

3) Пусть число $M = 100 + a \quad (a > 0)$.

Тогда имеем:

$$M^2 = (100 + a)^2 = 10\,000 + 2 \cdot 100a + a^2 = 100(100 + 2a) + a^2 =$$
$$= 100(M + a) + a^2.$$

Значит, чтобы возвести в квадрат число, большее 100, надо прибавить к нему избыток его над сотней — получим сотни искомого квадрата; затем прибавить квадрат избытка.

Примеры.

$$104^2 = (104 + 4) \text{ сотен} + 4^2 = 10\,816;$$
$$107^2 = (107 + 7) \text{ сотен} + 7^2 = 11\,449;$$
$$112^2 = (112 + 12) \text{ сотен} + 12^2 = 12\,544.$$

4) Если число $M = 100 - a\,(a > 0)$, то будем иметь:

$$M^2 = (100 - a)^2 = 10\,000 - 2 \quad 100a + a^2 =$$
$$= 100(100 - 2a) + a^2 = 100(M - a) + a^2.$$

Чтобы возвести в квадрат число, меньшее 100, надо из него вычесть его недостаток до сотни — получим сотни искомого квадрата; затем прибавить квадрат недостатка.

Примеры.

$$94^2 = (94 - 6) \text{ сотен} + 6^2 = 8836;$$
$$97^2 = (97 - 3) \text{ сотен} + 3^2 = 9409.$$

2. Таблицы. Печатаются специальные таблицы, в которых приводятся квадраты чисел.

В учебном пособии В. М. Брадиса „Четырехзначные математические таблицы" имеется таблица квадратов чисел, состоящих не более чем из четырех цифр.

Квадраты чисел, состоящих из двух цифр, находятся легко. В первом столбце таблицы размещены числа от 1 до 10 с промежутком в 0,1. Рядом с каждым из этих чисел во втором столбце находим его квадрат, например:

$$4{,}3^2 = 18{,}49; \quad 5{,}6^2 = 31{,}36; \quad 8{,}0^2 = 64.$$

Если в первых двух столбцах таблицы не будем обращать внимания на запятые, то получим таблицу квадратов целых чисел от 10 до 100, например:

$$43^2 = 1849; \quad 56^2 = 3136; \quad 80^2 = 6400.$$

Эти же два столбца могут служить для нахождения квадратов любых чисел, состоящих из двух цифр с нулями перед ними, или после них.

Для этого надо запомнить правило: если в числе перенести запятую вправо или влево на несколько цифр, то в квадрате этого числа надо перенести запятую в ту же сторону на удвоенное число цифр.

Например, в таблице находим: $7{,}8^2 = 60{,}84$. Значит:

$$78^2 = 6084; \quad 780^2 = 608\,400; \quad 0{,}78^2 = 0{,}6084; \quad 0{,}078^2 = 0{,}006084.$$

Таблица квадратов в книге В. М. Брадиса, кроме двух столбцов, рассмотренных выше, содержит еще столбцы, помеченные вверху и внизу номерами от 1 до 9. Эти столбцы служат для нахождения квадратов чисел от 1 до 10, состоящих из трех цифр, то есть содержащих, кроме десятых долей, еще и сотые.

Покажем на примере, как находить квадраты таких чисел.

Пусть требуется найти квадрат числа 7,24. В первом столбце находим число 7,2 (первые две цифры данного числа). В той же строке в столбце под номером 4 (третья цифра данного числа) находим число 52,42 — квадрат числа 7,24.

Но если мы будем находить квадрат числа 7,24 умножением, то получим:

$$7{,}24^2 = 7{,}24 \cdot 7{,}24 = 52{,}4176,$$

а не 52,42. Значит, в таблице дано лишь приближенное значение квадрата числа 7,24.

Число 52,4176 округлено до четырех цифр. При этом последняя оставленная цифра увеличена на единицу, так как отброшенная часть составляет больше половины единицы последнего оставленного разряда, то есть больше 0,005 (число 52,42 ближе к 52,4176, чем число 52,41).

Таким же образом находим в таблице:

$$2{,}48^2 = 6{,}150 \text{ вместо } 6{,}1504;$$
$$1{,}74^2 = 3{,}028 \text{ вместо } 3{,}0276;$$
$$5{,}79^2 = 33{,}52 \text{ вместо } 33{,}5241;$$
$$9{,}16^2 = 83{,}91 \text{ вместо } 83{,}9056.$$

Почему в таблице даны лишь приближенные значения квадратов? Дело в том, что в практической деятельности числа получаются главным образом в результате измерения какой-либо величины (длины, площади, веса и пр.). Измерение же всегда дает лишь приближенное значение измеряемой величины. Степень точности полученного числа зависит от степени точности измерительных инструментов.

Но, если данное число — приближенное, то и квадрат его является приближенным числом. Возникает вопрос — какова же степень точности квадрата. Другими словами — какие из полученных цифр можно считать верными, или, как говорят, надежными, а какие следует отбросить как ненадежные?

Выясним этот вопрос на примере.

Пусть, измеряя длину стороны квадрата с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и до 0,001, мы получили следующие результаты:

1) 6 *м*; 2) 6,3 *м*; 3) 6,27 *м*; 4) 6,272 *м*.

Вычислить площадь этого квадрата.

Понятно, что чем точнее измерена сторона квадрата, тем точнее будет вычислена его площадь. Получим

a	a^2
6	36
6,3	39,69
6,27	39,3129
6,272	39,337984

Сравнивая результаты вычислений с наиболее точным — последним числом, замечаем, что в первом числе совпадает с последним только одна первая цифра, во втором — первые две, в третьем — первые три, то есть каждый раз оказывались надежными столько цифр, сколько их было в возводимом в квадрат числе.

Значит, возводя в квадрат приближенное число, мы вправе округлить результат до стольких цифр, сколько их было в данном числе.

Но здесь следует сделать важное замечание. Если, руководствуясь этим правилом, мы при возведении в квадрат приближенного числа 0,2 оставим в полученном числе 0,04 тоже две цифры (то есть получим нуль!), то совершим грубую ошибку. Дело в том, что в приведенном правиле счет цифр в числе начинается от первой неравной нулю цифры. В приближенных вычислениях различают значащие и незначащие цифры. Нули, стоящие впереди числа, являются незначащими цифрами. Поэтому, например, числа 0,2 и 0,04 содержат по одной значащей цифре. Точно так же:

число	0,042	содержит	2	значащие	цифры
„	2,06	„	3	„	„
„	0,0302	„	3	„	„

Примечание. Нули, стоящие в конце числа, считаются значащими, если они являются точными цифрами, и считаются незначащими, если они получились в результате округления числа. Например, 1 *м* = 100 *см*. В числе 100 все три цифры значащие. Округлив до сотен число 2331, получим 2300. В этом числе только две первые цифры значащие.

Приведенное выше правило округления квадратов приближенных чисел имеет в виду только значащие цифры.

a	Число значащих цифр	a^2	Округление по правилу
2,7	2	7,29	7,3
10,8	3	116,64	117
232	3	53824	53800
0,11	2	0,0121	0,012

Таким образом, правило возведения в квадрат приближенных чисел можно выразить так.

При возведении в квадрат приближенных чисел в результате следует оставить столько значащих цифр, сколько их было в данном числе (последняя цифра может быть и не совсем точной).

Найдем точные квадраты нескольких чисел:

$$3{,}6^2 = 12{,}96; \quad 8{,}75^2 = 76{,}5625; \quad 47^2 = 2209.$$

Если эти числа приближенные, то по правилу, приведенному выше, следует записать:

$$3{,}6^2 \approx 13; \quad 8{,}75^2 \approx 76{,}6; \quad 47^2 \approx 2200.$$

Примечания. 1. Когда хотят указать, что берется приближенное значение, то вместо знака равенства часто употребляют знак $\approx$.

2. Если найденный квадрат является промежуточным результатом, то есть над ним производятся дальнейшие действия, то оставляют на одну цифру больше, чем указывает правило. В этом случае для чисел, приведенных выше, следовало бы записать:

$$3{,}6^2 \approx 13{,}0; \quad 8{,}75^2 \approx 76{,}56; \quad 47^2 \approx 2210.$$

Такие именно приближенные значения с лишней (четвертой) цифрой и даны в таблицах В. М. Брадиса.

Для нахождения квадратов чисел, имеющих четыре цифры, в таблицах Брадиса справа помещены еще 9 занумерованных столбцов — „поправок“.

Пусть требуется найти квадрат числа 7,824. Находим по предыдущему квадрат числа 7,82. Он равен 61,15. Затем в той же строке в столбце „поправок“ за номером 4 (последняя цифра заданного числа) находим число 6, которое и прибавляем к числу 61,15. Получаем

$$7{,}824^2 \approx 61{,}21.$$

Еще пример: найти $47{,}33^2$.

Найдем сначала $4{,}73^2$. По таблице находим $4{,}73^2 \approx 22{,}37$. В столбце „поправок“ за номером 3 находим число 3, которое прибавляем к 22,37. Получим: $4{,}733^2 \approx 22{,}40$. Значит, по правилу, приведенному на странице 5, будем иметь:

$$47{,}33^2 \approx 2240.$$

Полезно запомнить очень легкий способ приближенного возведения в квадрат чисел, близких к единице.

Обозначим число, немного большее единицы, через $1+\alpha$. Тогда:

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2.$$

Но α^2 — очень малое число, которое мы можем отбросить. Получим легко запоминаемую формулу:

$$(1+\alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha.$$

Примеры.

$$1{,}02^2 \approx 1{,}04 \text{ (точный результат: } 1{,}0404);$$
$$1{,}04 \approx 1{,}08 \text{ („ „ } 1{,}0816).$$

Мы видим, что, округлив до трех цифр (по приведенному выше правилу приближенных вычислений) точные квадраты, мы получим как раз те же числа, которые получили устно по формуле.

Пользуясь этой же формулой, мы можем устно вычислить:

$$10{,}2^2 \approx 104; \quad 10{,}4^2 \approx 108; \quad 10{,}5 \approx 110;$$
$$102^2 \approx 10\,400; \quad 103^2 \approx 10\,600; \quad 104^2 \approx 10\,800.$$

Здесь мы применили правило о переносе запятой, приведенное в начале этого параграфа (стр. 5).

Сложнее, но все же просто вычислить в уме квадраты чисел, немного меньших единицы.

Обозначим точное число через $1-\alpha$.

$$(1-\alpha)^2 = 1-2\alpha+\alpha^2.$$

Отбрасывая малое число α^2, получим:

$$(1-\alpha)^2 \approx 1-2\alpha.$$

Примеры.

$$0{,}98^2 = (1-0{,}02)^2 \approx 1-0{,}04 = 0{,}96;$$
$$0{,}97^2 \approx 1-0{,}06 = 0{,}94;$$
$$9{,}9^2 \approx 100-2 = 98.$$

3. График. Если не требуется большая точность, то приближенно квадрат числа можно определить с помощью графика. Возьмем уравнение:

$$y = x^2$$

и построим его график. Составим таблицу для некоторых значений x.

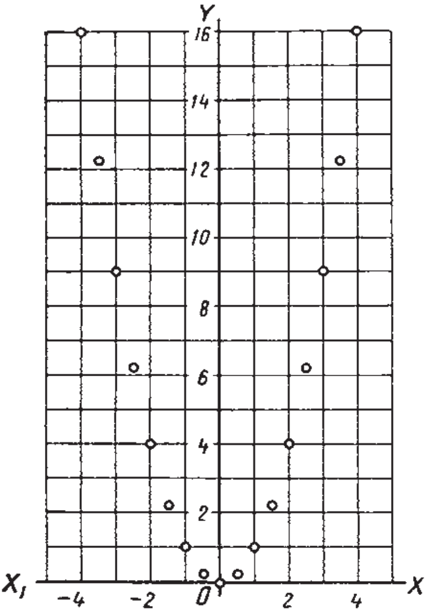
x	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1,5	2	2,5
y	16	12,25	9	6,25	4	2,25	-1	0,25	0	2,25	4	6,25

Построим соответствующие точки (черт. 1). Если будем давать x значения, промежуточные между уже взятыми, то соответствующие точки расположатся между полученными ранее. При всевозможных значениях x все точки расположатся на некоторой кривой, называемой параболой (черт. 2).

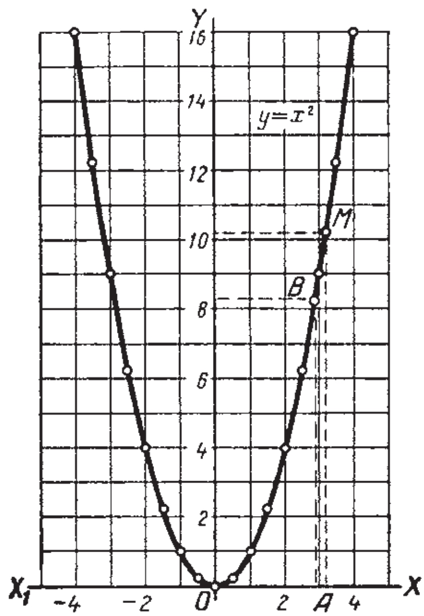
Пусть требуется найти квадрат числа 3,2. На оси абсцисс находим точку 3,2 (точка A) и из нее проводим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком в точке M. Ордината этой точки, приблизительно равная 10,2, и даст приближенное значение квадрата числа 3,2 (точное значение 10,24). Ординату можно найти, или измерив длину перпендикуляра AM, или проведя из точки M перпендикуляр к оси ординат. Полученная точка на оси ординат покажет величину квадрата данного числа.

Рассматривая чертеж 2, легко заметить, что все точки графика уравнения $y = x^2$ расположены симметрично относительно оси ординат. Это и понятно. Так как $(-3)^2 = 3^2$; $(-5)^2 = 5^2$ и вообще $(-a)^2 = a^2$, то точки, имеющие абсциссы, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку, имеют одинаковые ординаты. Значит, каждой точке $A(x; y)$ графика соответствует точка $B(-x; y)$ того же графика, расположенная по другую сторону оси ординат на том же расстоянии от этой оси. Таким образом, ***ось ординат является осью симметрии графика уравнения*** $\boldsymbol{y = x^2}$.

В связи с этим для практических вычислений строится обычно только одна правая ветвь графика. Ее достаточно, чтобы найти по графику квадрат любого числа. Квадрат положительного числа на-



Черт. 1.



Черт. 2.

ходится непосредственно по графику. Если же нужно найти квадрат отрицательного числа, например —3,6, то ищем по графику квадрат числа 3,6.

§ 2. Понятие об извлечении корня.

Решим две задачи.

Задача 1. *Сторона квадратного участка земли равна* 8 *м. Определить его площадь.*

Площадь S участка равна квадрату его стороны.

Значит:

$$S = 8^2 = 64\,(м^2).$$

Задача 2. *Площадь квадратного участка равна* 81 $м^2$. *Определить его сторону.*

Эта задача является обратной по отношению к первой: там была известна длина стороны квадрата и требовалось найти его площадь;

здесь, наоборот, известна величина площади квадрата и требуется найти длину его стороны.

Попробуем решить эту задачу. Обозначим неизвестную длину стороны квадрата через x метров. Тогда площадь квадрата будет равна x^2 $м^2$. Но по условию эта площадь равна 81 $м^2$. Получаем уравнение

$$x^2 = 81.$$

Значит, чтобы решить задачу 2, надо найти число, квадрат которого был бы равен 81. Из таблицы умножения найдем, что таким числом является 9. Действительно,

$$9^2 = 9 \cdot 9 = 81.$$

Число 9 называется корнем второй степени, или, короче, квадратным корнем из 81. Точно так же 7 является квадратным корнем из 49, так как $7^2 = 49$; число $\frac{2}{3}$ — квадратный корень из $\frac{4}{9}$, так как $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Определение 1. **Квадратным корнем из числа a называется число, квадрат которого равен a.**

Квадратный корень из a обозначается так: $\sqrt{a}$, где $\sqrt{}$ — знак корня. Из определения квадратного корня следует, что $(\sqrt{a})^2 = a$.
Число, стоящее под знаком корня, называется подкоренным числом.

Определение 2. **Действие, посредством которого отыскивается квадратный корень, называется извлечением квадратного корня.**

Извлечение корня является действием, обратным возведению в квадрат: там известно число и требовалось найти его квадрат; здесь известен квадрат числа и требуется найти само число.

Поэтому правильность извлечения квадратного корня можно проверить, возведя найденный корень в квадрат; если получится подкоренное число, значит корень найден верно.

§ 3. Арифметический корень.

Рассмотрим уравнение

$$x^2 = a \qquad (1)$$

при различных значениях a.

1) Пусть $a < 0$.

В этом случае уравнение (1) не имеет решений. Действительно, какое бы значение x мы ни взяли, квадрат его будет всегда положительным числом (или нулем) и, следовательно, не может равняться отрицательному числу a.

2) Пусть $a = 0$.

Очевидно, что в этом случае уравнение (1) имеет единственное решение $x = 0$.

Действительно, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$.

3) Пусть $a > 0$.

В этом случае, как мы уже видели на примере уравнения $x^2 = 81$, уравнение может иметь решение. Из всего сказанного можно сделать вывод.

Для того, чтобы из числа можно было извлечь квадратный корень, необходимо, чтобы оно было положительным числом или нулем.

Решая в § 2 уравнение

$$x^2 = 81,$$

мы нашли одно его решение: $x = 9$.

Но легко установить, что и число -9 тоже является решением этого уравнения, так как $(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$. Значит, число 81 имеет два квадратных корня. Точно так же число 144 имеет два квадратных корня: 12 и -12. Вообще, если b является квадратным корнем из какого-либо числа a, то и число, противоположное числу b, тоже является квадратным корнем из a. Действительно, если $b^2 = a$, то и $(-b)^2 = (-b)(-b) = b^2 = a$. Один из корней является положительным, другой отрицательным числом.

В практических вычислениях это двойное значение квадратного корня из положительного числа создает большие неудобства. Покажем это на примере.

Пусть при решении какой-либо задачи пришлось находить квадратные корни из чисел 81 и 25 и затем взять сумму этих корней. Беря каждый корень положительным или отрицательным, мы получим четыре различные суммы, именно:

$\sqrt{81}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{81}+\sqrt{25}$
9	5	14
9	-5	4
-9	5	-4
-9	-5	-14

Чтобы избежать таких разноречивых ответов, условились при извлечении квадратного корня брать только одно из его значений и именно положительное, так как при решении практических задач чаще приходится иметь дело только с положительным значением корня (см. задачу в § 2). Это положительное значение корня называется арифметическим корнем.

Определение. **Положительный корень из числа называется арифметическим корнем из этого числа.**

Выше мы видели, что $\sqrt{0}=0$. Часто нуль также называют арифметическим корнем из нуля.

Положительные числа и нуль вместе называются **неотрицательными числами**. Поэтому арифметический корень можно определить и так.

Неотрицательный корень из неотрицательного числа называется арифметическим корнем из этого числа.

Во всем дальнейшем изложении мы будем иметь в виду только арифметические корни $\left(\text{а также } \sqrt{0}=0\right)$.

Учитывая это условие, было бы неправильно утверждать, что всегда имеет место равенство:

$$\sqrt{a^2}=a.$$

Это равенство будет верным лишь при условии, что $a \geqslant 0$. Если же $a<0$, то верным будет такое равенство:

$$\sqrt{a^2}=-a.$$

Например, если $a=-5$, то будем иметь:

$$\sqrt{(-5)^2}=-(-5)=5.$$

Точно так же: $\sqrt{(-4)^2}=4$; $\sqrt{(-11)^2}=11$ и т. п.

Таким образом, правильно будет записать:

$$\sqrt{a^2}=\quad a \quad \text{при} \quad a \geqslant 0;$$

$$\sqrt{a^2}=-a \quad \text{при} \quad a<0.$$

Приняв во внимание, что абсолютная величина числа всегда положительна (или равна нулю), оба эти равенства можно объединить в одно:

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

§ 4. Квадратные корни из натуральных чисел, меньших 10000.

1. Предварительные замечания. В дальнейшем изложении мы будем опираться на следующие два, достаточно очевидные положения.

1) Большему из двух положительных чисел соответствует и больший квадрат.

2) Большему из двух положительных чисел соответствует и больший арифметический корень.

Приведем доказательство этих положений, выразив их в виде теорем.

Теорема 1. ***Если $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$.***

Доказательство. Умножив обе части данного неравенства на положительное число b, получим:

$$ab > b^2. \tag{1}$$

В левой части неравенства (1) заменим множитель b большим множителем a. Из арифметики известно, что от этого произведение увеличится. Значит, и подавно будем иметь:

$$a^2 > b^2. \tag{2}$$

Теорема 2. ***Если $a > b > 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.***

Доказательство (от противного).

1) Предположим, что $\sqrt{a} = \sqrt{b}$. Тогда получим: $(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2$, то есть $a = b$, что противоречит условию.

2) Предположим, что $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Тогда по теореме 1 будем иметь $(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2$, то есть $a < b$, что также противоречит условию. Значит, остается единственно возможное положение, что $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Возьмем квадраты двух каких-либо соседних натуральных чисел, например:

$$8^2 = 64; \quad 9^2 = 81.$$

Значит,

$$\sqrt{64} = 8; \quad \sqrt{81} = 9.$$

Отсюда сразу видно, что никакое целое число, заключенное между 64 и 81, не может иметь целый квадратный корень.

В самом деле, если

$$64 < a < 81,$$

то по теореме 2 должно быть:

$$\sqrt{64} < \sqrt{a} < \sqrt{81},$$

то есть

$$8 < \sqrt{a} < 9.$$

Но между 8 и 9 нет никакого целого числа. Значит, число a не может иметь целый квадратный корень.

Таким образом, только некоторые натуральные числа имеют целый квадратный корень. Такие числа называют точными квадратами целого числа. В настоящем параграфе мы будем говорить только о таких числах.

Квадратные корни из чисел, меньших 100, находятся по таблице умножения (их, конечно, надо знать наизусть).

Посмотрим, как можно найти квадратный корень из чисел, бóльших 100, но меньших 10 000.

Примечание. В дальнейшем для краткости вместо слов „квадратный корень“ будем говорить просто „корень“.

2. Число цифр корня. Если данное число больше 100, то корень из него должен быть больше, чем $\sqrt{100}$, то есть больше 10 (см. п. 1). С другой стороны, если число меньше 10 000, то корень из него должен быть меньше, чем $\sqrt{10\,000}$, то есть меньше 100. Таким образом, квадратный корень из числа, большего 100, но меньшего 10 000, должен быть двузначным числом, то есть состоять из десятков и единиц (в частном случае на месте единиц может стоять нуль).

Коротко все сказанное можно выразить в виде неравенств. Если

$$100 < N < 10\,000,$$

то

$$\sqrt{100} < \sqrt{N} < \sqrt{10\,000},$$

то есть

$$10 < \sqrt{N} < 100.$$

3. Нахождение десятков корня. В общем случае, как мы видели, корень из числа, большего 100, но меньшего 10 000, состоит из десятков и единиц. Легко определить число десятков корня.

Пусть требуется найти $\sqrt{1225}$. Определим, между какими двумя целыми квадратами лежит число сотен подкоренного числа.

Легко видеть, что

$$9 < 12 < 16.$$

Отсюда мы можем заключить, что

$$900 < 1225 < 1600.$$

Следовательно,

$$\sqrt{900} < \sqrt{1225} < \sqrt{1600}$$

или

$$30 < \sqrt{1225} < 40.$$

Отсюда следует, что $\sqrt{1225}$ содержит 3 десятка и сколько-то единиц. Таким образом, число десятков корня найдено.

Еще пример. Найдем десятки корня из 5184;

$$\begin{aligned} 49 &< 51 < 64; \\ 4900 &< 5184 < 6400; \\ 70 &< \sqrt{5184} < 80. \end{aligned}$$

Значит, искомый корень имеет 7 десятков и сколько-то единиц.

Точно так же для числа $\sqrt{1681}$:

$$\begin{aligned} 16 &= 16 < 25; \\ 1600 &< 1681 < 2500; \\ 40 &< \sqrt{1681} < 50. \end{aligned}$$

Корень содержит 4 десятка и сколько-то единиц. В последнем примере число сотен подкоренного числа оказалось точным квадратом, а отсюда число десятков корня точно равно корню из числа сотен.

Итак, чтобы определить десятки корня, достаточно найти наибольший целый квадрат, который не превышает числа сотен подкоренного выражения.

Квадратный корень из этого найденного числа и даст число десятков корня.

Для краткости мы это правило выразим так:

Чтобы найти число десятков корня, надо извлечь наибольший целый квадратный корень из сотен подкоренного числа.

Примеры.

1) $\sqrt{2209}$ имеет 4 десятка, так как $4^2 < 22 < 5^2$;

2) $\sqrt{7744}$ имеет 8 десятков, так как $8^2 < 77 < 9^2$;

3) $\sqrt{441}$ имеет 2 десятка, так как $2^2 = 4$.

4. Нахождение единиц корня. Итак, если корень из данного числа является двузначным числом, то десятки этого корня мы легко найдем по правилу, приведенному выше.

Посмотрим теперь, как найти число единиц корня.

Пусть требуется найти $\sqrt{2209}$.

Находим сначала число десятков корня. Так как

$$4^2 < 22 < 5^2,$$

то сразу находим, что корень содержит 4 десятка и несколько единиц.

Обозначим пока неизвестное нам число единиц через b. Тогда мы можем написать:

$$\sqrt{2209} = 40 + b. \tag{1}$$

Но отсюда следует, что

$$2209 = (40 + b)^2, \tag{2}$$

или, по возведении в квадрат двучлена $40 + b$, получим:

$$2209 = 1600 + 2 \cdot 40 \cdot b + b^2. \tag{3}$$

Мы могли бы найти значение b путем проб, подставляя в правую часть равенства (3) вместо b числа 1, 2, 3 и т. д. до тех пор, пока в правой части не получится 2209. Но этот способ довольно длинен, особенно если b больше пяти.

Попробуем определить значение b быстрее. Для этого упростим прежде всего равенство (3), вычтя из обеих частей 1600 (т. е. квадрат десятков корня: 40^2). Получим:

$$609 = 2 \cdot 40 \cdot b + b^2$$

или

$$609 = (80 + b)\,b. \tag{4}$$

Мы видим, что полученный остаток (от вычитания квадрата десятков корня) является произведением чисел: числа b, т. е. числа единиц корня, и двузначного числа $(80 + b)$, содержащего 8 десятков (то есть удвоенное число десятков корня) и b единиц. Следовательно, число b мы получим, разделив 609 на $80 + b$.

$$609 \,\underline{|\, 80 + b}\atop \quad\; b \; .$$

Но цифру единиц делителя мы не знаем.

Запишем поэтому деление так:

$$609 \,\underline{|\, 8?}\,.$$

Знак (?) в делителе показывает, что здесь должны быть поставлены единицы. Чтобы определить цифру частного, будем, как делали в арифметике, делить десятки делимого на десятки делителя, то есть 60 делить на 8. Получим 7. Для проверки подставим в делителе на месте единиц и в частном цифру 7. (Ведь и в частном, и на месте единиц делителя должно быть одно и то же число). Получим:

$$609 \,\underline{|\, 87}\atop \quad\; 7 \; .$$

Умножаем теперь 87 на 7 и получаем 609.

Значит, число единиц корня действительно равно 7.

Весь искомый корень будет 47.

Возьмем еще пример: найдем $\sqrt{1444}$.

Число десятков находим сразу. Оно равно 3, так как $3^2 < 14 < 4^2$.

Теперь имеем:

$$1444 = (30 + b)^2;$$

$$1444 = 900 + 2 \cdot 30 \cdot b + b^2.$$

Вычтя квадрат десятков, получим:

$$544 = 2 \cdot 30 \cdot b + b^2$$

или

$$544 = (60 + b)\,b.$$

Далее поступаем, как и в первом примере:

$$544 \,\underline{|\, 6?}\,.$$

(Запомним, что и здесь число 6 есть удвоенное число десятков корня $2 \cdot 3$.)

Делим десятки делимого, то есть 54, на десятки делителя, на 6. Получаем 9. Подставляем 9 в частное и на место единиц делителя:

$$544 \,\underline{|\, 69}\atop \quad\; 9 \; .$$

Умножив 69 на 9, мы получили 621, а не 544.

Очевидно, число 9 не годится, оно велико. Берем поэтому меньшее число 8 и испытываем его:

$$\begin{array}{r|l} -\,544 & 68 \\ \underline{544} & \overline{8} \\ 0 & \end{array}$$

Проверка показывает, что число 8 подходит.

Значит, искомый корень 38.

Еще пример: $\sqrt{4225}$.

Так как

$$36 < 42 < 49,$$

то число десятков корня равно 6.

Вычитаем из 4225 квадрат десятков, то есть из 42 сотен вычитаем 36 сотен. Получим остаток 625. По предыдущему будем иметь:

$$625 = (120 + b)\,b.$$

Удвоенное число десятков корня равно 12. Поэтому пишем:

$$\begin{array}{r|l} 625 & \underline{12?} \end{array}$$

и делим десятки делимого, то есть 62, на десятки делителя, на 12. Получаем 5. Испытываем это число:

$$\begin{array}{r|l} -\,625 & 125 \\ \underline{625} & \overline{5}\,. \\ 0 & \end{array}$$

Значит, число единиц корня равно 5, а весь корень равен 65.

5. Запись действия. Поняв и усвоив самый процесс вычисления квадратного корня, мы можем не прибегать к такой подробной записи всех действий, как делали до сих пор, чем значительно сэкономим время. Покажем на примере, как производится запись действия.

Найдем $\sqrt{8836}$. Записываем:

$$\sqrt{88'36} =$$

Запятой сверху мы отделили сотни. Справа от знака равенства будем записывать цифры корня по мере их нахождения. Находим в уме число десятков корня. Оно равно 9 (так как $9^2 < 88 < 10^2$). Записываем найденное число десятков справа от знака равенства:

$$\sqrt{88'36} = 9$$

Вычитаем из 8836 квадрат десятков корня.

Так как $90^2 = 8100$, то подпишем 81 сотню под 88 сотнями, произведем вычитание и к остатку припишем десятки и единицы:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{88'36} & = 9 \\ -\,81 & \\ \hline 7\,36 & \end{array}$$

Теперь, чтобы найти единицы корня, мы должны десятки остатка, то есть 73, разделить на удвоенные десятки корня, на 18. Запишем это так:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{88'36} & = 9 \\ -\,81 & \\ \hline 73'6 & \underline{|\,18}\,. \end{array}$$

Для ясности мы в остатке отделили десятки запятой сверху. В делителе мы не поставили знак (?) на месте единиц, как делали раньше. Мы просто будем помнить, что в делителе нужно будет еще поставить единицы. Делим 73 на 18, получаем 4. Проставляем найденное число в делителе и в частном и производим проверку. Получается такая запись:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{88'36} & = 9 \\ -\,81 & \\ \hline -\,7'36 & |\,184 \\ 7\;36 & \overline{4} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Проверка показывает, что найденное число 4 верное. Записываем его справа от знака равенства на месте единиц. В итоге получается такая запись:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{88'36} & = 94 \\ -\,81 & \\ \hline -\,73'6 & |\,184 \\ 73\;6 & \overline{4} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Покажем, как при такой записи изобразится решение первого примера, который мы привели в пункте 4, именно $\sqrt{2209}$. Запись будет проходить через такие этапы:

1) $\sqrt{22'09} = 4$ ... Нахождение числа десятков корня.

2) $\begin{array}{rl} \sqrt{22'09} & = 4 \\ -\,16 & \\ \hline 6\,09 & \end{array}$ ... Нахождение остатка после вычитания квадрата десятков.

3) $\begin{array}{rl} \sqrt{22'09} & = 4 \\ -\,16 & \\ \hline 60'9 & \underline{|\,8} \end{array}$ ... Деление десятков остатка на удвоенные десятки корня.

$$
\begin{array}{l}
4)\ \sqrt{22'09} = 4\ \ldots \text{ Проверка полученного частного.} \\
\quad -\underline{16} \\
\quad -\begin{array}{r} 60'9 \\ \underline{60\ 9} \\ 0 \end{array} \begin{array}{|l} 87 \\ \hline 7 \\ \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
5)\ \sqrt{22'09} = 47\ \ldots \text{ Запись единиц корня.} \\
\quad -\underline{16} \\
\quad -\begin{array}{r} 60'9 \\ \underline{60\ 9} \\ 0 \end{array} \begin{array}{|l} 87 \\ \hline 7 \\ \end{array}
\end{array}
$$

§ 5. Приближенные корни с точностью до 1.

Как уже было сказано раньше, только некоторые из чисел натурального ряда являются точными квадратами и, следовательно, квадратный корень из них является натуральным числом.

Например, 10 не является квадратом никакого натурального числа, так как $3^2 < 10 < 4^2$.

Но между 3 и 4 нет целых чисел. Значит, не существует целого числа, квадрат которого был бы равен 10. Но может быть в таком случае существует дробное число, квадрат которого был бы равен 10. Покажем, что и этого быть не может. Докажем следующую теорему.

Теорема. ***Если натуральное число не является квадратом целого числа, то оно не может быть и квадратом дроби.***

Доказательство. Предположим противное: пусть целое число a является квадратом несократимой дроби $\frac{m}{n}$ (значит, m и n не имеют общих множителей).

Тогда получим:

$$a = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m \cdot m}{n \cdot n}.$$

В левой части этого равенства целое число a. Значит, и правая часть должна быть целым числом. Но этого не может быть, так как числитель в правой части содержит только те множители, которые входят в m, а знаменатель — только те множители, которые входят в n. Числа же m и n по условию общих множителей не имеют.

Дробь $\frac{m^2}{n^2}$ несократима и потому не может быть равна целому числу. Значит, не существует такой дроби, квадрат которой был бы равен a. Теорема доказана.

Введем для чисел, не являющихся квадратами, понятие о приближенном значении корня.

Возьмем опять число 10, не являющееся точным квадратом. Имеем:

$$3^2 < 10 < 4^2.$$

Квадрат числа 3 меньше 10, а квадрат следующего за ним числа уже больше десяти. Вот эти два числа мы и назовем приближенными значениями корня с точностью до единицы. При этом число 3 будет приближенным значением $\sqrt{10}$ с недостатком (квадрат его меньше 10), а число четыре — приближенным значением $\sqrt{10}$ с избытком (квадрат его больше 10).

Еще пример:

$$64 < 70 < 81,$$

или

$$8^2 < 70 < 9^2.$$

Следовательно, 8 является приближенным значением $\sqrt{70}$ с недостатком, а 9 — приближенным значением $\sqrt{70}$ с избытком (с точностью до единицы).

Дадим теперь общее определение приближенного корня.

Приближенными значениями квадратного корня из данного числа с точностью до единицы называются два последовательных натуральных числа, из которых квадрат первого меньше, а квадрат второго больше данного числа.

Первое из этих чисел называется приближенным значением корня с недостатком, второе — приближенным значением корня с избытком.

Записывают приближенные значения корня так:

$$\sqrt{10} \approx 3 \text{ (с нед.)}; \quad \sqrt{10} \approx 4 \text{ (с изб.)}$$

Примеры.

$$\sqrt{134} \approx 11 \text{ (с нед.)}; \quad \sqrt{134} \approx 12 \text{ (с изб.)};$$

$$\sqrt{1000} \approx 31 \text{ (с нед.)}; \quad \sqrt{1000} \approx 32 \text{ (с изб.)}.$$

Вместо слов „приближенное значение квадратного корня", часто говорят просто „приближенный квадратный корень".

Приближенный квадратный корень вычисляется так же, как и точный квадратный корень. Покажем это на примере. Пусть требуется найти квадратный корень (если он имеется) из числа 1867. Будем производить вычисления так, как указано в предыдущем параграфе.

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt{\overline{1867}} & = 43 \\
-\underline{16} & \\
-\,267 & \big|\, \underline{83} \\
\underline{249} & \ \ 3 \\
18 &
\end{array}
$$

Как видим, положив частное равным трем и умножив на три делитель (после приписки к нему 3 единиц), мы получили число, меньшее делимого. Взяв число 4, получим число, большее делимого. Это и показывает, что 1867 не является точным квадратом. Одновременно мы нашли приближенные квадратные корни из числа 1867: это числа 43 и 44. Действительно,

$$43^2 = 1849, \quad 44^2 = 1936$$

и

$$1849 < 1867 < 1936.$$

О приближенном корне с недостатком можно сказать, что он является корнем из наибольшего целого квадрата, меньшего подкоренного числа.

И наоборот, когда в предыдущем параграфе мы определяли число десятков корня, то можем также сказать, что мы находили приближенное значение корня из числа сотен подкоренного числа с точностью до единицы с недостатком.

§ 6. Извлечение квадратного корня из натуральных чисел любой величины.

Пусть требуется найти квадратный корень из 142 884. Так как это число больше 10 000, то и корень из него будет больше 100. Но мы любое число можем представить как сумму десятков и единиц.

(Например: $587 = 10 \cdot 58 + 7$; $3264 = 10 \cdot 326 + 4$ и т. п.)

Итак, определим сначала число десятков корня. Для этого, как мы видели в § 4, нужно было извлечь корень из наибольшего целого квадрата, заключающегося в числе сотен.

Другими словами (§ 5), требуется из числа сотен извлечь квадратный корень с точностью до единицы с недостатком. Как это сделать, показано в § 5. Получим:

$$
\begin{array}{r l}
\sqrt{14'28} & = 37 \\
-\ 9 & \\
\hline
-\ 528 & \mid 67 \\
469 & \ \ \ 7 \\
\hline
59 &
\end{array}
$$

Итак, корень из 142 884 имеет 37 десятков. Теперь по правилу, изложенному в § 4, нужно из сотен подкоренного числа вычесть квадрат числа десятков, то есть $37^2 = 1369$. Но это уже сделано (из 1428 сотен вычтено 900 сотен и 469 сотен, всего 1 369 сотен). Остаток — 59 сотен.

С этим остатком поступаем, как указано в § 4; приписываем к нему последние две цифры данного подкоренного числа и делим десятки полученного числа на 74 — удвоенное число десятков корня получим:

$$\begin{array}{r|l} -\,598'4 & 748 \\ 5984 & \quad 8 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итак, число единиц корня равно 8. Весь корень равен 378.

Проверка. $378^2 = 142\,884$.

Все вычисления располагаются так:

$$\begin{array}{rl} \sqrt{14'28'84} = 378 & \\ -\,9 & \\ \hline -\,52'8 & |\,67 \\ 469 & \quad 7 \\ \hline -\,5984 & |\,748 \\ 5984 & \quad\; 8 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Приведем еще примеры вычислений квадратного корня из больших чисел.

Пример 1.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{7'21'46} = 268 & \\ -\,4 & \\ \hline -\,321 & |\,46 \\ 276 & \quad 6 \\ \hline -\,4546 & |\,528 \\ 4224 & \quad\; 8 \\ \hline 322 & \end{array}$$

В этом примере последнее деление дало остаток 322. (Если же вместо 8 взять 9, то получится число, большее 4546.) Значит, подкоренное число 72 146 не является точным квадратом.

Число 268 является его приближенным квадратным корнем с точностью до единицы с недостатком. Тогда число 269 будет его приближенным корнем с избытком. Действительно,

$$268^2 = 71\,824 < 72\,146; \quad 269^2 = 72\,361 > 72\,146.$$

Заметим, что $268^2 + 322 = 72\,146$, то есть остаток, получающийся при извлечении корня с точностью до единицы, равен разности между подкоренным числом и наибольшим целым квадратом, меньшим этого числа.

Пример 2.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{36'84'49} = 607 & \\ -\,36 & \\ \hline -\,8449 & |\,1207 \\ 8449 & \quad\;\; 7 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Особенность этого примера заключается в следующем. Найдя первую цифру корня, возведя ее в квадрат и вычтя из десятков тысяч подкоренного числа, мы не получили остатка. Снесли следующую грань 84. В делителе мы должны были написать удвоенную первую цифру корня, то есть 12, и делить 8 на это число. Понятно, что в частном получится нуль. Записав его как вторую цифру корня, мы приписали к 84 следующую грань 49, а делителем взяли уже 120. Деля 844 на 120, получили 7. Приписав ее к делителю и умножив его на 7, нашли, что корень равен 607.

Пример 3.

$$\sqrt{7'80'64'36} = 2794$$

```
 √ 7'80'64'36 = 2794
  -4
   ---
  -380 | 47
   329  ---
   ---    7
  -5164 |  549
   4941  -----
   ----      9
  -22336 |   5584
   22336  -------
   -----        4
       0
```

В этом примере, отделив в подкоренном числе сотни, мы получили число 78 064, большее 10 000. Тогда мы отделили еще две цифры и стали вычислять корень из сотен числа 78 064, то есть из числа 780. Получив 27, остальные цифры корня находили обычным порядком, то есть: к остатку 51 снесли следующую грань 64 и делили десятки числа 5164 на удвоенный найденный корень 54 и т. д.

§ 7. Приближенные корни с точностью до $\frac{1}{10^n}$

1. Корни с точностью до 0,1. В § 5 мы нашли приближенный квадратный корень из 10 с точностью до 1. Он равен трем (с недостатком) или четырем (с избытком), так как

$$3^2 < 10 < 4^2.$$

Но может быть найдутся дробные числа, квадраты которых ближе к 10, чем 3 и 4? Действительно, если взять числа 3,1 и 3,2 и возвести их в квадрат, то получим:

$$3{,}1^2 = 9{,}61; \quad 3{,}2^2 = 10{,}24.$$

Значит,

$$3{,}1^2 < 10 < 3{,}2^2.$$

Говорят в этом случае, что числа 3,1 и 3,2 являются приближенными квадратными корнями из 10 с точностью до 0,1, первое с недостатком, второе с избытком.

Определение. **Приближенным квадратным корнем из числа с точностью до 0,1 называются два числа, отличающиеся на 0,1, из которых квадрат одного меньше, а квадрат другого больше данного числа.**

Например, приближенными корнями с точностью до 0,1 из 32 будут 5,6 и 5,7, так как

$$5{,}6^2 = 31{,}36; \quad 5{,}7^2 = 32{,}49$$

и, значит,

$$5{,}6^2 < 32 < 5{,}7^2.$$

Как найти приближенный корень с точностью до 0,1? Покажем это сначала на примере.

Пусть требуется найти приближенный корень с точностью до 0,1 из 75. По определению это будут числа, отличающиеся на 0,1. Поэтому мы можем эти числа изобразить так:

$$\frac{x}{10} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{10}.$$

При этом должно быть:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 < 75 < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2,$$

или

$$\frac{x^2}{100} < 75 < \frac{(x+1)^2}{100}. \tag{1}$$

Определив x, найдем и требуемые приближенные корни. Для этого умножим все части неравенств (1) на 100; получим:

$$x^2 < 7500 < (x+1)^2. \tag{2}$$

Но неравенства (2) сразу показывают, что числа x и $x+1$ являются приближенными корнями из числа 7500 с точностью до 1 (§ 5). Такие корни мы уже умеем находить. Получим:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{-\,75'00} = 86 & \\
64 & \\
\hline
-\,1100 & \big|\ 166 \\
996 & \ \ \ \ \ 6 \\
\hline
104 &
\end{array}$$

Итак, $x = 86$. Значит, искомые дроби равны $\frac{86}{10}$ и $\frac{87}{10}$, или 8,6 и 8,7. Действительно,

$$8{,}6^2 = 73{,}96; \quad 8{,}7^2 = 75{,}69$$

и мы имеем:

$$8{,}6^2 < 75 < 8{,}7^2.$$

Повторим теперь наши рассуждения в общем виде. Пусть требуется найти приближенный корень с точностью до 0,1 из числа a. По определению мы должны найти две дроби $\frac{x}{10}$ и $\frac{x+1}{10}$, удовлетворяющие условию:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2,$$

или

$$\frac{x^2}{100} < a < \frac{(x+1)^2}{100}. \tag{3}$$

Чтобы найти x, приведем неравенства (3) к целому виду. Получим:

$$x^2 < 100a < (x+1)^2. \tag{4}$$

Неравенства (4) показывают, что x является приближенным корнем с точностью до 1 из данного числа a, увеличенного в 100 раз. Отсюда выводим такое правило.

Правило. ***Чтобы найти приближенный корень с точностью до 0,1, надо умножить подкоренное число на 100, из полученного числа извлечь корень с точностью до 1 и найденный результат разделить на 10.***

Примеры.

1. Найти $\sqrt{89}$ с точностью до 0,1. По правилу мы должны умножить 89 на 100 и извлечь с точностью до 1 корень из 8900. Получим:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{89'00} = 94 & \\
-\ 81 & \\
\hline
-\ 800 & \vert\ 184 \\
736 & \quad\ 4 \\
\hline
64 &
\end{array}$$

Найденный корень 94 надо уменьшить в 10 раз. Получим 9,4. Итак, $\sqrt{89} \approx 9{,}4$ (с недостатком).

Но мы можем несколько сократить запись.

Оставим под корнем число 89 и два нуля припишем к остатку 8. Этим самым мы увеличили 89 в 100 раз. Получив корень 94, уменьшим его в 10 раз. Вся запись примет такой вид:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{89} = 9{,}4 & \\
-\ 81 & \\
\hline
-\ 800 & \vert\ 184 \\
736 & \quad\ 4 \\
\hline
64 &
\end{array}$$

В итоге сразу получили искомый корень 9,4.

2. Найти $\sqrt{377}$ с точностью до 0,1.

Учитывая предыдущее замечание, запишем вычисления так:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{3'77} = 19{,}4 & \\
-\,\overline{277} & \big|\ \underline{29} \\
\underline{261} & \quad 9 \\
-\,1600 & \big|\ \underline{384} \\
\underline{1536} & \quad 4 \\
64 &
\end{array}$$

Итак, $\sqrt{377} \approx 19{,}4$ с точностью до 0,1 с недостатком.

3. Найти $\sqrt{42\,855}$ с точностью до 0,1.

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{4'28'55} = 207{,}0 & \\
\overline{2855} & \big|\ \underline{407} \\
\underline{2849} & \quad 7 \\
600 & \big|\ \underline{414}
\end{array}$$

В этом примере, получив остаток 6 и приписав два нуля, получим 600. Десятки этого числа 60 надо делить на удвоенный найденный корень, т. е. на 414. Так как делимое оказалось меньше делителя, то целое частное равно нулю, что мы и записали в результате. Это показывает, что приближенным значением корня с точностью до 0,1 с недостатком оказалось целое число 207. Значит, приближенным значением корня с избытком будет число 207,1. Действительно,

$$207^2 = 42\,849; \quad 207{,}1^2 = 42\,890{,}41,$$

то есть

$$207^2 < 42855 < 207{,}1^2.$$

Заметим, что в результате мы должны записать 207,0, а не просто 207. Эта запись показывает, что корень найден с точностью до 0,1, а не до 1, как можно было бы заключить при записи 207.

2. Корни с точностью до $\frac{1}{10^n}$. Совершенно так же, как определялся приближенный корень с точностью до 0,1, определяются приближенные корни с точностью до 0,01 до 0,001 и вообще с точностью до $\frac{1}{10^n}$. Достаточно в предыдущем определении (п. 1) число 0,1 заменить числом 0,01 или 0,001 и т. д. И способ нахождения этих корней остается тем же. Покажем это на примерах.

Примеры.

1. Найти $\sqrt{62}$ с точностью до 0,01.

Имеем:

$$\left(\frac{x}{100}\right)^2 < 62 < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{10\,000} < 62 < \frac{(x+1)^2}{10\,000}.$$

Отсюда

$$x^2 < 620\,000 < (x+1)^2.$$

Опять пришли к извлечению корня с точностью до 1. Только подкоренное число надо увеличить не в 100, а в 10 000 раз, то есть приписать к нему не два, а четыре нуля. Полученный корень разделить не на 10, а на 100. Запись будем вести по предыдущему.

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{62} = 7{,}87 & \\
-\,49 & \\
\hline
130'0 & \vert\ 148 \\
-\,1184 & \quad 8 \\
\hline
1160'0 & \vert\ 1567 \\
-\,10969 & \quad 7 \\
\hline
631 &
\end{array}$$

Приближенный корень с недостатком равен 7,87.

Действительно,

$$7{,}87^2 = 61{,}9369; \quad 7{,}88^2 = 62{,}0944$$

и, следовательно,

$$7{,}87^2 < 62 < 7{,}88^2.$$

2. Найти $\sqrt{769}$ с точностью до 0,001.

Из предыдущего ясно, что при извлечении корня придется три раза приписывать по два нуля.

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{7'69} = 27{,}730 & \\
-\,4 & \\
\hline
369 & \vert\ 47 \\
-\,329 & \quad 7 \\
\hline
400'0 & \vert\ 547 \\
-\,3829 & \quad 7 \\
\hline
1710'0 & \vert\ 5543 \\
-\,16629 & \quad 3 \\
\hline
4710'0 & \vert\ 5546
\end{array}$$

Последнее деление дало в частном нуль. Значит, приближенный корень с недостатком равен 27,730, а с избытком 27,731.

И здесь нуль, стоящий в конце полученного корня, показывает, что корень вычислен с точностью до 0,001, а не до 0,01, как можно было бы заключить при записи 27,73.

При извлечении приближенных корней мы каждый раз получаем два корня — один с недостатком, другой с избытком. Какой же из них следует брать? Это зависит от той задачи, которая ставилась и для которой вычислялся корень. Если, например, вычисляется диаметр отверстия гайки, то надо взять значение корня с избытком, так как если отверстие будет меньше нужного, то винт не войдет в него. Наоборот, по той же причине, вычисляя размеры винта, надо брать значение корня с недостатком.

Если допустимыми являются оба значения, то обычно берут то из них, квадрат которого ближе к подкоренному числу.

Из изложенного в настоящем параграфе следует, что из любого положительного числа можно извлечь квадратный корень с точностью до любого десятичного знака. Пусть требуется извлечь корень из приближенного числа a. Корень можно получить с любым числом десятичных знаков. Спрашивается, какие из полученных цифр являются надежными и какие следует отбросить как ненадежные.

В теории приближенных вычислений доказывается, что здесь действует то же правило, что и при возведении в квадрат: *в результате следует оставить столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе.*

§ 8. Извлечение корня из десятичных дробей.

В предыдущем параграфе мы фактически уже извлекали корни из десятичных дробей. Так, извлекая корень из 89 с точностью до 0,1, мы приписывали к 89 два нуля, то есть извлекали корень из 89,00; извлекая корень из 62 с точностью до 0,01, мы приписывали к 62 четыре нуля и извлекали корень из 62,0000.

Если же в подкоренном числе имеются десятые, сотые и т. д. доли, то вместо двух, четырех и т. д. нулей, будем приписывать к остатку эти доли. Покажем это на примерах.

Пример 1.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{184,96} = 13,6 & \\ -\ 1 & \\ \hline -\ 84 & 23 \\ 69 & \ \ 3 \\ \hline -\ 1596 & 266 \\ 1596 & \ \ \ \ 6 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Получили 13,6. *Проверка.* $13,6^2 = 184,96$.

Пример 2.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{69,2224} = 8,32 & \\ -\ 64 & \\ \hline -\ 522 & 163 \\ 489 & \ \ \ 3 \\ \hline -\ 3324 & 1662 \\ 3324 & \ \ \ \ \ 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Проверка. $8,32^2 = 69,2224$.

Отсюда выводим такое правило извлечения корня из десятичных дробей:

1. Извлекаем с точностью до единицы (с недостатком) корень из целой части.

2. Сносим к остатку два десятичных знака и, поступая по прежнему правилу, находим десятые доли корня.

3. Сносим к остатку следующие два десятичных знака и находим сотые доли корня и т. д.

Пример 3. Извлечь с точностью до 0,01 корень из дроби 14,24.

$$
\begin{array}{lll}
\sqrt{14,24} = 3,77 & & \\
-\,9 & & \\
\quad -\,524 & \big|\ 67 & \\
\quad\ \ \ 469 & \quad 7 & \\
\qquad -\,5500 & \big|\ 747 & \\
\qquad\ \ \ 5229 & \qquad 7 & \\
\qquad\ \ \ \ 271 & &
\end{array}
$$

Приписав к остатку 5 число 24, нашли десятые доли. Так как в подкоренном числе больше десятичных знаков нет, то к остатку 55 мы приписали два нуля.

Пример 4. Извлечь с точностью до 0,01 корень из дроби 0,3876832.

Так как в искомом корне должно быть два десятичных знака (десятые и сотые доли), то округлим подкоренное число, оставив в нем 4 десятичных знака.

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{0,38'77} = 0,62 & \\
-\,36 & \\
\quad -\,277 & \big|\ 122 \\
\quad\ \ \ 244 & \quad 2 \\
\quad\ \ \ \ 33 &
\end{array}
$$

Проверка. $0,62^2 = 0,3844$; $\quad 0,63^2 = 0,3969$,

$$0,62^2 < 0,3877 < 0,63^2.$$

Пример 5. Извлечь с точностью до 0,001 корень из числа 0,000625.

$$
\begin{array}{ll}
\sqrt{0,00'06'25} = 0,025 & \\
-\,4 & \\
\quad -\,225 & \big|\ 45 \\
\quad\ \ \ 225 & \quad 5 \\
\quad\ \ \ \ \ 0 &
\end{array}
$$

§ 9. Извлечение корня из обыкновенных дробей.

Возведем в квадрат дроби: $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{19}{5}$.

По правилу умножения дробей получим:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25};\quad \left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{49};$$

$$\left(\frac{19}{5}\right)^2=\frac{19}{5}\cdot\frac{19}{5}=\frac{361}{25}.$$

Видим, что каждый раз возводились в квадрат отдельно числитель и знаменатель. Значит, и наоборот: если числитель и знаменатель дроби являются точными квадратами, то, чтобы найти квадратный корень из этой дроби, достаточно извлечь корень отдельно из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй.

Примеры.

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3};\quad \sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5};\quad \sqrt{\frac{121}{144}}=\frac{11}{12};$$

$$\sqrt{3\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{49}{16}}=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}.$$

Правильность полученных результатов легко проверить, возведя каждый из них в квадрат.

Еще пример:

$$\sqrt{\frac{75}{108}}=\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}.$$

Здесь числитель и знаменатель данной дроби не являются квадратами. Но, сократив дробь на 3, мы получили дробь $\frac{25}{36}$, равную данной, в которой и числитель и знаменатель — квадраты.

Если же хотя бы один из членов несократимой дроби не является точным квадратом, то из такой дроби извлечь точный квадратный корень нельзя. Докажем это.

Теорема. ***Если в несократимой дроби хотя бы один из членов дроби не является точным квадратом, то эта дробь не может быть квадратом никакого рационального числа.***

Доказательство. Пусть имеем несократимую дробь $\frac{a}{b}$, у которой a или b (или оба) не является точным квадратом; ясно, что дробь $\frac{a}{b}$ не может быть квадратом целого числа, так как квадрат любого целого числа является тоже целым числом.

Допустим, что $\frac{a}{b}$ является квадратом некоторой несократимой дроби $\frac{m}{n}$. Тогда будем иметь:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{m}{n};\quad \frac{a}{b}=\frac{m^2}{n^2}. \tag{1}$$

Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$ $\left(\text{а следовательно, и } \frac{m^2}{n^2}\right)$ несократимы. А в арифметике доказывается, что две несократимые дроби могут быть равны тогда и только тогда, когда равны в отдельности их числители и знаменатели. Значит, из (1) имеем:

$$a=m^2;\quad b=n^2.$$

Но это противоречит условию, что из чисел a и b по крайней мере одно не является точным квадратом. Значит, равенства (1) быть не может, и теорема доказана.

Но если из дроби нельзя извлечь точный квадратный корень, то можно извлечь из нее приближенный корень с любой степенью точности. Покажем это на примерах.

Пример 1. Найти $\sqrt{\frac{67}{15}}$ с точностью до 0,1.

Обратим дробь $\frac{67}{15}$ в десятичную с точностью до 0,01. Получим:

$$\frac{67}{15}\approx 4{,}47.$$

(Мы взяли приближенное значение дроби с избытком, так как оно ближе к $\frac{67}{15}$.)

Извлечем корень из полученной десятичной дроби с точностью до 0,1. Получим:

$$\sqrt{4{,}47}=2{,}1 \text{ (с недостатком)}.$$

Посмотрим, будет ли дробь 2,1 действительно приближенным корнем из $\frac{67}{15}$ с точностью до 0,1. Имеем:

$$2{,}1^2=4{,}41;\quad 2{,}2^2=4{,}84.$$

Но

$$4{,}41<4{,}47<4{,}84.$$

Значит, приближенный корень найден верно.

Пример 2. Найти $\sqrt{12\frac{3}{17}}$ с точностью до 0,01.

Имеем: $12\frac{3}{17} \approx 12,1765$.

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{12,1765} = 3,48 & \\
-\,\overline{317} & |\;\;64 \\
\underline{256} & \;\;\;\;\;4 \\
-\,6165 & |\;\;688 \\
\underline{5504} & \;\;\;\;\;\;8 \\
661 &
\end{array}$$

Итак, искомые приближенные значения будут 3,48 и 3,49. Здесь лучше взять корень с избытком, так как квадрат его ближе к $12\frac{3}{17}$.

Проверка.

$$3,48^2 = 12,1104; \; 3,49^2 = 12,1801;$$

$$12,1104 < 12,1765 < 12,1801,$$

причем значение с избытком ближе к подкоренному числу.

§ 10. Другие способы нахождения квадратных корней.

В практике для ускорения вычислений при нахождении квадратных корней пользуются теми же вспомогательными средствами, как и при нахождении квадратов чисел.

1. Таблицы. В таблицах В. М. Брадиса даны квадратные корни с точностью до 0,001 чисел от 1 до 10 с промежутком в 0,01 и чисел от 10 до 100 с промежутком в 0,1. Устройство и употребление таблицы такое же, как и таблицы квадратов. Приведем несколько примеров.

1) $\sqrt{6,7}$. В первом столбце находим число 6,7 и рядом с ним во втором столбце квадратный корень из него: 2,588 (по округлении получим: 2,6).

2) $\sqrt{27,6}$. В первом столбце находим число 27; в этом же ряду в столбце под номером 6 находим: $\sqrt{27,6} \approx 5,254$ (по округлении получим: 5,25).

3) $\sqrt{56,34}$. По предыдущему находим: $\sqrt{56,3} \approx 7,503$. В столбце „поправок“ за № 4 находим число 3, которое прибавляем к 7,503. Получаем: $\sqrt{56,34} \approx 7,506$.

4) $\sqrt{427}$. Найдем $\sqrt{4,27} \approx 2,066$. Тогда $\sqrt{427} \approx 20,66$, или по округлении 20,7. Если в числе передвинуть запятую на несколько цифр, то в его квадрате (в данном случае в подкоренном числе) надо передвинуть запятую в ту же сторону на удвоенное число цифр.

5) $\sqrt{0,2868}$. Находим $\sqrt{28,68} \approx 5,355$. Тогда $\sqrt{0,2868} \approx 0,5355$.

6) $\sqrt{3,944} \approx 1,985 + 0,001 = 1,986$.

К числу 1,985 — квадратному корню из 3,94, прибавлена 0,001, взятая из столбца поправок за номером 4.

2. Графики. Если не требуется большая точность, то для нахождения квадратных корней можно воспользоваться графическим методом. Возьмем уравнение

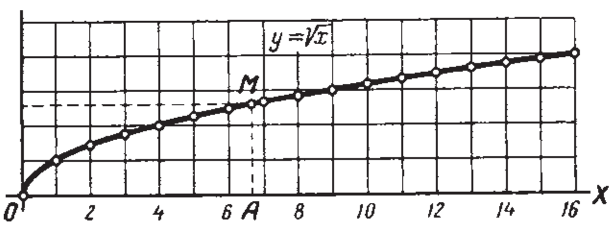
$$y=\sqrt{x} \qquad (1)$$

и построим его график. Составим таблицу для некоторых значений x, взяв приближенные корни с точностью до 0,01:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y=\sqrt{x}$	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3	3,16

Построим соответствующие точки. Давая x, промежуточные значения между уже взятыми, получим точки, расположенные между построенными. При всевозможных значениях x получится кривая, изображенная на чертеже 3.

Найдем по графику $\sqrt{6,7}$. На оси иксов находим точку A с абсциссой 6,7 и из нее проводим перпендикуляр к этой оси, который пересечет график в точке M. Ордината этой точки, равная приблизительно 2,6, и даст приближенное значение $\sqrt{6,7}$.



Черт. 3.

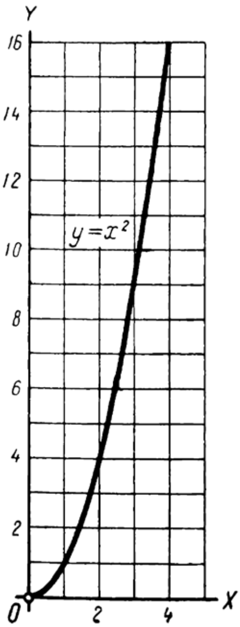
Но для нахождения квадратных корней из чисел мы можем также воспользоваться готовым уже графиком, построенным для нахождения квадратов чисел (§ 1). По этому графику для каждого значения абсциссы x мы находили соответствующую ординату $y=x^2$ точки графика с этой абсциссой. Для нахождения корня следует поступить наоборот: по данной ординате $y=x^2$ найти абсциссу точки графика с этой ординатой.

Пример. Найти $\sqrt{8,3}$. На графике (черт. 2 стр. 10), находим точку B с ординатой 8,3; опускаем из нее перпендикуляр на ось иксов и находим приближенное значение корня: $x \approx 2{,}9$ (более точно $\sqrt{8{,}3} \approx 2{,}88$).

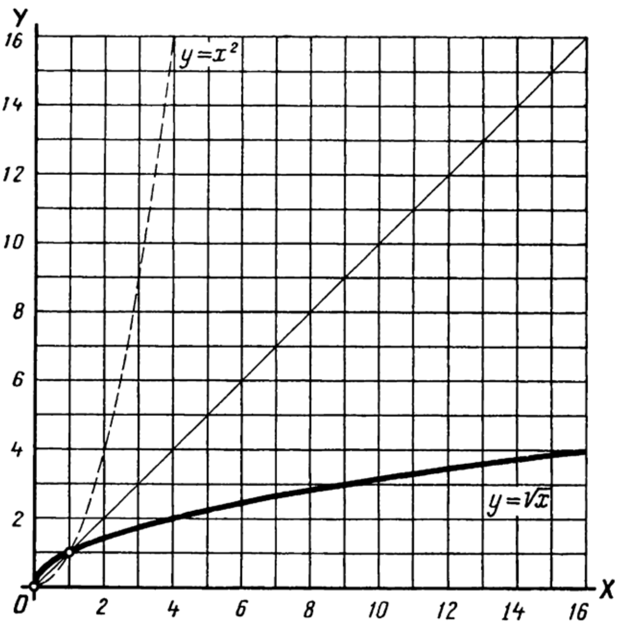
Очевидно, что для нахождения квадратных корней по графику квадратов достаточно взять только правую ветвь графика $y = x^2$ (черт. 4).

При вычислениях с помощью графиков обычно заданное число отмечается на оси иксов, а искомое число определяется соответствующей ординатой.

Чтобы и здесь поступать так, повернем наш чертеж 4 на $180°$ вокруг биссектрисы координатного угла (черт. 5). Тогда ось



Черт. 4.



Черт. 5.

ординат совпадет с прежней осью абсцисс, а ось абсцисс — с прежней осью ординат, и значения y мы уже будем искать на горизонтальной оси, а искомые значения $x = \sqrt{y}$ — на вертикальной оси.

Но так как абсциссы принято обозначать буквой x, а ординаты буквой y, то, переменив обозначения, будем иметь:

$$y = \sqrt{x},$$

то есть то самое уравнение, график которого был построен в начале этого параграфа (черт. 3). Сравнивая чертежи 3 и 5, мы ясно видим, что они полностью совпадают.

Таким образом, для получения графика уравнения $y=\sqrt{x}$ достаточно было взять правую ветвь графика уравнения $y=x^2$ и повернуть его на 180° около биссектрисы первого координатного угла.

Значит графики уравнений $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

3. Приближенные формулы. Если в тождестве

$$\left(1\pm\frac{\alpha}{2}\right)^2=1\pm\alpha+\frac{\alpha^2}{4} \qquad (1)$$

число α мало по сравнению с единицей, то, отбросив член $\frac{\alpha^2}{4}$, получим по извлечении из обеих частей квадратного корня приближенные равенства:

$$\sqrt{1\pm\alpha}\approx 1\pm\frac{\alpha}{2},$$

которые позволяют легко найти в уме приближенные корни из чисел, близких к единице.

Примеры.

По формуле:	Более точные значения:
$\sqrt{1{,}03}\approx 1{,}015;$	$\sqrt{1{,}03}\approx 1{,}01489;$
$\sqrt{1{,}04}\approx 1{,}02;$	$\sqrt{1{,}04}\approx 1{,}01980;$
$\sqrt{0{,}96}\approx 1-0{,}02=0{,}98;$	$\sqrt{0{,}96}\approx 0{,}97979;$
$\sqrt{0{,}97}\approx 1-0{,}015=0{,}985.$	$\sqrt{0{,}97}\approx 0{,}98489.$

Передвинув в подкоренном числе запятую на две цифры, а в полученном корне на одну цифру вправо (см. п. 1, пример 4), получим:

$\sqrt{105}\approx 10{,}25;$	$\sqrt{105}\approx 10{,}24695;$
$\sqrt{106}\approx 10{,}3;$	$\sqrt{106}\approx 10{,}29563;$
$\sqrt{98}\approx 10-0{,}1=9{,}9;$	$\sqrt{98}\approx 9{,}89949;$
$\sqrt{95}\approx 10-0{,}25=9{,}75.$	$\sqrt{95}\approx 9{,}74679.$

Сравнение с более точными корнями в правой колонке показывает, что при округлении их мы как раз получим числа левой колонки, которые легко найти устно.

§ 11. Решение уравнений вида $ax^2=c$

Задача. *Длина прямоугольного участка земли в 5 раз больше его ширины, а площадь равна 720 $м^2$. Определить размеры участка.*

Решение. Обозначим ширину участка через x метров. Тогда длина его будет равна $5x$ метров. Площадь равна $5x\cdot x=5x^2$ ($м^2$)

По условию

$$5x^2 = 720.$$

Получили уравнение с одним неизвестным, причем неизвестное входит в уравнение во второй степени. В этом случае уравнение называется уравнением второй степени, или, короче, квадратным.

Решим его. Разделив обе части уравнения на 5, получим равносильное уравнение:

$$x^2 = 144.$$

Перенеся 144 в левую часть и замечая, что $144 = 12^2$, запишем уравнение в таком виде:

$$x^2 - 12^2 = 0,$$

или

$$(x - 12)(x + 12) = 0.$$

Но произведение равно нулю только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей равен нулю. Значит, должно быть:

или $x - 12 = 0$ и тогда $x = 12$;

или $x + 12 = 0$ и тогда $x = -12$.

Подставив найденные значения неизвестного в уравнение $x^2 = 144$, убедимся, что оба они ему удовлетворяют. Но по условию задачи для неизвестного допустимыми являются только положительные значения. Значит, решением будет только $x = 12$.

Ответ. Ширина участка равна 12 *м*, а длина равна $12 \cdot 5 = 60$ (*м*).

Пусть вообще имеем уравнение, которое после перенесения всех членов в левую часть и приведения подобных будет иметь вид:

$$ax^2 + c = 0; \qquad (a \neq 0). \tag{1}$$

Разделив обе части уравнения на a и обозначив для краткости $\frac{c}{a}$ через m, получим:

$$x^2 + m = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим решения этого уравнения при различных значениях m.

1) Пусть $m > 0$. Так как x^2 не может быть меньше нуля, а m — число положительное по условию, то левая часть уравнения (2) — положительное число и, следовательно, не может быть равна нулю. Отсюда делаем вывод:

При $m > 0$ уравнение $x^2 + m = 0$ не имеет решений.

2) Пусть $m = 0$. Тогда уравнение (2) примет вид: $x^2 = 0$. Очевидно, что это равенство будет верным только при $x = 0$. Значит, при $m = 0$ уравнение $x^2 + m = 0$ имеет единственное решение $x = 0$.

3) Пусть $m < 0$.

Положим $m = -n$, где $n > 0$. Уравнение (2) примет вид:

$$x^2 - n = 0. \tag{3}$$

Здесь могут представиться два случая.

а) Число n является точным квадратом некоторого (целого или дробного) числа.

Тогда, обозначив через $\sqrt{n}$ арифметический корень из n, будем иметь:

$$x^2 - (\sqrt{n})^2 = 0,$$

или

$$(x - \sqrt{n})(x + \sqrt{n}) = 0.$$

Отсюда (см. задачу),

$$x_1 = \sqrt{n}; \quad x_2 = -\sqrt{n}.$$

Объединяя оба решения, можем записать: $x = \pm\sqrt{n}$. Значит, в этом случае уравнение (3), а следовательно, и (1) имеет два решения.

Примеры.

1. $9x^2 - 4 = 0$; $x^2 - \frac{4}{9} = 0$; $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$; $x = \pm\frac{2}{3}$.

2. $x^2 - 1{,}69 = 0$; $x^2 - 1{,}3^2 = 0$; $x = \pm 1{,}3$.

Чтобы сократить запись, можно, не представляя уравнение $x^2 - n = 0$ в виде разности двух квадратов, просто извлечь квадратный корень из n и взять его со знаками плюс и минус, например:

$$x^2 - 289 = 0; \quad \sqrt{289} = 17; \quad x = \pm 17.$$

б) Если число n в уравнении (3) не является точным квадратом, то x не может быть равен никакому рациональному числу и, значит, уравнение $x^2 - n = 0$ не имеет решений.

Но мы можем найти приближенное решение этого уравнения, вычислив $\sqrt{n}$ с любой степенью точности.

Пример.

$$x^2 - 5 = 0.$$

Найдем приближенное значение $\sqrt{5}$.

$$\sqrt{5} = 2{,}236068\ldots$$

Тогда можем написать: $x \approx 2{,}2$ с точностью до 0,1; $x \approx 2{,}23$ с точностью до 0,01 и т. д. Здесь приближенные значения взяты с недостатком. Увеличив на 1 последнюю цифру, получим приближенные значения x с избытком: $x \approx 2{,}3$ (до 0,1); $x \approx 2{,}24$ (до 0,01) и т. д.

§ 12. Краткие исторические сведения.

Возведение в квадрат. Практические задачи (например, вычисление площади квадратного участка) уже в глубокой древности приводили к потребности находить квадраты чисел. Очевидно, эта потребность возникала настолько часто, что так же, как и в настоящее время, составлялись специальные таблицы квадратов натуральных чисел.

Особый интерес представляет таблица квадратов чисел от 1 до 60, найденная при раскопках в Вавилонии и составленная около четырех тысяч лет назад.

Приведем выдержки из этой таблицы в современной записи.

$$6^2 = 36 \quad 8^2 = 1;\ 4 \quad 11^2 = 2;\ 1 \quad 19^2 = 6;\ 1$$

$$7^2 = 49 \quad 9^2 = 1;\ 21 \quad 12^2 = 2;\ 24 \quad 58^2 = 56;\ 4.$$

Эта запись становится понятной, если первые цифры, стоящие до точки с запятой считать единицами второго разряда, содержащими 60 единиц первого разряда.

Действительно, тогда мы имеем:

$$8^2 = 1 \cdot 60 + 4; \quad 9^2 = 1 \cdot 60 + 21; \quad 11^2 = 2 \cdot 60 + 1 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, эта таблица является одним из свидетельств об употреблении в древней Вавилонии шестидесятиричной системы счисления.

В более поздние времена эта система счисления перешла из Вавилонии в другие страны. Она применялась главным образом в астрономических вычислениях.

Извлечение корня. К извлечению квадратного корня также еще в древние времена приводили задачи практического характера (например, выделение квадратного участка земли заданной площади, решение задач, приводящих к квадратным уравнениям).

Так, в китайской математической рукописи, написанной во II в. до нашей эры по еще более древним источникам, уже имеется описание способа нахождения квадратных корней, совпадающего с тем, который был изложен в § 4.

Умели извлекать квадратные корни из чисел и индийцы еще в IV—V вв. нашей эры. Индийский математик XII в. Бхаскара отмечал, что положительное число имеет два квадратных корня — положительный и отрицательный и что нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа.

Извлечение квадратного корня (например, при решении квадратных уравнений) встречается и в сочинении знаменитого узбекского математика Аль-Хорезми.

Интересен способ, по которому древние вавилоняне находили приближенные квадратные корни еще за две тысячи лет до нашей эры. В современной алгебраической записи этот способ может быть выражен формулой

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}. \tag{1}$$

Пример 1. Найти $\sqrt{28}$. Так как $28 = 5^2 + 3$, то получим по формуле (1):

$$\sqrt{28} = \sqrt{25 + 3} = 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5{,}3.$$

Так как $5{,}3^2 = 28{,}09$, то приближенный корень получен с достаточно большой точностью.

Пример 2. $\sqrt{130}=\sqrt{11^2+9}=11+\frac{9}{22}\approx 11{,}41$.

Проверка. $11{,}41^2=130{,}1881$.

Если правую часть равенства (1) возведем в квадрат, то получим:

$$\left(a+\frac{b}{2a}\right)^2=a^2+b+\frac{b^2}{4a^2}.$$

Таким образом, квадрат найденного приближенного корня отличается от подкоренного числа на величину $\frac{b^2}{4a^2}$. Отсюда следует, что найденный по формуле 1 корень будет тем точнее, чем меньше число b по сравнению с a.

ГЛАВА II

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 13. Понятие об иррациональном числе.

1. Недостаточность множества рациональных чисел. Возьмем уравнение

$$17 + x = 12.$$

Оно не имело решений, пока мы знали только положительные числа. Но после введения отрицательных чисел оно стало разрешимым. Его корень:

$$x = -5.$$

Более того: после введения отрицательных чисел уравнение первой степени

$$ax + b = 0$$

стало разрешимым при любых рациональных a и b, $a \neq 0$ (ч. 1, § 64).

Возьмем теперь уравнение

$$x^2 - m = 0,$$

где $m > 0$. В § 11 мы видели, что оно имеет решения только в том случае, если m является точным квадратом какого-либо рационального числа. Например, уравнение

$$x^2 - 5 = 0$$

не имеет решений, так как среди рациональных чисел нет такого, квадрат которого равнялся бы пяти.

Возникает вопрос: нельзя ли еще расширить множество чисел? Нельзя ли ввести такие новые числа, при наличии которых уравнение $x^2 - m = 0$ было разрешимо при любом положительном m?

Еще более настоятельная потребность в расширении нашего числового запаса обнаруживается при измерении различных величин — длин, площадей, веса и пр.

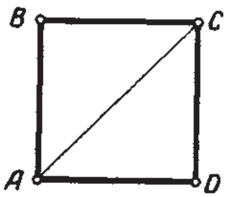
Уже в глубокой древности задача измерения величин, в которых единица измерения не укладывается целое число раз, привела к введению дробных чисел. Но в дальнейшем оказалось, что целых и дробных чисел недостаточно для измерения многих величин.

Возьмем квадрат $ABCD$, сторона которого равна единице измерения (черт. 6). Проведем в нем диагональ AC.

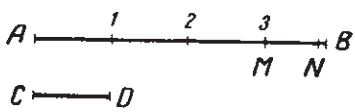
Длиной отрезка AC называется число, выражающее отношение его к отрезку, равному единице, то есть к отрезку AB. Но из геометрии известно, что сторона квадрата и его диагональ несоизмеримы, то есть их отношение не может быть выражено ни целым, ни дробным числом. Значит, длина отрезка AC не может быть выражена рациональным числом.

Примечание. Практически длину любого отрезка, в том числе и несоизмеримого с единицей, мы можем выразить рациональным числом приближенно с той степенью точности, какую допускают примененные для его измерения инструменты. Здесь же речь идет о числе, точно выражающем длину отрезка.

Таким образом, если мы поставим перед собой задачу — выразить числом длину всякого отрезка, то рациональных чисел оказывается недостаточно. Чтобы выразить числом длины отрезков, несоизмеримых с единицей, требуется ввести новые числа.



Черт. 6.



Черт. 7.

2. Измерение отрезков. Пусть дан отрезок AB (черт. 7) и единица измерения CD (на черт. 7 один сантиметр). Чтобы измерить длину отрезка AB, будем откладывать на нем отрезок CD. Допустим, он уложится на AB некоторое число раз (на черт. 7 три раза) и получится некоторый остаток MB, меньший CD. Разделим единицу измерения CD на 10 равных частей и будем на MB откладывать $\frac{1}{10}$ часть CD (на черт. 7 он отложился семь раз). Если при этом опять получился некоторый остаток NB, то будем на нем откладывать $\frac{1}{100}$ часть CD и т. д. Допустим, что мы сможем продолжать этот процесс как угодно далеко. К какому результату мы можем прийти?

Покажем, что здесь возможны три и только три различных случая.

1) В результате измерения получится целое число или конечная десятичная дробь.

Пусть в нашем примере $\frac{1}{100}$ часть CD уложилась в последнем остатке ровно два раза.

Значит, отрезок AB содержит три отрезка, равных единице измерения CD, семь десятых долей и две сотые доли этой единицы. Тогда длина отрезка AB выразится числом 3,72.

Нетрудно показать, что в этом случае отрезок AB соизмерим с единицей. Действительно, $3{,}72=\frac{372}{100}$. Значит, $\frac{1}{100}$ часть отрезка CD является общей мерой AB и CD; она укладывается в CD ровно 100 раз, а в AB ровно 372 раза. (В частности, если бы отрезок CD уложился в AB целое число k раз, то число k и выражало бы длину AB).

2) В результате измерения получится бесконечная периодическая дробь.

Пусть в нашем примере $\frac{1}{100}$ часть CD уложилась в остатке NB два раза и снова получился остаток; в этом остатке $\frac{1}{1000}$ часть CD уложилась семь раз и получился новый остаток, в котором $\frac{1}{10000}$ часть CD уложилась два раза и т. д.

Продолжая делить единицу CD на все более и более мелкие десятичные доли, будем поочередно получать числа 7 и 2 и некоторый остаток. Тогда длину отрезка AB мы можем выразить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

$$AB=3{,}727272\ldots$$

Покажем, что и в этом случае отрезок AB соизмерим с единицей измерения CD.

Действительно, в арифметике доказывается, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь может быть представлена в виде обыкновенной дроби *. В нашем случае это будет:

$$3\frac{72}{99}=3\frac{8}{11}=\frac{41}{11}.$$

(Для проверки предлагаем учащимся обратить дробь $\frac{41}{11}$ в десятичную.) А эта дробь показывает, что $\frac{1}{11}$ часть единицы CD является общей мерой AB и CD: она укладывается в CD ровно 11 раз, а в AB ровно 41 раз. Значит отрезки AB и CD соизмеримы. Рассмотренные два случая можно в общем виде сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. ***Если длина отрезка выражается в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, то отрезок соизмерим с единицей длины.***

---

* Способ обращения периодической дроби в обыкновенную будет изложен дальше, в § 88.

Доказательство. Действительно, любую конечную десятичную дробь можно записать в виде обыкновенной (в частности, если результат измерения — целое число, то его можно записать в виде дроби с знаменателем единица).

Любую бесконечную периодическую десятичную дробь тоже можно обратить в обыкновенную.

Значит, в том и другом случае мы получим некоторую дробь $\frac{m}{n}$. А это показывает, что $\frac{1}{n}$ часть единицы измерения укладывается в данном отрезке ровно m раз, а в единице ровно n раз, то есть является их общей мерой. Значит, отрезок соизмерим с единицей.

Покажем, что справедлива и обратная теорема.

Теорема 2. ***Если отрезок соизмерим с единицей измерения, то его длина выражается конечной или бесконечной периодической десятичной дробью.***

Доказательство. Пусть дано, что отрезок соизмерим с единицей измерения. Тогда отрезки имеют общую меру, которая укладывается в данном отрезке, положим, m раз, а в единичном отрезке n раз. Длина отрезка выразится числом $\frac{m}{n}$. Но из арифметики известно, что всякая обыкновенная дробь обращается или в конечную, или в бесконечную периодическую десятичную дробь. Это и доказывает теорему.

Рассмотрим теперь третий возможный случай.

3) В результате измерения получится бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Может случиться, что, измеряя получаемые остатки десятыми, сотыми, тысячными и т. д. долями единицы, мы будем каждый раз получать новый остаток и при этом не будет никакой периодичности в чередовании десятичных знаков. В этом случае получается бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Ограничиваясь двумя, тремя и т. д. десятичными знаками, мы будем получать приближенное значение длины отрезка все с большей и большей степенью точности. Естественно поэтому саму бесконечную непериодическую дробь считать точным выражением длины измеряемого отрезка.

Покажем, что в этом случае отрезок несоизмерим с единицей измерения.

Теорема 3. ***Если длина отрезка выражается бесконечной непериодической дробью, то отрезок несоизмерим с единицей измерения.***

Доказательство. Теорема легко доказывается „от противного". Всякий отрезок может быть только соизмерим или несоизмерим с единицей. Если бы данный отрезок был соизмерим с единицей, то по теореме 2 его длина выражалась бы конечной или бесконечной периодической десятичной дробью, что противоречит условию теоремы. Следовательно, отрезок несоизмерим с единицей измерения.

Покажем, что справедлива и теорема, обратная предыдущей.

Теорема 4. ***Если отрезок несоизмерим с единицей, то его длина выражается бесконечной непериодической десятичной дробью.***

Доказательство. Действительно, откладывая на данном отрезке единичный отрезок, на полученном остатке $\frac{1}{10}$ долю единичного отрезка, на новом остатке $\frac{1}{100}$ единичного отрезка, мы будем получать все новые остатки, так как в противном случае длина отрезка выражалась бы конечной десятичной дробью и отрезок по теореме 2 был бы соизмерим с единицей, что противоречит условию. По той же причине получаемая бесконечная десятичная дробь не может быть периодической. Тем самым теорема доказана.

3. Иррациональные числа. Всякое рациональное число является либо целым, либо конечной десятичной дробью, либо бесконечной периодической десятичной дробью.

Следовательно, бесконечные непериодические десятичные дроби, которые мы ввели в предыдущем пункте для измерения отрезков, несоизмеримых с единицей, не принадлежат к рациональным числам. Это числа нового вида. Их называют иррациональными числами.

Определение. **Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная дробь.**

В п. 2 было показано, что длина всякого отрезка, несоизмеримого с единицей длины, выражается бесконечной непериодической десятичной дробью, то есть иррациональным числом. Примем без доказательства следующее положение, обратное предыдущему.

Всякое иррациональное число выражает длину некоторого отрезка, несоизмеримого с единицей измерения.

§ 14. Числовая ось. Действительные числа.

В начале курса (ч. 1, § 11) была введена числовая ось, на которой рациональные числа изображались с помощью точек.

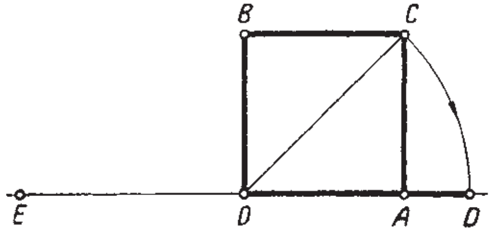
Каждому рациональному числу соответствует на числовой оси определенная точка, расстояние которой от начала отсчета равно этому рациональному числу.

Существует ли обратное соотношение между точками оси и рациональными числами, то есть каждой ли точке оси соответствует определенное рациональное число? Покажем, что ответ должен быть отрицательным.

Отметим на числовой оси в выбранном масштабе отрезок OA, равный единице (черт. 8).

Построим на этом отрезке квадрат $OBCA$. Проведем диагональ OC и отложим равный ей отрезок OD на оси.

$OD = OC$ несоизмерим с единичным отрезком OA. Значит, точке D не соответствует никакое рациональное число. Одновременно легко видеть, что мы можем точке D поставить в соответствие иррациональное число, именно число, выражающее длину отрезка OD.



Черт. 8.

Вообще всякому иррациональному числу будет соответствовать на числовой оси точка, расстояние которой от начала отсчета равно этому иррациональному числу.

Введем теперь еще отрицательные иррациональные числа.

Отложим на числовой оси влево от точки O отрезок OE, равный OD. Естественно обозначить точку E тем же числом, что и точку D, но со знаком минус.

Таким образом, каждому положительному иррациональному числу a будет соответствовать отрицательное иррациональное число $-a$, и обе соответствующие точки, как и в случае рациональных чисел, расположены на числовой оси симметрично относительно начала отсчета. Числа, выражаемые этими точками, называются противоположными.

Множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел образуют вместе множество действительных чисел.

Между множеством действительных чисел и множеством точек на числовой оси имеет место следующее соответствие.

Каждому действительному числу соответствует на числовой оси одна определенная точка и обратно: каждой точке на числовой оси соответствует одно определенное действительное число.

Такое соответствие называется взаимно-однозначным.

Действительно, каждое действительное число выражает длину некоторого отрезка: соизмеримого с единицей измерения, если это число рациональное, и несоизмеримого с единицей измерения, если это число иррациональное (§ 13, п. 2). Каждый такой отрезок мы можем отложить на числовой оси от начальной точки вправо, если данное число положительно, и влево, если данное число отрицательно. Конечная точка этого отрезка и будет соответствовать данному действительному числу. Обратно: каждой точке M на числовой оси соответствует некоторый отрезок OM, длина которого выражается рациональным числом, если он соизмерим с единицей измерения, и иррациональным, если он несоизмерим с единицей измерения (положительным, если точка M лежит вправо, и отрицательным, если точка M лежит влево от начальной точки). Это действительное число и будет соответствовать данной точке.

Для действительных чисел сохраняется то же определение абсолютной величины числа, какое было дано для рациональных чисел (ч. 1, § 13)

$$|13{,}456\ldots| = 13{,}456\ldots; |-0{,}0137\ldots| = 0{,}0137\ldots$$

§ 15. Квадратные корни как иррациональные числа.

Итак, введение иррациональных чисел полностью разрешило задачу измерения отрезков. Длина любого отрезка выражается определенным числом — рациональным, если отрезок соизмерим с единицей, иррациональным, если отрезок несоизмерим с единицей измерения.

Но введение иррациональных чисел разрешило и другую задачу, о которой говорилось в § 13 (п. 1): уравнение

$$x^2 - m = 0$$

имеет решения при любом положительном m.

Покажем это на примере уравнения

$$x^2 - 5 = 0.$$

Мы уже знаем, что квадратный корень из пяти не может быть выражен никаким рациональным числом (§ 5).

Будем находить приближенный квадратный корень из пяти все с большей и большей степенью точности. Получим дробь 2,236068 ...

Продолжая вычисления, будем получать все новые и новые десятичные знаки. Эта дробь не может быть конечной, так как тогда $\sqrt{5}$ выражался бы рациональным числом. По той же причине эта дробь не может быть бесконечной периодической дробью. Значит, в результате извлечения квадратного корня из пяти мы получаем бесконечную непериодическую десятичную дробь, то есть иррациональное число.

Можно доказать, что квадрат этого иррационального числа в точности равен пяти (доказательство не приводим, так как для этого недостаточно тех алгебраических сведений, которые были изложены в данном курсе).

Значит, полученное иррациональное число мы можем считать точным корнем из пяти и записать:

$$\sqrt{5} = 2{,}236068\ldots$$

Многоточие показывает, что в правой части стоит бесконечная десятичная дробь.

Вернемся теперь к уравнению $x^2 - 5 = 0$. Так как $\sqrt{5}$ является некоторым иррациональным числом, квадрат которого равен 5, то уравнение $x^2 - 5 = 0$ можем записать в таком виде:

$$x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0,$$

или

$$(x - \sqrt{5})\ (x + \sqrt{5}) = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = \sqrt{5}; \quad x_2 = -\sqrt{5},$$

или, объединяя оба корня в одной записи,

$$x = \pm\sqrt{5}.$$

Рассуждая совершенно так же, найдем, что, например, уравнения

$$x^2 - 2 = 0; \quad x^2 - 17 = 0; \quad x^2 - 40 = 0$$

имеют соответственно корни:

$$x = \pm\sqrt{2}; \quad x = \pm\sqrt{17}; \quad x = \pm\sqrt{40}.$$

Все эти корни являются иррациональными числами, которые можно записать приближённо в виде десятичной дроби с любым количеством десятичных знаков.

Обобщая все изложенное выше, мы можем сделать следующий вывод.

Уравнение $x^2 - m = 0$ при $m > 0$ всегда имеет два корня: $\sqrt{m}$ и $-\sqrt{m}$; один из них является положительным числом (арифметический корень), другой — отрицательным.

Если m — точный квадрат рационального числа, то $\sqrt{m}$ и $-\sqrt{m}$ будут рациональными числами. В противном случае они будут иррациональными.

§ 16. Сравнение действительных чисел.

Введя новые, иррациональные числа, мы должны установить правило сравнения этих чисел по величине как друг с другом, так и с рациональными числами.

Другими словами, установим правило сравнения для любых двух действительных чисел.

Для этого введем одно условие.

Всякое рациональное дробное число, как известно, может быть представлено в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, например:

$$\frac{37}{25} = 1{,}48; \quad \frac{5}{6} = 0{,}83333\ldots = 0{,}8(3).$$

Из арифметики знаем, что величина десятичной дроби не изменится, если к ее дробной части приписать сколько угодно нулей, например:

$$7{,}8 = 7{,}80 = 7{,}800 = 7{,}8000.$$

Условимся поэтому целое число и конечную десятичную дробь считать тоже бесконечными периодическими дробями с периодом, равным нулю, например:

$$30 = 30{,}000\,\ldots = 30,(0);$$
$$2{,}13 = 2{,}1300\,\ldots = 2{,}13(0).$$

Тогда мы можем сказать, что всякое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби: периодической, если оно рациональное, и непериодической, если оно иррациональное.

Дадим теперь правило сравнения действительных чисел по величине.

Представим оба данные числа в виде бесконечной десятичной дроби. Тогда:

1. Два действительных числа равны, если они имеют одинаковые знаки и если равны их целые части и все десятичные знаки одинакового разряда.

2. Из двух неравных положительных действительных чисел то больше, у которого больше целая часть. Если целые части равны, то больше то число, у которого больше первый из различных десятичных знаков одинакового разряда.

Примеры.

$$36{,}786 > 36{,}784; \qquad 2{,}004 < 2{,}0041;$$
$$1{,}41421\ldots > 1{,}4038; \qquad 1{,}41421\ldots < 1{,}414302;$$
$$0{,}01004 > 0{,}010038; \qquad 0{,}00305 < 0{,}003062.$$

3. Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа.

4. Всякое отрицательное число меньше нуля.

5. Из двух отрицательных чисел то больше, абсолютная величина которого меньше.

Примеры.

$-3{,}0271\ldots > -3{,}028\ldots$, так как $3{,}028\ldots > 3{,}0271\ldots$;

$-\sqrt{3} > -\sqrt{5}$, так как $\sqrt{5} > \sqrt{3}$.

Сравнивая это правило с правилом сравнения рациональных чисел (ч. I, § 12 и 13), убеждаемся, что правило, установленное для рациональных чисел, остается тем же и для любых действительных чисел.

Заметим, что и порядок расположения действительных чисел на числовой оси остается тем же, что и для рациональных чисел.

Из двух действительных чисел то больше, которое расположено правее на числовой оси.

Обратно, из двух действительных чисел то расположено правее на числовой оси, которое больше.

§ 17. Действия с действительными числами.

Введя новые иррациональные числа, мы должны теперь установить правила арифметических действий для любых действительных чисел.

Достаточно установить правила для сложения и умножения. Правила для вычитания и деления выводятся, исходя из определения этих действий, как обратных сложению и умножению.

При установлении правил сложения и умножения будем иметь в виду выполнение тех же требований, которые были поставлены после введения отрицательных чисел при установлении правил сложения и умножения для любых рациональных чисел.

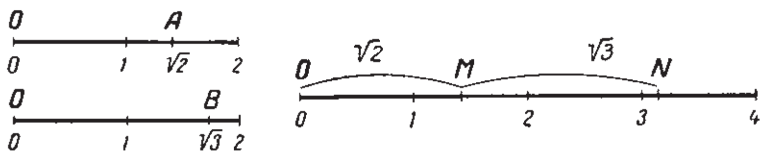
1. Чтобы задачи, которые решались сложением или умножением при данных рациональных числах, решались тем же действием и в случае любых действительных чисел.

2. Чтобы правила сложения и умножения любых рациональных чисел оставались теми же, какими они были раньше для них установлены (ч. I, § 14 и 20).

3. Чтобы для сложения и умножения действительных чисел остались справедливыми законы действий, установленные для рациональных чисел.

Каждое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби (§ 16). Поэтому, если мы установим правила действий для бесконечных десятичных дробей, то они будут общими правилами для рациональных и иррациональных чисел, то есть для любых действительных чисел.

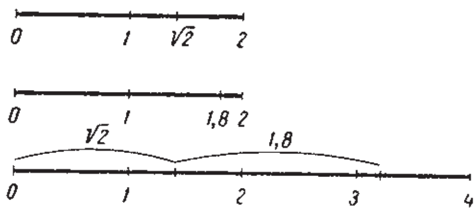
1. Сложение положительных действительных чисел. Пусть требуется сложить два иррациональных числа, например $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.



Черт. 9.

Изобразим эти числа на числовой оси. На чертеже 9 длина отрезка OA равна $\sqrt{2}$, а длина отрезка OB равна $\sqrt{3}$. Естественно за сумму $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ принять длину отрезка, являющегося суммой отрезков OA и OB. На чертеже 9 справа отложен отрезок $OM=OA=\sqrt{2}$ и к нему прибавлен отрезок $MN=OB=\sqrt{3}$. Согласно нашему определению длина отрезка ON будет равна $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Это определение суммы включает в себя и случаи, когда одно или оба слагаемые — числа рациональные. На чертеже 10 изображена сумма чисел $\sqrt{2}$ и 1,8; на чертеже 11 сумма чисел 1,2 и 2,3.



Черт. 10.

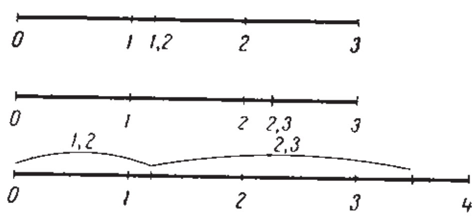
Вернемся к сумме $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; она выражает длину отрезка ON (черт. 9), следовательно, является действительным числом. Выразим его в виде бесконечной десятичной дроби.

Так как длины отрезков OM и MN выражаются бесконечными дробями

$$1{,}4142136\ldots \quad \text{и} \quad 1{,}7320508\ldots,$$

то согласно определению суммы длина отрезка выразится суммой этих дробей.

$$1{,}4142136\ldots + 1{,}7320508\ldots$$



Черт. 11.

Эту сумму мы можем выразить в виде десятичной дроби с любой степенью точности, беря с соответственной точностью слагаемые. В итоге получим бесконечную десятичную дробь

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=3{,}1462644\ldots$$

Таким же образом получим для двух других, приведенных выше примеров:

$$\sqrt{2}+1{,}8=1{,}414213\ldots+1{,}800000\ldots=3{,}214213\ldots;$$

$$1{,}2+2{,}3=1{,}2000\ldots+2{,}3000\ldots=3{,}5000\ldots=3{,}5.$$

2. Вычитание положительных действительных чисел. Так же, как и раньше, вычитание определяется как действие, обратное сложению. Разностью двух действительных чисел называется число, которое, будучи сложено с вычитаемым, даст уменьшаемое.

Так как выше мы определили сложение лишь положительных чисел, то пока будем считать, что уменьшаемое должно быть больше вычитаемого.

Примеры.

1) $\sqrt{3}-\sqrt{2}=1{,}7320508\ldots-1{,}4142136\ldots=0{,}3178372\ldots$

Проверка. $1{,}4142136\ldots+0{,}3178372\ldots=1{,}7320508\ldots$

2) $1{,}8-\sqrt{2}=1{,}800000\ldots-1{,}414213\ldots=0{,}385787.$

Проверка. $1{,}414213\ldots+0{,}385787\ldots=1{,}800000\ldots=1{,}8.$

3. Сложение и вычитание любых действительных чисел. Сложение любых действительных чисел мы можем теперь определить совершенно так же, как сложение рациональных чисел (ч. I, § 14).

1. Чтобы сложить два действительных числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и перед суммой поставить их общий знак.

2. Чтобы сложить два действительных числа с противоположными знаками и с разной абсолютной величиной, надо из большей абсолютной величины вычесть меньшую и перед разностью поставить знак числа с большей абсолютной величиной.

3. Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

4. Если одно из двух слагаемых равно нулю, то сумма равна другому слагаемому.

Для действительных чисел остаются в силе переместительный и сочетательный законы сложения.

Правило вычитания для любых действительных чисел остается то же, которое было дано в ч. I, § 17: чтобы вычесть число, достаточно прибавить к уменьшаемому число, противоположное вычитаемому.

4. Умножение. При умножении двух действительных чисел будем поступать следующим образом.

Перемножая приближенные значения сомножителей, взятые с недостатком, будем получать приближенное значение произведения с недостатком.

Перемножая приближенные значения сомножителей, взятые с избытком, будем получать приближенные значения произведения с избытком.

Можно доказать, что существует единственное число, большее всех приближенных значений произведений, взятых с недостатком, и меньшее всех приближенных значений произведений, взятых с избытком. Это число будем считать произведением данных чисел.

Пример. Найдем произведение $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

Берем приближенные значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ с недостатком и с избытком.

С недостатком	С избытком
$1\cdot 1=1;$	$2\cdot 2=4;$
$1{,}7\cdot 1{,}4=2{,}38;$	$1{,}8\cdot 1{,}5=2{,}70;$
$1{,}73\cdot 1{,}41=2{,}4393;$	$1{,}74\cdot 1{,}42=2{,}4708;$
$1{,}732\cdot 1{,}414=2{,}449048;$	$1{,}733\cdot 1{,}415=2{,}452195;$
$1{,}7320\cdot 1{,}4142=2{,}44939440;$	$1{,}7321\cdot 1{,}4143=2{,}44970903.$

Беря только десятичные знаки, одинаковые в приближенных значениях, взятых с недостатком и с избытком, получим

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=2{,}449\ldots$$

Беря сомножители все с большей точностью, будем получать дальнейшие десятичные знаки для произведения $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

Для действительных чисел остаются в силе переместительный и сочетательный законы умножения и распределительный закон умножения по отношению к сложению.

Если один или оба сомножителя отрицательные, то для них остается то же правило, которое было введено для рациональных чисел (ч. I, § 20).

Произведение двух действительных чисел равно произведению их абсолютных величин, взятому со знаком плюс, если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком минус, если оба сомножителя имеют противоположные знаки. Отсюда следует (ч. I, § 22): произведение нескольких действительных чисел положительно, если число отрицательных сомножителей четное, и отрицательно, если число отрицательных сомножителей нечетное.

5. Деление. Деление определяется как действие, обратное умножению. Частным двух действительных чисел называется число, которое, будучи умножено на делитель, дает делимое.

§ 18. Краткие исторические сведения.

В настоящей книге понятие об иррациональном числе тесно связано с понятием о несоизмеримых отрезках. Иррациональное число определялось как число, выражающее длину отрезка, несоизмеримого с единицей длины.

Исторически же дело обстояло не так. Существование отрезков, несоизмеримых с единицей, было известно уже древним грекам (Пифагор, Евклид). Но греки считали, что длина таких отрезков не может быть выражена числом, так как они знали только рациональные числа.

Широко пользовались иррациональными числами индийские математики, например Бхаскара (род. в 1114 г.). Индийцы не создали теории иррациональных чисел, но в своих вычислениях производили над иррациональными числами все арифметические действия. В частности, индийцам было известно существование иррационального квадратного корня.

В европейскую математику иррациональные числа внедрялись с большими трудностями. Так, итальянский математик Кардано (1501—1576) и голландский математик Жирар (1595—1632) в своих работах уже оперировали с иррациональными числами.

К этому побуждали как потребности практических вычислений, так и потребности самой математики. Но получаемые при решении уравнений иррациональные корни они все же не считали за числа.

Знаменитый английский ученый Ньютон (1643—1727) определил число как отношение одной величины к другой, однородной с ней, принятой за единицу.

Отсюда следует, что отношение к единице какой-либо величины (отрезка, площади), несоизмеримой с этой единицей, является тоже некоторым числом. Этим самым иррациональные числа заняли в математике место, равноправное с рациональными.

К такому же результату приводит и изображение чисел точками на числовой оси, введенное Декартом. Каждая точка оси изображает или рациональное, или иррациональное число (§ 14).

Однако полная и логически строгая теория иррациональных чисел была создана лишь в XIX в.

ГЛАВА III.

ВОЗВЕДЕНИЕ В ЦЕЛУЮ СТЕПЕНЬ.

§ 19. Степень с натуральным показателем.

1. Определение. **Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n сомножителей, равных a.**

$$a^n = \underbrace{aa \ \ldots \ a}_{n \text{ раз}}.$$

Согласно определению a может быть любым действительным числом, а n — натуральным числом, бóльшим единицы. В целях обобщения вводится первая степень числа, равная самому числу:

$$a^1 = a.$$

2. Свойства степеней положительных чисел. Рассмотрим некоторые свойства степеней действительных положительных чисел.

Теорема 1. ***Для любых положительных чисел a и b справедливы следующие соотношения:***

1) ***Если $a > b$, то $a^n > b^n$.***
2) ***Если $a = b$, то $a^n = b^n$.***
3) ***Если $a < b$, то $a^n < b^n$.***

Справедливость этих соотношений достаточно очевидна. Но мы дадим доказательство их.

1) Дано: $a > b > 0$.

Докажем, что тогда

$$a^n > b^n. \tag{1}$$

Для доказательства применим такой прием: предположим, что неравенство справедливо для некоторого показателя $n = k$, и докажем, что в таком случае оно будет справедливо и для показателя $k + 1$.

Действительно, по предположению

$$a^k > b^k.$$

Умножив обе части на a, получим верное неравенство (ч. 1, § 69):

$$a^{k+1} > ab^k.$$

Заменив в правой части этого неравенства множитель a меньшим числом b, мы уменьшим произведение ab^k и, следовательно, неравенство останется верным. Но тогда будем иметь:

$$a^{k+1} > b^{k+1}.$$

Итак, мы доказали, что если неравенство $a^k > b^k$ верно для какого-либо показателя k, то оно будет верно и для показателя, большего на единицу.

Но по условию неравенство верно для $k = 1$, $a^1 > b^1$. Значит, по доказанному оно справедливо и для $k = 2$. Но раз оно справедливо для $k = 2$, по той же причине оно справедливо и для $k = 3$, а раз справедливо для $k = 3$, то справедливо и для $k = 4$ и т. д. Отсюда заключаем, что неравенство (1) справедливо для любого натурального n.

Такое доказательство, которое здесь было приведено, носит особое название: доказательство методом **математической индукции**.

Доказательство методом математической индукции основывается на следующем, принятом в математике принципе.

Принцип математической индукции. Если относительно какого-либо положения доказано: 1) что оно справедливо для $k = 1$ и 2) что оно будет справедливо для любого натурального числа $k + 1$, если справедливо для числа k, то положение справедливо для любого натурального числа. Этот способ доказательства часто применяется в высшей математике.

2) Дано: $a = b > 0$. Доказать, что $a^n = b^n$. Это положение очевидно. Если напишем n равенств

$$a = b$$
$$a = b$$
$$a = b$$
$$\dots$$

и перемножим левые и правые части, то получим:

$$a^n = b^n. \qquad (2)$$

3) Дано: $0 < a < b$. Надо доказать, что в этом случае

$$a^n < b^n. \qquad (3)$$

Это неравенство является тем же неравенством (1), только написанным в обратном порядке.

Предлагается учащимся провести доказательство п. 3, независимо от неравенства (1), методом математической индукции по образцу доказательства, приведенного выше для $a > b$.

Теорема 2 (обратная 1). ***Для любых положительных чисел a и b справедливы следующие соотношения:***

1) ***Если $a^n > b^n$, то $a > b$.*** (4)
2) ***Если $a^n = b^n$, то $a = b$.*** (5)
3) ***Если $a^n < b^n$, то $a < b$.*** (6)

Все эти три соотношения легко доказываются методом „от противного".

Докажем, например, соотношение (4).

Допустим, что a не больше b. Тогда должно быть или $a = b$, или $a < b$. Но если $a = b$, то по теореме 1 должно быть $a^n = b^n$; если же $a < b$, то по той же теореме 1 должно быть $a^n < b^n$. В обоих случаях мы приходим к противоречию с условием, что $a^n > b^n$. Значит, остается единственная возможность, что $a > b$.

Совершенно таким же способом доказываются соотношения (5) и (6).

3. Степень отрицательного числа. При умножении действительных чисел остается в силе правило знаков, установленное для рациональных чисел (§ 17).

Применяя это правило к степени отрицательного числа (то есть к произведению одинаковых сомножителей), можно его выразить так: четная степень отрицательного числа положительна, нечетная отрицательна.

Примеры. $(-2)^2 = 4$; $(-2)^3 = -8$; $(-2)^4 = 16$; $(-2)^5 = -32$;

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}; \quad \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}.$$

В теоремах 1 и 2 говорится только о положительных числах, так как для положительных чисел приведенные в теоремах соотношения всегда верны (что и доказывают теоремы), а для отрицательных чисел не всегда, например:

$$2 > -5, \text{ но } 2^2 < (-5)^2; \quad -2 < 2, \text{ но } (-2)^2 = 2^2;$$
$$-4 < -3, \text{ но } (-4)^2 > (-3)^2.$$

4. Нахождение кубов чисел. Нахождение степеней числа простым умножением связано с громоздкими вычислениями.

В дальнейшей части этого курса (глава X) будет показан очень простой способ нахождения приближенных степеней с помощью таблиц логарифмов.

Кроме квадратов, практически наиболее часто приходится находить третьи степени, или, короче, кубы чисел (например, при вычислении объемов). Поэтому для их вычисления пользуются теми же вспомогательными средствами, что и для вычисления квадратов.

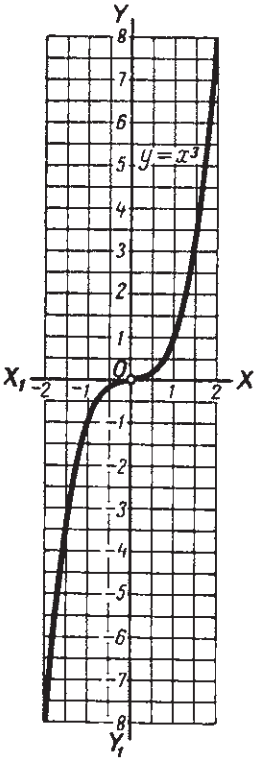
Таблицы. Составляются специальные таблицы кубов чисел. Такая таблица имеется и в пособии В. М. Брадиса „Четырехзначные математические таблицы". Способ пользования таблицей такой же, как и таблицей квадратов.

П р и м е ч а н и е. Для кубов приближенных чисел остается то же правило, что и для квадратов: в результате оставляется столько значащих цифр, сколько их было в данном числе.

П р и м е р ы.

$$4{,}4^3 = 85{,}184 \approx 85; \quad 125^3 = 1\,953\,125 \approx 1\,950\,000.$$

Г р а ф и к. Можно построить график уравнения $y = x^3$ (черт. 12). Кубы чисел находятся по графику так же, как и квадраты: находят абсциссу, равную данному числу, соответствующая ордината точки графика даст приближенное значение куба данного числа.



Черт. 12.

П р и б л и ж е н н ы е ф о р м у л ы. Если в тождестве

$$(1 \pm \alpha)^3 = 1 \pm 3\alpha + 3\alpha^2 \pm \alpha^3$$

число α мало по сравнению с единицей, то, отбросив члены с α^2 и α^3, получим приближенные формулы:

$$(1 \pm \alpha)^3 \approx 1 \pm 3\alpha.$$

По этим формулам легко найти приближенные кубы чисел, близких к единице, например:

$1{,}02^3 \approx 1 + 3 \cdot 0{,}02 = 1{,}06$ точный куб: $1{,}061208$;
$1{,}03^3 \approx 1 + 3 \cdot 0{,}03 = 1{,}09$ „ „ $1{,}092727$;
$0{,}98^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}94$ „ „ $0{,}941192$;
$0{,}97^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}03 = 0{,}91$ „ „ $0{,}912673$.

§ 20. Возведение в степень произведения, дроби и степени.

Выведем правила возведения в степень алгебраических выражений. Напомним, что теперь буквам, входящим в алгебраическое выражение, мы можем давать любые допустимые действительные числовые значения, как рациональные, так и иррациональные.

1. Возведение в степень произведения. Вычислим $(2 \cdot 3)^3$ двумя способами.

$$(2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

$$(2 \cdot 3)^3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$$

Значит,

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3.$$

В первом случае мы нашли произведение $2 \cdot 3 = 6$ и возвели его в куб. Получили 216.

Во втором случае мы возвели в куб отдельно каждый сомножитель (2 и 3) и результаты перемножили, получили опять 216.

Если вместо чисел 2 и 3 возьмем любые другие числа, то рассуждения останутся теми же и опять получатся равные результаты.

Отсюда получаем теорему.

Теорема 1. ***Чтобы возвести в степень произведение, можно возвести в эту степень каждый сомножитель и результаты перемножить.***

Доказательство. По определению возведения в степень имеем:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ раз}}. \tag{1}$$

На основании правила умножения одночленов будем иметь:

$$\underbrace{(ab) \cdot (ab) \ldots (ab)}_{n \text{ раз}} = a^n b^n. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Доказательство остается тем же, а следовательно, и теорема будет верной, если вместо двух возьмем три, четыре и т. д. сомножителя.

Пример. Вычислить 30^3.

Вместо того чтобы находить произведение $30 \cdot 30 \cdot 30$, вычислим 30^3 так:

$$30^3 = (3 \cdot 10)^3 = 3^3 \cdot 10^3 = 27\,000.$$

Но иногда бывает выгодно сначала найти произведение оснований и затем возвести его в данную степень.

Пример. Вычислить $2^4 \cdot 5^4$.

$$2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625 = 10\,000.$$

Проще вычисления произвести так:

$$2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10\,000.$$

2. Возведение степени в степень. Вычислим $(a^2)^3$.

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6.$$

Но тот же результат мы получим, если показатель 2 умножим на 3. Значит:

$$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6.$$

Теорема 2. ***Чтобы возвести степень в другую степень, надо основание взять в степени, равной произведению показателей.***

Доказательство. По определению имеем:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}}.$$

По правилу умножения одночленов

$$a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}.$$

Итак,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

3. Возведение в степень дроби.

Теорема 3. ***Чтобы возвести в степень дробь, можно возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель и первый результат разделить на второй.***

Доказательство.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa\ldots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{bb\ldots b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Пример. $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}.$

§ 21. Степень с нулевым показателем.

Правила умножения и деления степеней одного и того же основания выражаются формулами:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \tag{1}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \tag{2}$$

Но между этими формулами есть существенная разница. Первая формула справедлива для любых натуральных показателей m и n.

Вторая же справедлива только при условии, что $m > n$ (конечно, оба показателя числа натуральные).

Такое ограничение создает большие неудобства при алгебраических преобразованиях: каждый раз при делении степеней с буквенными показателями надо учитывать, что все дальнейшие преобразования будут верны лишь в том случае, если показатель делимого был больше показателя делителя.

Возникает вопрос: нельзя ли устранить это неудобство? Это будет достигнуто в том случае, если расширить определение степени так, чтобы формулу (2) можно было применить при любых натуральных значениях m и n.

Рассмотрим сначала случай, когда $m = n$.

Пусть требуется разделить 2^3 на 2^3.

Показатели делимого и делителя здесь равны, и потому применить формулу (2) мы не можем. Но так как $2^3 = 8$, то мы получим:

$$2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1. \tag{3}$$

Отсюда сразу видно, что если условно обозначить единицу через 2^0, то можно было бы к этому случаю деления применить формулу (2). Действительно:

$$2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0, \tag{4}$$

а так как символом 2^0 мы обозначили единицу, то результат деления в (3) и в (4) получился один и тот же.

Возьмем другой пример:

$$5^2 : 5^2 = 25 : 25 = 1.$$

Значит, если мы хотим и в этом случае применить формулу (2), то должны будем положить: $1 = 5^0$. Тогда получим: $5^2 : 5^2 = 5^{2-2} = 5^0$.

К такому же выводу мы придем, если вместо 2, или 5 возьмем любое другое число (кроме нуля: в этом случае делитель в формуле (2) был бы равен нулю, а мы знаем, что на нуль делить нельзя).

Возьмем поэтому произвольное число a ($a \neq 0$) в произвольной натуральной степени m. Будем иметь:

$$a^m : a^m = 1.$$

Значит, для того чтобы можно было всегда применить формулу (2), мы должны положить, что при любом значении a выражение a^0 будем считать равным единице. Введем следующее определение.

Определение. **Всякое неравное нулю число в нулевой степени равно единице.**

Или короче: если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Значит, мы можем записать:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0. \tag{5}$$

Покажем, что для нулевого показателя остаются верными все правила действий со степенями, которые были выведены для натуральных показателей.

1. Умножение.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Пусть $m = 0$. Тогда, применяя правило, получим:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n.$$

Проверка.

$$a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n.$$

Предлагаем учащимся таким же способом проверить, что

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m; \quad a^0 \cdot a^0 = a^{0+0} = a^0.$$

2. Деление.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Пусть $n = 0$. Тогда по правилу: $a^m : a^0 = a^{m-0} = a^m$.

Проверка.

$$a^m : a^0 = a^m : 1 = a^m.$$

Предлагаем таким же способом проверить равенство:

$$a^0 : a^0 = a^0.$$

(Случай $m = 0$, а $n \neq 0$ не рассматриваем, так как в этом случае показатель делимого будет уже меньше показателя делителя.)

3. Возведение в степень.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Пусть $m = 0$. Тогда по правилу:

$$(a^0)^n = a^{0 \cdot n} = a^0.$$

Проверка.

$$(a^0)^n = 1^n = 1 = a^0.$$

Пусть $n = 0$. Тогда по правилу:

$$(a^m)^0 = a^{m \cdot 0} = a^0.$$

Справедливость этого равенства следует из самого определения: всякое число (кроме нуля) в нулевой степени равно 1.

Предлагаем проверить справедливость равенства:

$$(a^0)^0 = a^{0 \cdot 0} = a^0.$$

Итак, все три правила остаются верными и для нулевых показателей.

Отсюда следует, что все преобразования алгебраических выражений, содержащих буквы в нулевой степени, выполняются по тем же правилам, как и преобразования выражений, содержащих только натуральные показатели. (Только при делении степеней одного и того же основания мы пока предполагаем, что показатель делимого не меньше показателя делителя.)

§ 22. Степень с отрицательным показателем.

Чтобы распространить правило деления степеней одного и того же основания

$$a^m : a^n = a^{m-n} \tag{1}$$

на любые натуральные m и n, нам осталось рассмотреть случай, когда $m < n$.

Пусть требуется разделить 3^2 на 3^5. Формулу (1) применить нельзя, так как показатель делимого меньше показателя делителя.

Но так как $3^2 = 9$ и $3^5 = 243$, то получим:

$$3^2 : 3^5 = 9 : 243 = \frac{9}{243} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}. \tag{2}$$

Отсюда видим, что если мы условно обозначим дробь $\frac{1}{3^3}$ через 3^{-3}, то можно было бы и к этому случаю применить формулу (1). Действительно:

$$3^2 : 3^5 = 3^{2-5} = 3^{-3}, \tag{3}$$

а так как по условию $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$, то результат деления во (2) и (3) получился один и тот же.

Разделим теперь 2 на 2^6. Будем иметь:

$$2 : 2^6 = 2 : 64 = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}. \tag{4}$$

Опять видим, что если положить $\frac{1}{2^5} = 2^{-5}$, то и к этому случаю можно применить формулу (1).

$$2 : 2^6 = 2^1 : 2^6 = 2^{1-6} = 2^{-5},$$

а так как по условию $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$, то, значит, результат получился тот же, что и в (4).

Рассмотрим общий случай. Разделим a^m на a^{m+n}, где m и n — любые натуральные числа и a не равно нулю (по той же причине, что и в § 21). Будем иметь:

$$a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^n}.$$

По сокращении на a^m получим:

$$a^m : a^{m+n} = \frac{1}{a^n}.$$

И здесь видим, что если положить $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, то будет применима формула (1). Действительно:

$$a^m : a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n},$$

что по условию равно $\frac{1}{a^n}$.

Введем поэтому следующее определение:

Определение. ***Если*** $a \neq 0$, ***то*** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Значит, мы можем сказать, что всякое неравное нулю число с отрицательным показателем равно дроби, у которой числитель единица, а знаменатель — то же число с показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя.

§ 23. График степени с отрицательным показателем.

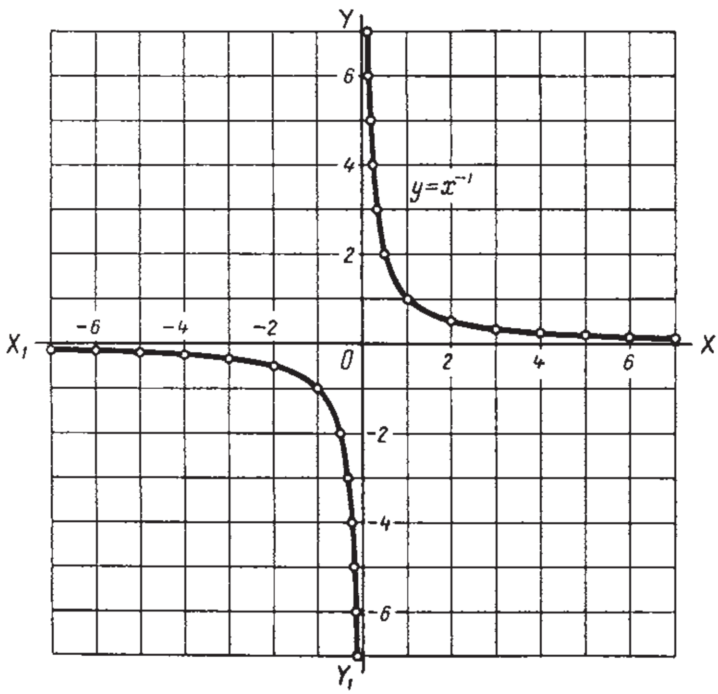
Построим несколько графиков степеней с отрицательным показателем.

1. $y = x^{-1}$.

Составим таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
x^{-1}	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Построим полученные точки. Если учесть, что x может принимать любые действительные значения, кроме $x = 0$, то при все-



Черт. 13.

возможных изменениях x получим график, изображенный на чертеже 13. Это график обратных чисел. По этому графику для каждого числа a можно определить (приближенно) обратное ему число $\frac{1}{a}$.

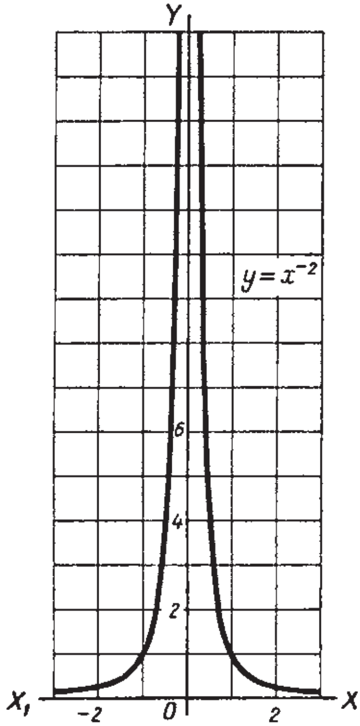
Например, для числа 3,4 по графику найдем обратное ему число 0,3.

Действительно, $3{,}4 \cdot 0{,}3 = 1{,}02 \approx 1$.

Примечание. Сравнить этот график с графиком обратно пропорциональной зависимости (ч. I, § 76).

2. $y = x^{-2}$.

Таким же путем, составив соответствующую таблицу, можно построить график уравнения $y = x^{-2}$ (черт. 14).



Черт. 14.

§ 24. Действия над степенями с отрицательными показателями.

Покажем на примерах, что все правила действий над степенями, выведенные ранее, остаются верными и для отрицательных показателей.

1. Умножение.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Пусть $m = -2$, $n = 5$. Применив правило, получим:

$$a^{-2} \cdot a^5 = a^{-2+5} = a^3.$$

Проверка.

$$a^{-2} \cdot a^5 = \frac{1}{a^2} \cdot a^5 = \frac{a^5}{a^2} = a^3.$$

Предлагается учащимся таким же способом проверить справедливость равенств:

$$a^2 \cdot a^{-5} = a^{2+(-5)} = a^{-3}; \quad a^{-2} \cdot a^{-5} = a^{-2+(-5)} = a^{-7}.$$

2. Деление.

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Пусть $m = -2$, $n = -3$. Тогда по правилу:

$$a^{-2} : a^{-3} = a^{-2-(-3)} = a^{-2+3} = a.$$

Проверка.

$$a^{-2} : a^{-3} = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3} = \frac{a^3}{a^2} = a.$$

Проверить таким же способом равенства:

$$a^{-2} : a^3 = a^{-2-3} = a^{-5}; \quad a^2 \cdot a^{-3} = a^{2+3} = a^5.$$

3. Возведение в степень.

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Пусть $m = -3$, $n = 2$. Тогда по правилу

$$(a^{-3})^2 = a^{(-3)\cdot 2} = a^{-6}.$$

Проверка.

$$(a^{-3})^2 = \left(\frac{1}{a^3}\right)^2 = \frac{1}{a^6} = a^{-6}.$$

Проверить таким же способом равенства:

$$(a^3)^{-2} = a^{-6}; \quad (a^{-3})^{-2} = a^6.$$

Приведенные примеры показывают, что все основные правила действий со степенями, выведенные для натуральных показателей, остаются верными и для отрицательных показателей.

Учитывая изложенное в предыдущем параграфе, мы можем сказать, что эти правила верны для любого целого показателя.

Но отсюда следует, что все правила тождественных преобразований алгебраических выражений, которые были изложены в главах III и IV первой части курса, можно применять и в том случае, если некоторые из букв, входящих в выражение, имеют отрицательные (и нулевые) показатели.

Примеры.

1. $2a^2b^{-3}c^5d^{-1} \cdot 3a^0b^2c^{-3}d^{-2} = 6a^2b^{-1}c^2d^{-3}$.

Согласно правилу мы везде сложили показатели при одинаковых буквах.

2. $12x^2y^{-2}z^{-5} : 4x^{-3}y^2z^{-2} = 3x^5y^{-4}z^{-3}$.

Здесь произведено вычитание соответствующих показателей.

Предлагаем проверить правильность ответов путем замены букв с отрицательными показателями соответствующими дробями.

Проверка покажет, что преобразования были выполнены правильно.

Сделаем одно важное замечание. Возьмем выражение $3a^2b^{-3}$. Является ли оно одночленом? Конечно нет. Ведь определение одночлена относилось только к целым алгебраическим выражениям, а выражение $3a^2b^{-3}$ является дробью $\frac{3a^2}{b^3}$, только записанной в другой форме. И в арифметике дробь $\frac{3}{10}$, записанная без знаменателя (0,3), не стала целым числом, а осталась дробью.

Точно так же дробь $\frac{1}{8}$ останется дробью, если мы ее запишем так: 2^{-3}

Но запись с помощью отрицательных показателей тем и удобна, что при такой записи действия с дробями можно производить по тем же правилам, что и действия с целыми выражениями.

§ 25. Краткие исторические сведения.

Нулевой и отрицательный показатели впервые встречаются в сочинении французского математика XV в. Н. Шюке, написанном в 1484 г. Так, выражение $7x^{3m}$ у Шюке означало: $7x^{-3}$ (значок m означал „минус", так же как значок p означал „плюс").

Но до XVII в. отрицательные показатели не находили себе достаточного применения. Лишь в начале XVII в., когда были введены логарифмы, применение отрицательных показателей стало совершенно необходимым и прочно вошло в математику.

ГЛАВА IV.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ.

§ 26. Корень натуральной степени из чисел.

Определение 1. **Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a.**

Примеры.

$$\sqrt[4]{81}=3, \text{ так как } 3^4=81;$$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}, \text{ так как } \left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243};$$

$$\sqrt[7]{128}=2, \text{ так как } 2^7=128.$$

Определение 2. **Действие, которым находится корень любой степени из данного числа, называется извлечением корня.**

Из определения 1 следует, что если

$$\sqrt[n]{a}=b, \tag{1}$$

то

$$b^n=a. \tag{2}$$

Подставив в равенство (2) вместо b его выражение из равенства (1), получим:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

Это равенство показывает, что извлечение корня является действием, обратным возведению в степень.

Замечание. На основании определения корня мы всегда можем проверить правильность равенства (1), возведя правую часть в n-ю степень. Если получится подкоренное выражение, стоящее в левой части, значит равенство верно.

Рассмотрим подробнее равенство (1) при различных значениях a.

1) Пусть $a > 0$.

Если a является точной n-й степенью какого-либо рационального числа b, то, согласно определению 1, можем написать:

$$\sqrt[n]{a} = b.$$

Пусть теперь a не является точной n-й степенью какого-либо рационального числа. Что тогда мы будем понимать под выражением $\sqrt[n]{a}$? Рассмотрим этот случай на примере.

Введем сначала понятие о приближенном значении корня или, короче, просто о приближенном корне n-й степени. Определение дадим такое же, какое было дано для приближенного квадратного корня.

Определение 3. **Приближенными корнями n-й степени из данного числа с точностью до единицы называются два последовательных натуральных числа, из которых n-я степень одного меньше, а n-я степень другого больше данного числа.**

Первое число называется приближенным корнем n-й степени с недостатком, а второе — с избытком.

Примеры.

1. $2^4 < 40 < 3^4$. Значит, $\sqrt[4]{40} \approx 2$ с точностью до 1 с недостатком и $\sqrt[4]{40} \approx 3$ с точностью до 1 с избытком.

2. $3^5 = 243 < 700 < 4^5 = 1024$. Значит, $\sqrt[5]{700} \approx 3$ (с недостатком) и $\sqrt[5]{700} \approx 4$ (с избытком).

Аналогично определяются приближенные корни n-й степени с точностью до 0,1; 0,01 и т. д.

Примеры.

$\sqrt[3]{100} \approx 4{,}6$ (с нед.) $\sqrt[3]{100} \approx 4{,}7$ (с изб.) с точностью до 0,1.

$\sqrt[3]{5} \approx 1{,}70$ (с нед.) $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$ (с изб.) с точностью до 0,01.

Положим теперь в равенстве $\sqrt[n]{a} = b$ $a = 50$ и $n = 4$.

Так как

$$2^4 < 50 < 3^4,$$

то 50 не является точной четвертой степенью целого числа. Можно доказать, что 50 не является точной четвертой степенью и рациональной дроби (доказательство то же самое, которое было дано в § 5 относительно квадратов).

Будем находить приближенные корни четвертой степени из 50 с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т. д.

Получим:

Точность	Значение $\sqrt[4]{50}$ с недостатком	Значение $\sqrt[4]{50}$ с избытком
до 1	2	3
до 0,1	2,6	2,7
до 0,01	2,65	2,66
до 0,001	2,659	2,660

и т. д.

Может ли этот процесс когда-либо закончиться? Конечно, нет, так как тогда получили бы конечную десятичную дробь, и, значит, 50 являлось бы точной четвертой степенью рационального числа, чего, как мы знаем, быть не может.

Итак, в результате вычисления приближенных корней 4-й степени из 50 мы получаем бесконечную дробь. Дробь эта не может быть периодической, так как и в этом случае число 50 было бы точной четвертой степенью некоторой рациональной дроби.

Находя приближенное значение выражения $\sqrt[4]{50}$ все с бо́льшим и бо́льшим числом десятичных знаков, мы получим бесконечную непериодическую десятичную дробь, то есть иррациональное число.

Можно доказать, что четвертая степень этого иррационального числа будет в точности равна 50. Этого доказательства мы здесь не приводим.

Все рассуждения, которые были здесь приведены для $\sqrt[4]{50}$, могут быть полностью повторены для корня любой натуральной степени из любого положительного числа a (если только a не является точной n-й степенью какого-либо рационального числа b). Поэтому мы примем здесь без доказательства следующее общее положение:

Для любого положительного числа a существует единственное положительное число b, n-я степень которого равна a.

Согласно определению 1 это число мы можем обозначить как $\sqrt[n]{a}$. Знак корня $\sqrt{\ }$ называется также радикалом (от латинского слова radix — корень). Часто называют радикалом все выражение $a\sqrt[n]{b}$.

Значит, приведенное положение утверждает:

1. Что всякое положительное число a имеет положительный корень n-й степени (n — натуральное число).

2. Что этот положительный корень единственный.

Остановимся еще на одном вопросе. Найдем $\sqrt[4]{16}$. Он равен 2, так как $2^4=16$. Но и $(-2)^4=16$. Значит, $\sqrt[4]{16}$ равен и -2.

Точно так же $\sqrt[4]{50}=2{,}659\ldots$, но также $\sqrt[4]{50}=-2{,}659\ldots$.

Значит, корень четвертой степени из положительного числа имеет два значения — положительное и отрицательное.

То же можно сказать и относительно корня любой четной степени. Пусть

$$\sqrt[2n]{a}=b. \text{ Тогда } b^{2n}=a.$$

Но в таком случае и $(-b)^{2n}=[(-b)^2]^n=b^{2n}=a$.

Значит, корень четной степени из положительного числа имеет два значения — положительное и отрицательное.

Так же, как и в случае квадратных корней, положительное значение корня назовем арифметическим корнем и в дальнейшем, говоря о корне четной степени из положительного числа, всегда будем иметь в виду только арифметический корень.

Так как корень нечетной степени из положительного числа может быть только положительным числом, то приведенное выше положение может быть коротко сформулировано так:

Всякое положительное число имеет единственный арифметический корень любой натуральной степени.

Рассмотрим теперь $\sqrt[n]{a}$ при других значениях a.

2) Пусть $a=0$.

Тогда $\sqrt[n]{a}=0$, так как только $0^n=0$.

3) Пусть $a<0$.

Здесь следует различать два случая: когда n — четное и когда n — нечетное число.

Пусть n — четное число: $n=2k$ (k — натуральное число).

Допустим, что $\sqrt[2k]{a}=b$.
Тогда

$$b^{2k}=a<0. \qquad (2)$$

Но всякое действительное число b, возведенное в четную степень, даст число положительное и, следовательно, равенство (2) невозможно.

Значит, корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Пусть n — нечетное число: $n=2k+1$ и $\sqrt[2k+1]{a}=b$.
Тогда

$$b^{2k+1}=a<0.$$

Очевидно, b может быть только отрицательным числом (так как положительное число в любой натуральной степени даст положительное число).

Значит, корень нечетной степени из отрицательного числа есть число отрицательное.

Примеры.

$$\sqrt[5]{-32}=-2, \quad \text{так как} \quad (-2)^5=-32;$$

$$\sqrt[7]{-2187}=-3, \quad \text{так как} \quad (-3)^7=-2187.$$

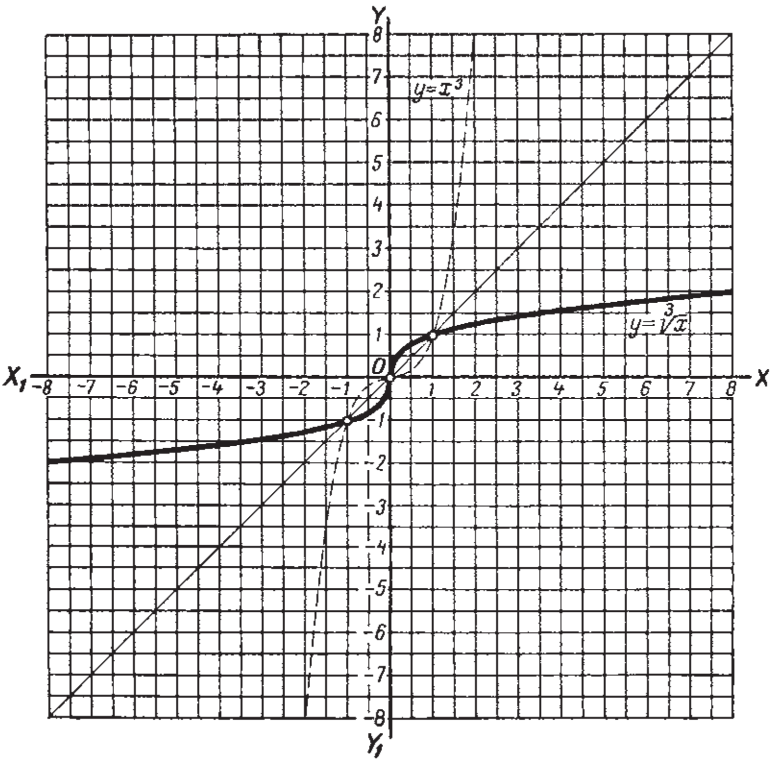
Мы можем извлечение корня нечетной степени из отрицательного числа свести к извлечению арифметического корня из положительного числа.

Так в предыдущих примерах:

$$\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-2;$$

$$\sqrt[7]{-2187}=-\sqrt[7]{2187}=-3.$$

Примечание. Мы нашли, что если число a не является точной n-й степенью какого-либо рационального числа, то $\sqrt[n]{a}$ — число иррациональное.



Черт. 15.

Но никоим образом нельзя сделать обратного заключения, что если какое-либо число иррациональное, то оно является корнем какой-либо степени из рационального числа. Если взять всевозможные корни любой степени из всех рациональных чисел, то полученные иррациональные числа составляют только ничтожную часть всего множества иррациональных чисел. Так, например, число π (отношение длины окружности к диаметру, $\pi = 3{,}1415925...$) — иррациональное число, но оно не является корнем какой-либо степени из рационального числа. Иррациональных чисел, не являющихся корнями, неизмеримо больше, чем корней.

Кубичные корни. В практике, кроме квадратных корней, наиболее часто приходится встречаться с корнями третьей степени или, короче, кубичными. Поэтому для нахождения кубичных корней существуют те же вспомогательные средства, что и для нахождения квадратных корней.

1. Таблицы. В математических таблицах обычно даются кубичные корни из чисел с точностью до четырех значащих цифр.

2. График. Припомним, как из графика квадратов был получен график квадратных корней (§ 10). Таким же способом из графика кубов можно получить график кубичных корней.

Возьмем чертеж 12, стр. 58 и повернем его вокруг биссектрисы координатного угла на 180°. Тогда ось y-ов совпадет с осью x-в и наоборот. График примет вид, как на чертеже 15. Здесь каждому значению абсциссы y будет соответствовать значение ординаты $x = \sqrt[3]{y}$. Обозначая, как принято, абсциссу через x, а ординату через y, будем иметь график уравнения

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

§ 27. Корень из произведения, дроби и степени.

В § 20 были выведены правила возведения в степень произведения, дроби и степени. Покажем, что такие же правила применяются и при извлечении корня.

Заметим, что если подкоренное выражение содержит буквенные множители, то мы всегда будем предполагать их неотрицательными. Если же буква входит множителем в знаменатель, то она не может принимать и нулевое значение.

1. Корень из произведения. Вычислим $\sqrt[3]{8 \cdot 216}$,

$$\sqrt[3]{8 \cdot 216} = \sqrt[3]{1728} = 12.$$

С другой стороны,

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{216} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Значит,

$$\sqrt[3]{8 \cdot 216} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{216}.$$

Еще пример.

$$\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 36} = \sqrt{8100} = 90, \quad \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90.$$

Значит,

$$\sqrt{9 \cdot 25 \cdot 36} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{36}.$$

В обоих примерах мы получили одинаковый результат и тогда, когда извлекали корень из произведения, стоящего под корнем, и тогда, когда извлекали корень из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножали.

Во многих случаях вторым способом найти результат легче, так как приходится извлекать корень из меньших чисел.

Покажем, что этот второй способ мы можем применить при извлечении корня из любого произведения.

Теорема 1. ***Чтобы извлечь корень из произведения, можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножить.***

Докажем теорему для трех сомножителей, то есть докажем справедливость равенства:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}. \tag{1}$$

Для доказательства возведем правую часть этого равенства в n-ю степень. По правилу возведения в степень произведения (§ 20) будем иметь

$$\left(\sqrt[n]{a}\;\;\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{c}\right)^n=abc.$$

Получили подкоренное выражение, стоящее в левой части.

Значит, равенство (1) верно (см. замечание в § 26).

Мы доказали теорему для трех сомножителей.

Но рассуждения останутся теми же, если под корнем будет 4, 5, ... сомножителей. Значит, теорема верна для любого числа сомножителей.

Пример.

$$\sqrt[3]{8\cdot 27\;\;125\cdot 216}=2\cdot 3\cdot 5\cdot 6=180.$$

Результат легко найден устно.

2. Корень из дроби. Вычислим $\sqrt{\frac{121}{144}}$.

$$\sqrt{\frac{121}{144}}=\frac{11}{12}.$$

Проверка.

$$\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{11^2}{12^2}=\frac{121}{144}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}}=\frac{11}{12}$$

Значит,

$$\sqrt{\frac{121}{144}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{144}}.$$

Точно так же

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{3}{5}.$$

Действительно

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125}.$$

Докажем теорему:

Теорема 2. ***Чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь корень отдельно из числителя и знаменателя и первый результат разделить на второй.***

Требуется доказать справедливость равенства:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

Возведем правую часть в n-ю степень. Будем иметь (§ 20)

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}=\frac{a}{b}.$$

Получили подкоренное выражение, стоящее в левой части. Значит, равенство (2) верно.

3. Корень из степени. Вычислим $\sqrt[3]{2^6}$.

$$\sqrt[3]{2^6}=\sqrt[3]{64}=4.$$

Но $4=2^2=2^{\frac{6}{3}}$

Значит,

$$\sqrt[3]{2^6}=2^{\frac{6}{3}}=2^2.$$

Точно так же

$$\sqrt{3^4}=\sqrt{81}=9=3^2=3^{\frac{4}{2}}$$

В обоих примерах мы в результате получали основание подкоренного выражения в степени, равной частному от деления показателя степени на показатель корня.

Докажем это положение в общем виде.

Теорема 3. ***Если m делится на n, то*** $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Положим $m=kn$, где m, n и k — натуральные числа.

Требуется доказать, что

$$\sqrt[n]{a^{kn}}=a^k. \qquad (3)$$

Возведем a^k в n-ю степень (§ 20).

$$(a^k)^n = a^{kn}.$$

Получили подкоренное выражение, стоящее в левой части. Значит, равенство (3) верно.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{7^6}$.

На вычисление 7^6 пришлось бы потратить значительное время и труд. Теорема 3 позволяет найти результат устно

$$\sqrt[3]{7^6} = 7^2 = 49.$$

§ 28. Простейшие преобразования радикалов.

1. Выведение множителей за знак корня. Пусть дано выражение $\sqrt{162}$. Мы можем этот радикал представить в более простом виде, применив к нему теорему об извлечении корня из произведения (§ 27).

$$\sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{2} = 9\sqrt{2}.$$

Точно так же

$$\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{3} = 4\sqrt[3]{3}.$$

$$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = a\sqrt{a}.$$

$$\sqrt[3]{81a^5b^7} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3 \cdot a^3a^2b^6b} = 3ab^2\sqrt[3]{3a^2b}.$$

Такое преобразование называется *выведением множителя за знак корня*.

В результате применения этого преобразования данное выражение упрощается и часто сокращаются требуемые вычисления. В этом можно убедиться на следующих примерах.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,01 выражение:

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108}.$$

Вычислив каждый из корней с точностью до 0,01 получим:

$$\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108} \approx 6{,}93 + 5{,}20 - 10{,}39 = 1{,}74.$$

Нам пришлось извлечь квадратный корень из трех чисел, и притом мы не можем быть уверены, что результат действительно даст величину выражения $\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{108}$ с точностью до 0,01 (для уверенности в этом нужно было бы вычислить корни с точностью большей, чем заданная).

Попробуем упростить данное выражение, выведя за знак радикала те множители, которые возможно.

Получим:

$$\sqrt{48}+\sqrt{27}-\sqrt{108}=\sqrt{16\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}-\sqrt{36\cdot 3}=$$
$$=4\sqrt{3}+3\sqrt{3}-6\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

Итак, после преобразования нам придется извлечь квадратный корень только из одного числа.

Вычислив его с точностью до 0,01, найдем:

$$\sqrt{48}+\sqrt{27}-\sqrt{108}=\sqrt{3}\approx 1{,}73\,.$$

Теперь видно, что в первом вычислении мы сделали ошибку на одну сотую, т. е. получили результат не с заданной точностью.

Пример 2. Вычислить выражение $\sqrt[3]{16x^4}$ при $x=4$. Подставив в данное выражение $x=4$, получим:

$$\sqrt[3]{16x^4}=\sqrt[3]{16\cdot 4^4}=\sqrt[3]{16\quad 256}=\sqrt[3]{4096}.$$

Нам придется извлечь корень из четырехзначного числа.

Мы значительно упростим вычисления, если предварительно выведем за знак радикала те множители, которые возможно. Будем иметь

$$\sqrt[3]{16x^4}=\sqrt[3]{8\cdot 2\quad x^3\cdot x}=2x\sqrt[3]{2x}.$$

Подставив теперь $x=4$, легко находим:

$$2x\sqrt[3]{2x}=2\cdot 4\sqrt[3]{8}=2\cdot 4\cdot 2=16.$$

Во всех предыдущих примерах подкоренное выражение мы разлагали на множители, выделяя такие, показатель которых делится на показатель корня, и извлекая из них корень. В дальнейшем надо приобрести навык сразу выводить нужные множители за знак корня, не прибегая к предварительному разложению на множители подкоренного выражения.

Пример 3.

$$\sqrt[3]{5a^4b^8c^{13}}=ab^2c^4\sqrt[3]{5ab^2c}.$$

Как видно из примера, для выведения множителей из-под знака корня достаточно показатель каждого множителя разделить на показатель корня и записать перед знаком корня этот множитель с показателем, равным полученному частному, а под знаком корня тот же множитель с показателем, равным полученному остатку. В предыдущем примере

$$4:3=1 \text{ (ост. 1)};\quad 8:3=2 \text{ (ост. 2)};\quad 13:3=4 \text{ (ост. 1)}.$$

Примечание. Если показатели множителей подкоренного выражения считать числителями, а показатель корня знаменателем, то операции, производимые с этими показателями, сводятся к исключению целого числа из неправильной дроби.

В предыдущем примере $\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$; $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$; $\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$.

Еще пример.

$$\sqrt[4]{x^9y^7z^{12}}.$$

Так как $\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$; $\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$; $\frac{12}{4}=3$, то пишем:

$$\sqrt[4]{x^9y^7z^{12}}=x^2yz^3\sqrt[4]{xy^3}.$$

2. Подведение множителей под знак корня. Иногда бывает полезно, наоборот, подвести под знак корня множители, стоящие перед ним.

Пусть, например, требуется вычислить с точностью до 0,001 выражение $20\sqrt{7}$. Вычислив $\sqrt{7}$ с точностью до 0,001 и умножив результат на 20, получим:

$$20\sqrt{7}\approx 20\cdot 2{,}646=52{,}92.$$

Заранее можем сказать, что результат не соответствует заданной точности, так как, умножив приближенное число 2,646 на 20, мы увеличили в 20 раз и ошибку. Чтобы получить большую точность, возьмем $\sqrt{7}$ с точностью до 0,0001. Получим:

$$20\sqrt{7}\approx 20\cdot 2{,}6457=52{,}914.$$

Но мы не можем и теперь быть уверены, что достигли требуемой точности.

Произведем вычисление другим способом. Представим данное выражение в таком виде:

$$20\sqrt{7}=\sqrt{20^2}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{20^2\cdot 7}=\sqrt{400\cdot 7}=\sqrt{2800}. \qquad (1)$$

Вычислив $\sqrt{2800}$ с точностью до 0,001, получим:

$$20\sqrt{7}=\sqrt{2800}\approx 52{,}915.$$

Такова действительная величина данного выражения, вычисленная с точностью до 0,001.

Преобразование, показанное равенством (1), называется *подведением множителя под радикал* (или под знак корня).

Приведенный пример показывает целесообразность в некоторых случаях такого преобразования.

Чтобы подвести под знак корня стоящие перед ним множители, достаточно возвысить такие множители в степень, равную показателю корня, и подкоренное выражение умножить на полученный результат.

Примеры.

1. $3\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 3^3}=\sqrt[3]{54}$;
2. $a^3\sqrt{5a}=\sqrt{5a\cdot a^6}=\sqrt{5a^7}$;
3. $2x^2y^3\sqrt[3]{3xy^2}=\sqrt[3]{24x^7y^{11}}$.

В двух первых примерах сначала множитель, стоящий перед знаком корня, был подведен под знак корня, затем произведено умножение.

В третьем примере обе эти операции были выполнены сразу. Так и надлежит поступать в дальнейшем.

Примечание. Можно заметить, что если считать показатели множителей числителями, а показатель корня знаменателем, то подведение множителей под радикал сводится к обращению смешанного числа в неправильную дробь.

Так, в третьем примере имеем:

$$\text{Для } x\text{:}\ 2\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3+1}{3}=\frac{7}{3}\text{; для } y\text{:}\ 3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}.$$

3. Приведение подкоренного выражения к целому виду. Если подкоренное выражение дробное, то часто бывает целесообразно привести его к целому виду, или, как говорят, *освободить подкоренное выражение от знаменателя*.

Покажем на примерах, как это делается.

Пример 1.

$$a^2\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Чтобы из знаменателя можно было извлечь корень, умножим числитель и знаменатель подкоренного выражения на a. Получим:

$$a^2\sqrt{\frac{b}{a}}=a^2\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=a^2\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2}}=\frac{a^2\sqrt{ab}}{a}=a\sqrt{ab}.$$

Пример 2.

$$6x^3y\sqrt[3]{\frac{5a^2}{4x^5y}}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $2xy^2$, извлечем кубичный корень из знаменателя. По сокращении получим:

$$6x^3y\sqrt[3]{\frac{5a^2}{4x^5y}}=3x\sqrt[3]{10a^2xy^2}.$$

Пример 3.

$$2(x-5)\sqrt{\frac{7a}{x-5}}.$$

Умножив под корнем числитель и знаменатель на $x-5$, получим:

$$2(x-5)\sqrt{\frac{7a(x-5)}{(x-5)^2}}.$$

Дальнейшее преобразование зависит от значения x. Напомним, что мы условились брать всегда арифметический корень. Поэтому будем рассматривать два случая: когда $x>5$ и когда $x<5$

($x=5$ не может быть, так как тогда подкоренное выражение теряет смысл).

1) При $x>5$ будем иметь $\sqrt{(x-5)^2}=x-5$ и получим:

$$2(x-5)\sqrt{\frac{7a}{x-5}}=2\sqrt{7a(x-5)}.$$

2) При $x<5$ будем иметь $\sqrt{(x-5)^2}=5-x$ и тогда:

$$2(x-5)\sqrt{\frac{7a}{x-5}}=\frac{2(x-5)}{5-x}\sqrt{7a(x-5)}=-2\sqrt{7a(x-5)}.$$

Значит, чтобы привести подкоренное выражение к целому виду, надо его числитель и знаменатель умножить на такое выражение, чтобы показатели всех сомножителей в знаменателе делились на показатель корня. После этого извлечь корень из знаменателя.

§ 29. Основное свойство корня.

Пусть требуется вычислить $\sqrt[6]{125}$.

Мы можем найти искомый корень с любой степенью точности, вычислив последовательно целую часть корня, затем десятые доли, сотые и т. д.

Так, замечая, что $2^6=64<125$, а $3^6=729>125$, заключаем, что искомый корень больше двух, но меньше трех.

Далее, возводя в шестую степень числа 2,1; 2,2; 2,3; ..., найдем, что $2{,}2^6<125$, а $2{,}3^6>125$. Значит, искомый корень больше 2,2, но меньше 2,3.

Продолжая таким же способом, найдем сотые, тысячные и т. д. доли искомого корня. Но сразу видно, что такие вычисления потребуют очень много времени и труда.

Найдем искомый корень другим способом. Обозначая его через x и замечая, что $125=5^3$, можем записать:

$$\sqrt[6]{5^3}=x.$$

Отсюда по определению корня имеем:

$$x^6=5^3.$$

Извлечем из обеих частей кубичный корень. Получим (§ 27, теорема 3):

$$x^2=5.$$

Отсюда

$$x=\sqrt{5}.$$

Итак, оказалось, что

$$\sqrt[6]{5^3}=\sqrt{5}.$$

Но $\sqrt{5}$ легко вычислить с любой степенью точности, или найти по таблице.

Заметим, что $\sqrt{5}$ мы могли получить, разделив в выражении $\sqrt[6]{5^3}$ на 3 показатель корня и показатель степени подкоренного числа.

Предлагаем учащимся, повторив предыдущие рассуждения, доказать, что

$$\sqrt[4]{36}=\sqrt{6}.$$

В этом примере, заменяя вычисление $\sqrt[4]{36}$ вычислением $\sqrt{6}$, мы фактически делили показатель корня и показатель степени подкоренного числа на их общий делитель 2.

Ниже будет приведен пример, когда окажется целесообразнее наоборот — умножить показатель корня и показатель степени подкоренного выражения на одно и то же число.

Докажем, что оба эти преобразования являются тождественными, то есть не изменяют числовой величины данного выражения при любых (допустимых) значениях букв.

Теорема 1. ***Значение корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить на одно и то же число.***

Согласно теореме требуется доказать справедливость равенства

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}.$$

Обозначим

$$\sqrt[n]{a^m}=x. \tag{1}$$

Отсюда по определению корня:

$$x^n=a^m.$$

Возведем обе части в степень k, получим:

$$x^{nk}=a^{mk}.$$

Отсюда по определению корня:

$$x=\sqrt[nk]{a^{mk}}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}. \tag{3}$$

Примеры.

$$\sqrt[10]{32}=\sqrt[10]{2^5}=\sqrt{2}=1,4142\ldots;$$

$$\sqrt[12]{729}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt{3}=1,7320\ldots$$

Из этой теоремы выведем следствия.

Следствие 1. ***Значение корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения разделить на одно и то же число.***

Это положение вытекает из равенства (3), если переписать его в обратном порядке:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Этим тождеством мы и пользовались, когда находили $\sqrt[6]{125}$ и $\sqrt[4]{36}$.

Следствие 2. ***Если показатели степени всех множителей подкоренного выражения и показатель корня имеют общий делитель, то на него можно разделить все показатели.***

Это положение вытекает из следствия 1.

Пример.

$$\sqrt[6]{\frac{27a^3b^9}{8c^{12}}}=\sqrt[6]{\frac{3^3a^3b^9}{2^3c^{12}}}=\sqrt{\frac{3ab^3}{2c^4}}=\frac{b}{c^2}\sqrt{\frac{3ab}{2}}=\frac{b}{2c^2}\sqrt{6ab}\,.$$

Проверить при $a=2$, $b=1$, $c=3$.

Следствие 3. ***Радикалы с различными показателями корня можно преобразовать в радикалы с одинаковыми показателями корня.***

Пусть имеем $\sqrt[m]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$. Умножив показатель корня и показатель степени подкоренного выражения в первом примере на n, а во втором на m, получим:

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n};\ \ \sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{b^m}.$$

Пример. Определить, которое из чисел больше: $\sqrt[4]{2}$ или $\sqrt[6]{3}$.

Вместо того чтобы вычислять каждый из этих корней, приведем их к одному показателю корня, умножив показатели первого выражения на 3, а второго на 2. Получим:

$$\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{8};\ \ \sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{3^2}=\sqrt[12]{9}.$$

Теперь сразу видно, что $\sqrt[6]{3}>\sqrt[4]{2}$.

§ 30. Приведение радикалов к простейшей форме.

Пусть требуется найти числовую величину выражения

$$\frac{6ab^3}{5c}\sqrt{\frac{25c^3}{3a^2b^5}}. \tag{1}$$

При $a=11$, $b=6$ и $c=8$.

Если сразу подставим эти значения в заданное выражение, вычисления будут довольно громоздкими и отнимут значительное время.

Можно упростить и сократить вычисления, если выполнить в выражении (1) те преобразования, о которых говорилось в § 28.

1) Освободим подкоренное выражение от знаменателя. Для этого умножим числитель и знаменатель на $3b$ и извлечем из знаменателя квадратный корень. Получим

$$\frac{6ab^3}{5c\cdot 3ab^3}\sqrt{25c^3\cdot 3b}=\frac{2}{5c}\sqrt{25c^3\cdot 3b}.$$

2) Выведем за знак корня те множители в подкоренном выражении, из которых извлекается квадратный корень.

$$\frac{2\cdot 5c}{5c}\sqrt{3bc}=2\sqrt{3bc}. \tag{2}$$

Выражение (2) тождественно выражению (1), но найти его числовую величину гораздо легче. Получим

$$2\sqrt{3\cdot 6\cdot 8}=2\sqrt{3^2\cdot 4^2}=2\cdot 3\cdot 4=24.$$

Как видим, после упрощения числовая величина легко найдется устно.

В предыдущем параграфе был приведен другой пример упрощения вычислений. Вычисление $\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}$ было сведено к вычислению $\sqrt{5}$ после сокращения на 3 показателей корня и подкоренного выражения.

Выполнение приведенных выше преобразований называется **приведением радикала к простейшей форме.**

Значит, чтобы привести радикал к простейшей форме, следует:

1. Разделить показатели всех сомножителей в подкоренном выражении и показатель корня на их общий делитель.
2. Привести подкоренное выражение к целому виду.
3. Вывести из-под радикала все множители, какие возможно.

Примеры.

1. $\sqrt[6]{8a^{15}b^3c^9}$.

Так как $8 = 2^3$, то разделив показатель корня и показатели в подкоренном выражении на 3, получим:

$$\sqrt{2a^5bc^3}.$$

Выведя множители a^4 и c^2 за знак корня, получим окончательно:

$$a^2c\sqrt{2abc}.$$

2. $a^2\sqrt[4]{\dfrac{(x+y)^6 z^2}{a^3}}$.

Умножив числитель и знаменатель на a, выведем выражение, стоящее в знаменателе, за знак корня; после сокращения получим:

$$a\sqrt[4]{(x+y)^6 z^2 a}.$$

Выведем за знак корня множитель $(x+y)^6$:

$$a(x+y)\sqrt[4]{(x+y)^2 z^2 a}.$$

Обе операции можно было выполнить сразу.

§ 31. Подобные радикалы.

Определение. **Радикалы называются подобными, если они одинаковой степени и имеют одинаковые подкоренные выражения.**

Примеры подобных радикалов.

$$1)\ 2\sqrt{5} \text{ и } 3\sqrt{5};\ 2)\ a\sqrt[3]{b} \text{ и } 5c\sqrt[3]{b};\ 3)\ \sqrt[3]{a^2b^3c} \text{ и } 3m\sqrt[3]{a^2b^3c}.$$

Значит, подобные радикалы могут отличаться друг от друга лишь множителями, стоящими перед знаком корня.

Иногда радикалы, кажущиеся с первого взгляда не подобными, оказываются подобными после приведения их к простейшему виду.

Пример 1.

$$\sqrt[3]{ax^2y^6};\quad \sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}};\quad \sqrt[3]{\frac{a}{x}}.$$

Упростим эти радикалы:

$$\sqrt[3]{ax^2y^6} = y^2\sqrt[3]{ax^2};$$

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt[3]{ax^2};$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{x}} = \frac{1}{x}\sqrt[3]{ax^2}.$$

Все три радикала оказались подобными.

Пример 2.

$$\sqrt{8ab^3}; \quad \sqrt[4]{4a^6b^2};$$

$$\sqrt{8ab^3} = 2b\sqrt{2ab};$$

$$\sqrt[4]{4a^6b^2} = \sqrt{2a^3b} = a\sqrt{2ab}.$$

Радикалы оказались подобными.

Если алгебраическое выражение представляет собой алгебраическую сумму радикалов, среди которых есть подобные, то все подобные радикалы можно заменить одним.

Пример.

$$5\sqrt{3} + 2\sqrt[3]{6} - 2\sqrt{3} - 3\sqrt[3]{11} - \sqrt{3} = 2\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{11} +$$
$$+ (5 - 2 - 1)\sqrt{3} = 2\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{11} + 2\sqrt{3}.$$

Замена алгебраической суммы подобных радикалов одним радикалом, тождественным этой сумме, называется **приведением подобных радикалов**. Такое название объясняется тем, что это преобразование очень сходно с приведением подобных членов многочлена.

В § 28 (п. 1, пример 1) было выполнено приведение подобных радикалов, что привело к большому упрощению вычислений.

§ 32. Сложение и вычитание радикалов.

Покажем на примерах, что все правила сложения и вычитания, выведенные ранее для многочленов, остаются справедливыми и для выражений, содержащих радикалы.

Пример 1.

$$(7\sqrt{3} - 2\sqrt{5}) + (2\sqrt{7} - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{5}).$$

Выражение $2\sqrt{7} - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{5}$ является алгебраической суммой трех чисел: $2\sqrt{7}$, $-4\sqrt{3}$ и $8\sqrt{5}$. Но, как было уже сказано в § 17, для действительных чисел остаются в силе все законы и свойства арифметических действий, установленные для рациональных чисел. Следовательно, здесь мы можем применить правило прибавления суммы. Получим:

$$7\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{7} - 4\sqrt{3} + 8\sqrt{5}.$$

Это выражение можно упростить, так как в нем есть подобные радикалы. Приведя их, получим:

$$3\sqrt{3} + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{7}.$$

Предлагается проверить результат, вычислив с точностью до 0,1 оба слагаемых и полученную сумму.

Пример 2.

$$(\sqrt[3]{2a^2}-\sqrt{3a})+\left(6\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}-\sqrt[3]{3a}+9\sqrt{\frac{a}{3}}\right).$$

Приведем к простейшему виду радикалы во вторых скобах:

$$6\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}=\frac{6}{2}\sqrt[3]{2a^2}=3\sqrt[3]{2a^2};\qquad 9\sqrt{\frac{a}{3}}=\frac{9}{3}\sqrt{3a}=3\sqrt{3a}.$$

Выполнив сложение, получим:

$$\sqrt[3]{2a^2}-\sqrt{3a}+3\sqrt[3]{2a^2}-\sqrt[3]{3a}+3\sqrt{3a},$$

или по приведении подобных радикалов:

$$4\sqrt[3]{2a^2}+2\sqrt{3a}-\sqrt[3]{3a}.$$

Пример 3.

$$(3\sqrt[3]{15}-\sqrt{11})-(\sqrt[3]{15}+\sqrt{6}-3\sqrt{11}).$$

По правилу вычитания алгебраической суммы будем иметь:

$$3\sqrt[3]{15}-\sqrt{11}-\sqrt[3]{15}-\sqrt{6}+3\sqrt{11}.$$

После приведения подобных радикалов:

$$2\sqrt[3]{15}+2\sqrt{11}-\sqrt{6}.$$

Проверить, вычислив уменьшаемое, вычитаемое и полученную разность с точностью до 0,1.

Пример 4.

$$\left(4\sqrt[3]{\frac{a^5b}{4}}-2b\sqrt{3a}\right)-\left(a\sqrt[3]{2a^2b}-15\sqrt{\frac{ab^2}{3}}\right).$$

Приведя радикалы к простейшему виду и произведя вычитание, получим:

$$2a\sqrt[3]{2a^2b}-2b\sqrt{3a}-a\sqrt[3]{2a^2b}+5b\sqrt{3a},$$

или, по приведении подобных радикалов:

$$a\sqrt[3]{2a^2b}+3b\sqrt{3a}.$$

§ 33. Умножение и деление радикалов.

1. Умножение. В § 27 было выведено правило извлечения корня из произведения:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}. \qquad (1)$$

Переменив местами левую и правую части, получим:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}. \qquad (2)$$

Это равенство выражает правило умножения корней одинаковой степени.

Чтобы перемножить корни одинаковой степени, достаточно перемножить подкоренные выражения, оставив тот же показатель корня.

Примеры.

1. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{60}=2\sqrt{15}$.

2. $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{75}=\sqrt[3]{12\cdot 30\cdot 75}=\sqrt[3]{2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 3\cdot 5^2}=$
$=2\cdot 3\cdot 5=30$.

3. $(\sqrt{2a}-\sqrt{3b})\cdot\sqrt{2a}=2a-\sqrt{6ab}$.

В последнем примере было применено правило умножения алгебраической суммы.

2. Деление. В § 27 было выведено правило извлечения корня из дроби.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (3)$$

Переменив местами левую и правую части, получим:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \qquad (4)$$

Это равенство выражает правило деления корней одинаковой степени.

Чтобы разделить корни одинаковой степени, достаточно разделить подкоренные выражения, оставив тот же показатель корня.

Примеры.

1. $\sqrt{10}:\sqrt{6}=\sqrt{\frac{10}{6}}=\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{15}$.

2. $\sqrt[4]{12a^3b}\ \ \sqrt[4]{3ab}=\sqrt[4]{4a^2}=\sqrt{2a}$.

3. $\sqrt[3]{\frac{a^4b}{c^2}}:\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}=\sqrt[3]{\frac{a^4ba^2}{c^2bc}}=\sqrt[3]{\frac{a^6}{c^3}}=\frac{a^2}{c}$.

Чтобы выполнить умножение или деление радикалов с различными показателями корня, можно предварительно привести их к одинаковому показателю и затем выполнить действие, как указано выше.

Примеры.

1. $\sqrt{8}:\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{8^3}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^9}:\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^7}=2\sqrt[6]{2}.$

2. $\sqrt[4]{3a^3b}\cdot\sqrt[6]{2a^2b^5}=\sqrt[12]{27a^9b^3}\cdot\sqrt[12]{4a^4b^{10}}=\sqrt[12]{108a^{13}b^{13}}=ab\sqrt[12]{108ab}.$

Но в § 36 будет показан более простой способ умножения и деления радикалов с различными показателями корня.

§ 34. Возведение радикала в степень и извлечение корня из радикала.

1. Возведение в степень. Пусть требуется возвести радикал $\sqrt[n]{a}$ в m-ю степень (m — натуральное число):

$$(\sqrt[n]{a})^m=\underbrace{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\ldots\sqrt[n]{a}}_{m\text{ раз}}=\sqrt[n]{\underbrace{aa\ \ldots\ a}_{m\text{ раз}}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Итак,

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

Чтобы возвести радикал в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив показатель корня без изменения.

Примеры.

1. $(\sqrt[3]{2})^2=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}.$

2. $(\sqrt[3]{4a^2b})^4=\sqrt[3]{2^8a^8b^4}=4a^2b\sqrt[3]{4a^2b}.$

2. Извлечение корня. Пусть требуется из радикала $\sqrt[n]{a}$ извлечь корень степени m. Обозначив искомый результат через x, будем иметь:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=x. \qquad (1)$$

Отсюда по определению корня:

$$x^m=\sqrt[n]{a}.$$

Отсюда опять по определению корня будем иметь:

$$(x^m)^n=x^{mn}=a.$$

Следовательно,

$$x=\sqrt[mn]{a}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Чтобы извлечь корень из радикала, достаточно перемножить показатели корня, оставив подкоренное выражение без изменения.

Пример.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2bc}}=\sqrt[12]{a^2bc}.$$

§ 35. Степень с дробным показателем.

В предыдущих параграфах уже неоднократно отмечалось, что преобразования радикалов часто напоминали преобразование дроби, числителем которой является показатель подкоренного выражения, а знаменателем показатель корня. И это не случайно.

Вспомним, что действия с целыми степенями (положительными, отрицательными и равными нулю) сводились к действиям с их показателями, то есть к действиям с целыми числами.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1); \qquad a^m : a^n = a^{m-n} \quad (2); \qquad (a^m)^n = a^{mn} \quad (3).$$

Умножение целых степеней сводится к сложению показателей, деление к вычитанию, возведение в степень к умножению показателей.

Оказывается, что, подобно этому, умножение, деление и возведение в степень радикалов может быть сведено к сложению и вычитанию дробей, если ввести обозначение радикалов в виде степеней с дробными показателями. Сделаем это.

Мы уже знаем (§ 27), что если m делится на n, то

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}. \qquad (4)$$

Примеры.

$$\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}; \qquad \sqrt[5]{a^{10}b^{15}}=a^{\frac{10}{5}}b^{\frac{15}{5}}.$$

Распространим теперь равенство (4) и на тот случай, когда m не делится на n.

Тогда показатель $\frac{m}{n}$ будет уже дробным числом, например:

$$\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}; \qquad \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}.$$

Значит, мы вводим следующее определение:

Определение. **Степень с дробным показателем $\frac{m}{n}$ равна корню степени n из основания, взятого в степени m.**

Это определение и выражается равенством (4). Подробнее можно было бы сказать: число в дробной степени равно корню степени, равной знаменателю дробного показателя, из основания, взятого в степени, равной числителю дробного показателя. (Понятно, что n не может быть равно нулю.)

Таким образом, выражение $a^{\frac{5}{7}}$ есть только другая форма записи выражения $\sqrt[7]{a^5}$. Понятно поэтому, что выражение $a^{\frac{5}{7}}$ является по-прежнему иррациональным (точно так же, как и выражение a^{-5} является дробным — другой формой записи выражения $\frac{1}{a^5}$).

Дробный показатель может быть и отрицательным, например:

$$a^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

Посмотрим, как будут выглядеть при пользовании дробными показателями некоторые преобразования, которые производились над радикалами.

1) Выведение множителей из-под радикала.

$$\sqrt{a^3} = a\sqrt{a}; \qquad a^{\frac{3}{2}} = a^{1\frac{1}{2}} = a \cdot a^{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt[3]{a^{11}} = a^3\sqrt[3]{a^2}; \qquad a^{\frac{11}{3}} = a^{3\frac{2}{3}} = a^3 \cdot a^{\frac{2}{3}}.$$

Как видим, при записи радикалов в виде степеней с дробным показателем выведение множителей из-под радикала свелось к исключению целого числа из неправильной дроби в показателе степени.

2) Деление показателей корня и подкоренного числа на их общий делитель.

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}; \qquad a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt[8]{a^2b^4} = \sqrt[4]{ab^2}; \qquad a^{\frac{2}{8}}b^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}.$$

При употреблении дробных показателей операция свелась к сокращению дробей.

3) Приведение радикалов к одному показателю. Возьмем выражения $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{ab}$, $\sqrt[6]{b^5}$. Имеем:

$$\sqrt{a} = \sqrt[6]{a^3}; \quad \sqrt[3]{ab} = \sqrt[6]{(ab)^2}; \quad \sqrt[6]{b^5}.$$

Введя дробные показатели, будем иметь:

$$a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{6}}; \quad (ab)^{\frac{1}{3}} = (ab)^{\frac{2}{6}}; \quad b^{\frac{5}{6}}.$$

Как видим, дело свелось к приведению дробей к одному знаменателю.

Но введение дробных показателей только тогда будет целесообразным и полезным, если все правила действий со степенями, установленные для целых показателей, останутся такими же и для дробных показателей.

Эти правила выражаются равенствами (1), (2) и (3).

Докажем, что эти равенства остаются справедливыми и в том случае, если один или оба показателя окажутся дробными (будем предполагать оба показателя дробными, так как любой целый показатель a можно записать в виде дроби: $\frac{a}{1}=\frac{2a}{2}=\frac{3a}{3}$).

Так же, как и раньше, будем предполагать все множители, входящие в подкоренное выражение, неотрицательными, а множители, входящие в знаменатель, только положительными.

Теорема 1. ***Для любых дробных показателей справедливо равенство***

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}. \tag{1}$$

Доказательство. По определению дробного показателя будем иметь:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p}.$$

Приведем радикалы к одному показателю корня.

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

По правилу умножения радикалов с одинаковыми показателями корня будем иметь:

$$\sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Наконец, по определению дробного показателя:

$$\sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Окончательно получим:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Примеры.

1. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{5}{4}}.$

2. $a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{12}}.$

3. $5^{-\frac{7}{6}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{7}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{-7+4-3}{6}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$

Теорема 2. ***Для любых дробных показателей справедливо равенство***

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}. \qquad (2)$$

Так же, как и в предыдущей теореме, проведем доказательство, основываясь на определении дробного показателя и на правилах действий со степенями с целыми показателями, не записывая отдельных равенств.

Доказательство.

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} =$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq} - \frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}.$$

Итак, $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$

Примеры.

1. $a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}}$.

2. $x^{\frac{3}{4}} : x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = x^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{4}}$.

3. $9^{-\frac{3}{2}} : 9^{-\frac{7}{2}} = 9^{-\frac{3}{2} + \frac{7}{2}} = 9^2 = 81$.

Теорема 3. ***Для любых дробных показателей справедливо равенство***

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}. \qquad (3)$$

Доказательство. Применяя правила, изложенные в § 34, получим:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}.$$

Примеры.

1. $\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}} = a^2$.

2. $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{5}{6}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)} = a^{-\frac{5}{9}}$.

3. $\left(2^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{4}{3}} = 2^{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)} = 2^2 = 4$.

Итак, правила, выражаемые равенствами (1), (2) и (3), (стр. 89), оказываются справедливыми и для любых дробных показателей.

Значит, мы можем сказать, что эти правила справедливы для любых рациональных показателей.

Докажем для рациональных показателей еще три теоремы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 4. ***Если $a > 1$ и $n > 0$, то $a^n > 1$.***

Доказательство.

Пусть $n = \frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Так как $a > 1$, то (§ 19, теорема 1)

$$a^p > 1^p, \text{ то есть } a^p > 1.$$

Так как $a^p = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q$, то неравенство $a^p > 1$ можно записать так:

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q > 1^q.$$

Но тогда (§ 19, теорема 2)

$$\sqrt[q]{a^p} > 1, \text{ то есть } a^{\frac{p}{q}} > 1, \text{ или } a^n > 1.$$

Теорема 5. ***Если $a > 1$ и $n_1 > n_2$, то $a^{n_1} > a^{n_2}$.***

Доказательство.

Так как $n_1 - n_2 > 0$ по условию, то по предыдущей теореме

$$a^{n_1 - n_2} > 1.$$

Умножив обе части этого неравенства на положительное число a^{n_2}, получим:

$$a^{n_1} > a^{n_2}.$$

Теорема 6. ***Если $a > 1$ и $a^{n_1} > a^{n_2}$, то $n_1 > n_2$.***

Доказательство. Теорема легко доказывается от противного. Действительно, если бы было:

$$n_1 < n_2,$$

то есть $n_2 > n_1$, то по предыдущей теореме должно быть:

$$a^{n_2} > a^{n_1},$$

что противоречит условию.

Если бы было

$$n_1 = n_2,$$

то должно быть $a^{n_1} = a^{n_2}$, что также противоречит условию.

Значит:

$$n_1 > n_2.$$

§ 36. Умножение и деление радикалов с различными показателями корня.

1. Умножение. Пусть требуется умножить $\sqrt[3]{a}$ на $\sqrt[4]{a}$. Так как правило умножения радикалов выведено только для радикалов с одинаковыми показателями корня (§ 33), то, чтобы применить его, приведем данные корни к одному показателю. Будем иметь:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^4} \cdot \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^7}.$$

Но можно выполнить умножение и иначе: именно, представить данные радикалы в виде степеней с дробными показателями и выполнить умножение по правилу умножения степеней с одинаковыми основаниями (в предыдущем параграфе было доказано, что это правило остается в силе и для дробных показателей).

Получим:

$$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{4+3}{12}} = a^{\frac{7}{12}}.$$

Получили тот же ответ, но запись всей операции оказалась проще и короче $\left(\text{особенно если сложение } \frac{1}{3} \text{ и } \frac{1}{4} \text{ выполнить в уме}\right)$.

Еще более показателен такой пример:

$$\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right) \cdot \sqrt[6]{x}$$

Применив распределительный закон (или правило умножения суммы), будем иметь:

$$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[6]{x}.$$

Далее получим:

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{x} + \sqrt[4]{x}\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^2}\sqrt[6]{x} + \sqrt[12]{x^3}\sqrt[12]{x^2} = \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[12]{x^5} = \sqrt{x} + \sqrt[12]{x^5}.$$

Представив же данные радикалы в виде степеней с дробными показателями, получим результат гораздо быстрее:

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}\right) x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{12}}.$$

Решим еще пример:

$$\left(a\sqrt{a} - \sqrt[6]{a}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + a\sqrt[4]{a^3}\right).$$

Введем сразу дробные показатели:

$$\left(a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{7}{4}}\right) = a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{6}+\frac{2}{3}} + a^{\frac{3}{2}+\frac{7}{4}} - a^{\frac{1}{6}+\frac{7}{4}} =$$

$$= a^{\frac{13}{6}} - a^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{13}{4}} - a^{\frac{23}{12}}.$$

Для сравнения предлагается учащимся решить этот пример, не прибегая к дробным показателям.

2. Деление. Чтобы разделить радикалы с разными показателями, надо, так же как и при умножении, предварительно привести их к одинаковому показателю корня.

Пример 1.

$$6a^2\sqrt{ab} : 2b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}.$$

1-е решение. Приводим радикалы к одинаковому показателю корня.

$$6a^2\sqrt{ab} : 2b\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} = 6a^2\sqrt[6]{a^3b^3} : 2b\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^4}} =$$

$$= \frac{3a^2}{b}\sqrt[6]{\frac{a^3b^3\cdot b^4}{a^2}} = \frac{3a^2}{b}\sqrt[6]{ab^7} = 3a^2\sqrt[6]{ab}.$$

2-е решение. Введем дробные показатели.

$$6a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{2}} : 2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = 3a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 3a^{\frac{13}{6}}b^{\frac{1}{6}}.$$

Так как $a^{\frac{13}{6}} = a^2a^{\frac{1}{6}} = a^2\sqrt[6]{a}$ и $b^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{b}$, то, очевидно, получился тот же ответ, что и при первом решении, но получен он гораздо быстрее.

Пример 2.

$$\left(\sqrt[3]{6} - \sqrt[4]{2} + \sqrt[6]{4}\right)\ \sqrt[6]{2}.$$

Введем сразу дробные показатели.

$$\left(2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{3}}\right) : 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} + 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{6}}3^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{12}} + 2^{\frac{1}{6}}.$$

Как показывает опыт, в большинстве случаев при умножении и делении радикалов выгоднее пользоваться дробными показателями. Решение получается проще и короче.

§ 37. Приведение к рациональному виду числителей или знаменателей дробных иррациональных выражений.

Пусть требуется вычислить выражение $\frac{6}{\sqrt{2}}$ с точностью до 0,01. С какой точностью следует взять $\sqrt{2}$? Беря $\sqrt{2}$ с точностью до 0,1; 0,01; 0,001, получим:

$$6 : 1{,}4 \approx 4{,}3; \quad 6 : 1{,}41 \approx 4{,}25; \quad 6 : 1{,}414 \approx 4{,}243.$$

В каком из этих приближенных частных сотые доли являются уже верной цифрой?

Произведем вычисления другим способом.

Умножив числитель и знаменатель данного выражения на $\sqrt{2}$, получим:

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}.$$

Для вычисления этого выражения с точностью до 0,01 подведем 3 под радикал:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{18}.$$

Теперь, извлекая корень или найдя его по таблицам, получим:

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\sqrt{18}\approx 4{,}24.$$

Итак, из предыдущих вычислений только третье дало верную цифру сотых. Для этого нужно было взять $\sqrt{2}$ с точностью до 0,001 и делить 6 на четырехзначное число.

Как видим, для вычисления $\frac{6}{\sqrt{2}}$ с заданной точностью выгоднее оказалось привести его к виду $3\sqrt{2}$: результат сразу получился с требуемой точностью, и не пришлось производить лишнего действия — деления на многозначное число.

Значит, если в каком-либо выражении знаменатель содержит радикалы, то иногда бывает выгодно избавиться от него или, как говорят, привести знаменатель к рациональному виду.

Рассмотрим несколько примеров на приведение знаменателей к рациональному виду.

Пример 1.

$$\frac{12}{\sqrt[3]{3}}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{3^2}$, получим:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{3}}=\frac{12\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{3^2}}=\frac{12\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{12\sqrt[3]{9}}{3}=4\sqrt[3]{9}$$

Подробная запись приведена здесь для уяснения всего преобразования. Надо научиться писать сразу результат, т. е. запись должна иметь такой вид:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{3}}=\frac{12\sqrt[3]{9}}{3}=4\sqrt[3]{9}$$

(Можно и сокращение дроби произвести в уме и пропустить вторую запись).

Нужный множитель легко определить, если радикал записан в виде степени с дробным показателем.

Пример 2.

$$\frac{3}{a^{\frac{2}{5}}}$$

Знаменатель будет рациональным, если показатель при a будет целым; легко видеть, что для этого достаточно к показателю прибавить $\frac{3}{5}$, то есть умножить числитель и знаменатель на $a^{\frac{3}{5}}$.

$$\frac{3}{a^{\frac{2}{5}}}=\frac{3a^{\frac{3}{5}}}{a}.$$

Пример 3.

$$\frac{x^2y}{x^{\frac{1}{4}}}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $x^{\frac{3}{4}}$, получим:

$$\frac{x^2y}{x^{\frac{1}{4}}}=\frac{x^{2\frac{3}{4}}y}{x}=x^{1\frac{3}{4}}y.$$

Перейдем теперь к случаю, когда знаменатель является суммой или разностью двух чисел, из которых один или оба являются квадратными радикалами.

Пример 4.

$$\frac{14}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

Как привести знаменатель к рациональному виду? Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ Получим:

$$\frac{14}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{14(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{14(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=7(\sqrt{5}+\sqrt{3}).$$

Очевидно, что если бы в знаменателе стояла сумма радикалов, то мы умножили бы на их разность.

Пример 5.

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}.$$

Будем иметь:

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{13}+\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{2}\,(\sqrt{13}-\sqrt{3})}{13-3}=\frac{\sqrt{26}-\sqrt{6}}{2}.$$

Пример 6.

$$\frac{a}{b-c^{\frac{1}{2}}}.$$

Умножаем числитель и знаменатель на $b+c^{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{a}{b-c^{\frac{1}{2}}}=\frac{a\left(b+c^{\frac{1}{2}}\right)}{b^2-c}.$$

Заметим, что иногда приходится поступать наоборот: приводить к рациональному виду не знаменатель, а числитель.

Такое преобразование довольно часто встречается в высшей математике.

Выполняется оно теми же приемами, которые применяются для приведения к рациональному виду знаменателя.

Пример 7.

$$\frac{2^{\frac{1}{3}}}{6}.$$

Умножаем числитель и знаменатель на $2^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{2^{\frac{1}{3}}}{6}=\frac{2}{6\cdot 2^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}.$$

Пример 8.

$$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{9}.$$

Будем иметь:

$$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{5}}{9}=\frac{11-5}{9(\sqrt{11}+\sqrt{5})}=\frac{2}{3(\sqrt{11}+\sqrt{5})}.$$

Освобождение от иррациональности числителя и знаменателя в одном и том же выражении можно рассматривать как две операции, обратные одна другой. Поэтому правильность одной произведенной операции можно проверить при помощи другой, подобно тому, как вычитание проверяется сложением.

Пример 9.

$$\frac{6}{7\cdot 3^{\frac{2}{5}}}.$$

Умножив члены дроби на $3^{\frac{3}{5}}$, получим:

$$\frac{6}{7\cdot 3^{\frac{2}{5}}}=\frac{6\cdot 3^{\frac{3}{5}}}{7\cdot 3}=\frac{2\cdot 3^{\frac{3}{5}}}{7}.$$

Чтобы проверить правильность результата, приведем к рациональному виду числитель, для чего умножим члены дроби на $3^{\frac{2}{5}}$ Получим:

$$\frac{2\cdot 3^{\frac{3}{5}}}{7}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 3^{\frac{2}{5}}}=\frac{6}{7\cdot 3^{\frac{2}{5}}}.$$

Получили первоначальное выражение.

Значит, преобразование было произведено правильно.

Пример 10.

$$\frac{8}{\sqrt{7}-1}.$$

Умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{7}+1$.

$$\frac{8}{\sqrt{7}-1}=\frac{8(\sqrt{7}+1)}{6}=\frac{4(\sqrt{7}+1)}{3}.$$

Для проверки приведем в полученном выражении числитель к рациональному виду. Умножим члены дроби на $\sqrt{7}-1$. Получим:

$$\frac{4(\sqrt{7}+1)}{3}=\frac{4(7-1)}{3(\sqrt{7}-1)}=\frac{4\cdot 6}{3(\sqrt{7}-1)}=\frac{8}{\sqrt{7}-1}.$$

Получили первоначально данное выражение.

Пример 11.

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

Произведем над данным выражением обе операции, т. е. уничтожим иррациональность сначала в числителе, а затем в данном же выражении уничтожим иррациональность в знаменателе. Получим

$$1)\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}=\frac{4}{10+2\sqrt{21}}=$$
$$=\frac{2}{5+\sqrt{21}};$$

$$2)\ \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}=$$
$$=\frac{5-\sqrt{21}}{2}.$$

Так как в обоих случаях мы производили над данным выражением только тождественные преобразования, то и результаты должны быть равны. Это легко проверить, уничтожив, например, иррациональность в числителе второго из полученных выражений.

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2}=\frac{(5-\sqrt{21})(5+\sqrt{21})}{2(5+\sqrt{21})}=\frac{4}{2(5+\sqrt{21})}=\frac{2}{5+\sqrt{21}}.$$

Мы получили первое выражение. Наоборот, если мы освободим от радикала знаменатель первого выражения, то получим второе.

§ 38. Краткие исторические сведения.

Как было сказано (§ 18), индийские математики X—XI веков уже производили действия с иррациональными числами, в частности с корнями. В их работах можно встретить равенства вида:

$$\sqrt{2}\ \ \sqrt{3}=\sqrt{6};\quad \sqrt{12}:\sqrt{3}=\pm 2.$$

Бхаскара приводит знаменатель к рациональному виду, умножая числитель и знаменатель на одно и то же иррациональное выражение.

У него же встречается равенство:

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5},$$

справедливость которого легко проверить, возведя обе части его в квадрат.

ГЛАВА V.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К НИМ.

§ 39. Уравнения с одним неизвестным.

В § 60 ч. I уравнение с одним неизвестным было определено как равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Уравнения имеют различные названия в зависимости от того, какие действия производятся над неизвестным.

Определение 1. **Уравнение называется рациональным, если все его части — рациональные выражения относительно неизвестного.**

Так, например, уравнения

$$\frac{x+4}{2x+3}+x^2=\frac{5-x}{2}; \tag{1}$$

$$\frac{2x+1}{3}-2x=\frac{\sqrt{2}-3x}{2} \tag{2}$$

являются рациональными. Наоборот, уравнение

$$2x^2-\sqrt{x+3}=7$$

не будет рациональным, так как его левая часть — иррациональное выражение относительно неизвестного. В этом случае и самое уравнение называется иррациональным.

Определение 2. **Рациональное уравнение называется целым, если неизвестное не входит ни в один из знаменателей.**

В противном случае уравнение называется дробным.

Приведенное выше уравнение (1) является дробным, а уравнение (2) — целым.

Всякое дробное уравнение можно привести к целому, умножив все его члены на наименьшее кратное знаменателей.

Например, умножив все члены уравнения (1) на $2(2x+3)$ и произведя сокращения, получим:

$$2(x+4)+2x^2(2x+3)=(5-x)(2x+3). \tag{3}$$

Но мы уже знаем (ч. 1, § 67), что при этом может получиться уравнение, неравносильное данному.

Всякое целое уравнение можно привести, как говорят, к нормальному виду.

Привести уравнение к нормальному виду — это значит преобразовать его так, чтобы левая часть его являлась многочленом (в частности одночленом) относительно неизвестного, а правая часть была равна нулю.

Приведем к нормальному виду уравнение (3).

Раскроем скобки:

$$2x+8+4x^3+6x^2=10x-2x^2+15-3x.$$

Перенесем все члены в левую часть и приведем подобные. Получим:

$$4x^3+8x^2-5x-7=0. \tag{4}$$

Уравнение (4) и является нормальным видом уравнения (1).

Определение 3. **Если целое уравнение приведено к нормальному виду, то степень многочлена относительно неизвестного называется и степенью уравнения.**

Примеры.

1. В уравнении (4) левая часть — многочлен третьей степени относительно неизвестного. Значит, это уравнение третьей степени.

2. О степени уравнения

$$\frac{x-3}{x^2+4}-\frac{x^2+6}{b}=2$$

мы ничего не можем сказать, так как оно не является целым.

3. О степени уравнения

$$5x^2+3-2x-2x^2-4-3x^2=0$$

мы также ничего не можем сказать, так как оно не приведено к нормальному виду: не сделано приведение подобных членов.

Примечание. Говоря о многочлене, мы предполагаем, что в нем нет подобных членов (ч. 1, § 32).

§ 40. Квадратные уравнения.

Уравнение, в котором левая часть — многочлен второй степени относительно неизвестного, а правая нуль, называется уравнением второй степени, или, короче, квадратным.

Другими словами, квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

где a — любое неравное нулю действительное число, а b и c — любые действительные числа.

Если коэффициент при x^2 отрицателен, то мы можем сделать его положительным, умножив обе части уравнения на -1.

Например, умножив обе части уравнения $-3x^2+5x-6=0$ на -1, получим равносильное уравнение $3x^2-5x+6=0$. Поэтому в дальнейшем для простоты будем всегда предполагать, что $a>0$.

В частности, b, или c, или оба вместе могут быть равны нулю. Тогда уравнение называется неполным квадратным уравнением. Значит, неполные квадратные уравнения могут быть таких видов:

$$1)\ ax^2+bx=0 \quad (\text{при } c=0);$$

$$2)\ ax^2+c\ \ =0 \quad (\text{при } b=0).$$

В частности, если во втором случае и $c=0$, то уравнение примет вид $ax^2=0$.

Если в уравнении (1) $a=1$, то уравнение называется приведенным. Оно обычно записывается в таком виде:

$$x^2+px+q=0,$$

где p и q — любые действительные числа.

Всякое уравнение вида (1) можно сделать приведенным; для этого достаточно все его члены разделить на a.

В дальнейшем для краткости будем называть в уравнении (1) a первым коэффициентом, b вторым и c свободным членом.

§ 41. Уравнения вида $ax^2+bx=0$.

Задача. *Длина прямоугольного участка в 5 раз больше его ширины. Когда ширину участка увеличили на 9 м, то площадь его увеличилась в 4 раза. Найти первоначальные размеры участка.*

Решение. Обозначим через x метров первоначальную ширину участка. Тогда можно составить такую таблицу:

	Ширина	Длина	Площадь
Первоначальный участок	x	$5x$	$5x^2$
Расширенный участок	$x+9$	$5x$	$5x(x+9)$

По условию площадь расширенного участка в 4 раза больше площади первоначального. Значит, можем написать уравнение:

$$4\cdot 5x^2=5x(x+9). \qquad (1)$$

Разделим обе части уравнения на 5 и приведем его к нормальному виду:

$$3x^2 - 9x = 0,$$

или

$$x^2 - 3x = 0. \tag{2}$$

Получили неполное квадратное уравнение. Решим его. Вынеся x за скобки, получим:

$$x(x - 3) = 0.$$

Но произведение равно нулю только в том случае, если хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Значит, должно быть: 1) либо $x = 0$, 2) либо $x - 3 = 0$, то есть $x = 3$.

Итак, мы получили два решения: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Подстановкой в уравнение (1) убедимся, что оба они ему удовлетворяют. Но по смыслу задачи число x, выражающее ширину участка, не может быть нулем. Значит, остается одно решение: $x = 3$.

Длину участка найдем, увеличив ширину в 5 раз.

$$3 \cdot 5 = 15.$$

Задача имеет единственное решение: длина первоначального участка была равна 15 *м*, а ширина 3 *м*.

Решим теперь неполное квадратное уравнение

$$ax^2 + bx = 0 \tag{3}$$

в общем виде. Вынеся x за скобки, получим:

$$x(ax + b) = 0. \tag{4}$$

И здесь, как и для уравнения (1), будем иметь два решения:

1) $x_1 = 0$;

2) $ax + b = 0$, откуда $x_2 = -\frac{b}{a}$.

В частности, если $b = 0$, то получим: $x_2 = 0$, то есть уравнение (3) или, что то же, уравнение (4) имеет лишь одно решение $x = 0$.

Действительно, если $b = 0$, то уравнение (3) примет вид $ax^2 = 0$, где $a \neq 0$. Очевидно, что левая часть этого уравнения будет равна нулю только при $x = 0$.

§ 42. Уравнения вида $ax^2 + c = 0$.

Уравнения этого вида мы уже решали (§ 11). Напомним, что это уравнение имеет:

1) два решения $x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, если $\frac{c}{a} < 0$;

2) одно решение $x = 0$, если $\frac{c}{a} = 0$;

3) не имеет решений, если $\frac{c}{a} > 0$.

Примеры.

1. $9x^2 - 121 = 0$, $x = \pm \frac{11}{3} = \pm 3\frac{2}{3}$;

2. $6x^2 = 0$, $x = 0$;

3. $x^2 + 4 = 0$ — уравнение не имеет решений.

Способ, которым решались уравнения этого вида в § 11, применим здесь к решению более сложных уравнений.

Пусть дано уравнение:

$$(x - 3)^2 - 64 = 0. \qquad (1)$$

Если мы определим, чему равно $x - 3$, то найдем и чему равно x. Обозначим поэтому $x - 3$ какой-либо буквой, например y. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$y^2 - 64 = 0.$$

Но такие уравнения мы уже решать умеем.

Разложив левую часть на множители, будем иметь

$$(y - 8)(y + 8) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$y_1 = 8; \quad y_2 = -8.$$

Значит,

$$x_1 - 3 = 8; \quad x_2 - 3 = -8.$$

Отсюда

$$x_1 = 11; \quad x_2 = -5.$$

Подстановка в уравнение (1) показывает, что 11 и -5 действительно являются его корнями.

Можно короче решить уравнения вида (1), не вводя нового неизвестного, а прямо разлагая левую часть на множители.

Пример.

$$(x + 5)^2 - 121 = 0. \qquad (2)$$

Имеем

$$(x + 5)^2 - 11^2 = 0.$$

Отсюда

$$(x + 5 - 11)(x + 5 + 11) = 0,$$

или

$$(x - 6)(x + 16) = 0.$$

Получаем:

$$x_1 = 6; \quad x_2 = -16.$$

Подстановкой убеждаемся, что оба эти числа действительно являются корнями уравнения (2).

Решим еще уравнение:

$$(x - 2)^2 - 5 = 0. \qquad (3)$$

Число 5 не является точным квадратом.

Но мы можем записать его как $(\sqrt{5})^2$.

Тогда получим:

$$(x-2)^2-(\sqrt{5})^2=0.$$

Отсюда

$$(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})=0;$$

$$x-2-\sqrt{5}=0; \quad x_1=2+\sqrt{5};$$

$$x-2+\sqrt{5}=0; \quad x_2=2-\sqrt{5}.$$

Оба корня можно сразу записать так:

$$x=2\pm\sqrt{5}.$$

Проверить подстановкой в уравнение (3).

§ 43. Приведенное квадратное уравнение.

Задача. *Одна сторона прямоугольника на* 6 *см меньше другой. Площадь его равна* 40 *см*^{2}. *Определить стороны прямоугольника.*

Решение. Пусть бо́льшая сторона равна x сантиметрам.

Тогда вторая сторона равна $(x-6)$ сантиметрам.

Площадь прямоугольника $x(x-6)$ *см*^{2}.

По условию

$$x(x-6)=40.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду:

$$x^2-6x-40=0.$$

Получили приведенное квадратное уравнение. Чтобы решить его, попробуем привести его к знакомому нам виду.

Для этого выделим в левой части квадрат двучлена. Замечая, что

$$x^2-6x=x^2-2\cdot 3\cdot x,$$

заключаем, что, прибавив к этому выражению 3^2, получим квадрат двучлена $x-3$. Поэтому прибавим 9 в левой части уравнения $x^2-6x-40=0$ и вычтем то же число. Получим:

$$x^2-6x+9-9-40=0,$$

или

$$(x-3)^2-49=0.$$

Решать такое уравнение мы уже умеем.

Разложив левую часть на множители, получим:

$$(x-3-7)(x-3+7)=0,$$

или

$$(x-10)(x+4)=0.$$

Отсюда

$$x-10=0;\quad x_1=10;$$

$$x+\ 4=0;\quad x_2=-4.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению. Но по смыслу задачи для x допустимыми являются только положительные значения (и притом бо́льшие шести). Следовательно, задача имеет единственное решение: бо́льшая сторона прямоугольника равна 10 *см*, а меньшая $10-6=4$ (*см*).

Решим приведенное квадратное уравнение в общем виде.

Пусть дано уравнение:

$$x^2+px+q=0. \tag{1}$$

Чтобы решить его, поступим так же, как и в приведенном выше примере.

Так как $p=2\cdot\frac{p}{2}$, то прибавим и вычтем $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}$.

Получим:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q=0,$$

или

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)=0. \tag{2}$$

Рассмотрим три случая в зависимости от значения выражения $\frac{p^2}{4}-q$.

1) $\frac{p^2}{4}-q>0$.

Тогда мы можем уравнение (2) переписать в таком виде:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)=0.$$

Отсюда

$$x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0;\ x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$$

$$x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0;\ x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Оба решения можно записать вместе:

$$\boldsymbol{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}. \tag{A}$$

Итак, в этом случае уравнение (1) имеет два решения.

Формула (А) является **общей формулой** корней приведенного квадратного уравнения. Словами ее можно выразить так.

Корни приведенного квадратного уравнения равны половине второго коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена.

Запомнив формулу (А), мы можем найти корни приведенного квадратного уравнения, не производя никаких преобразований, а просто подставив в формулу (А) данные значения p и q.

Примеры.

1. $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Здесь $p = -7$, $q = 10$. Вычислим $\frac{p^2}{4} - q$.

$$\frac{49}{4} - 10 = \frac{9}{4} > 0.$$

Значит, уравнение имеет два решения.

Подставив в формулу (А) значения p и q, получим:

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Отсюда имеем: $x_1 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5$; $x_2 = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$.

Подстановкой убедимся, что корни найдены верно.

2. $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Здесь $p = 3$, $q = -4$. Имеем $\frac{9}{4} - (-4) = \frac{9}{4} + 4 > 0$.

Уравнение имеет два решения. Формула (А) дает:

$$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

Отсюда $x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$; $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4$.

2) $\frac{p^2}{4} - q = 0$.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0.$$

Отсюда

$$x + \frac{p}{2} = 0; \quad x = -\frac{p}{2}.$$

Итак, в этом случае уравнение имеет одно решение.

Пример.

$$x^2 - 8x + 16 = 0;$$

$$p = -8, \quad q = 16; \quad \left(-\frac{8}{2}\right)^2 - 16 = 0.$$

Левая часть является квадратом двучлена. Имеем:

$$(x-4)^2 = 0; \quad x - 4 = 0; \quad x = 4.$$

3) $\frac{p^2}{4} - q < 0.$

Тогда уравнение (2) можно переписать так:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Правая часть этого уравнения — отрицательное число. Левая же часть ни при каком значении x отрицательной быть не может. Следовательно, в этом случае уравнение (1) не имеет решений.

Пример.

$$x^2 - 6x + 13 = 0.$$

Здесь $\frac{p^2}{4} - q = 9 - 13 = -4 < 0.$

Уравнение не имеет решений.

Действительно, представив уравнение в таком виде:

$$(x-3)^2 + 4 = 0, \quad \text{или} \quad (x-3)^2 = -4,$$

замечаем, что левая часть ни при каком значении x не может стать отрицательной. Следовательно, уравнение не имеет решений.

§ 44. Квадратное уравнение общего вида.

Решим уравнение:

$$4x^2 - 5x - 21 = 0.$$

Разделим все его члены на 4. Получим:

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{21}{4} = 0.$$

Но это уравнение — приведенное, и решать его мы уже умеем.

Применим формулу (A) предыдущего параграфа:

$$x = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{21}{4}}.$$

Произведем вычисления:

$$\frac{25}{64} + \frac{21}{4} = \frac{25 + 21 \cdot 16}{64} = \frac{361}{64}; \quad \sqrt{\frac{361}{64}} = \frac{19}{8}.$$

Итак, имеем:

$$x = \frac{5}{8} \pm \frac{19}{8}.$$

Отсюда

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{7}{4}.$$

Таким же путем решим теперь квадратное уравнение в общем виде:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Разделим обе части этого уравнения на a (мы знаем, что $a \neq 0$). Получим:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0. \tag{2}$$

Если $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} < 0$, то уравнение (2), а следовательно, и (1) не имеет решений.

Если же $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \geqslant 0$, то применим формулу (А), § 43.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}. \tag{3}$$

Формула (3) дает решение квадратных уравнений при любых числовых значениях коэффициентов a, b и c (при которых уравнение имеет решение). Примером может служить предыдущее уравнение $4x^2 - 5x - 21 = 0$.

Преобразуем правую часть формулы (3) так, чтобы легче пользоваться ею.

Имеем

$$\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Подставив в (3), найдем:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \tag{Б}$$

Найдем по этой формуле корни того же уравнения $4x^2 - 5x - 21 = 0$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 4 \cdot 21}}{8};$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{5 \pm 19}{8}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{7}{4}.$$

Словами формулу (Б) можно выразить так:

Корни квадратного уравнения равны дроби, знаменатель которой равен удвоенному первому коэффициенту, а числи-

тель второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс-минус квадратный корень из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента и свободного члена.

Как видим, словами формула читается очень длинно и поэтому легче запомнить самую формулу.

Если в формуле (Б) положить $a=1$, то получим:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}.$$

Предлагаем учащимся показать, что эта формула совпадает с формулой (А) для корней приведенного квадратного уравнения. Значит, формула (А) является частным случаем формулы (Б) при $a=1$.

Предлагаем учащимся показать, что формулы, выведенные для корней неполных квадратных уравнений (§ 41, 42), являются частными случаями формулы (Б).

Примеры.

1. $x^2-7x+12=0$. Здесь $a=1$, $b=-7$, $c=12$.

Формула (Б) дает:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2};$$

$$x_1=4,\quad x_2=3.$$

2. $9x^2-49=0$.
Здесь $a=9$, $b=0$, $c=49$.
По формуле (Б)

$$x=\frac{0\pm\sqrt{0+4\cdot9\cdot49}}{2\cdot9}=\pm\frac{\sqrt{4\cdot9\cdot49}}{18}=\pm\frac{2\cdot3\cdot7}{18}=\pm\frac{7}{3}.$$

3. $2x^2+5x=0$.
Здесь $a=2$, $b=5$, $c=0$.
Формула (Б) дает:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot0}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm5}{2\cdot2};\quad x_1=0;\quad x_2=-\frac{5}{2}.$$

Формулу (Б) можно еще несколько упростить, если коэффициент b является четным числом.

Пусть $b=2k$, тогда:

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-2k\pm2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a} \qquad \text{(В)}$$

Пример.

$$5x^2 - 14x + 8 = 0.$$

Так как коэффициент при x — четное число, то применяем формулу (В):

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 5 \cdot 8}}{5} = \frac{7 \pm 3}{5};$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{4}{5}.$$

Решим дробное уравнение:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x-3}.$$

Прежде всего установим допустимые значения для неизвестного. Уравнение показывает, что при $x = 2$ и при $x = 3$ оно теряет смысл. Значит, для x допустимыми являются любые значения, кроме $x = 2$ и $x = 3$.

Предполагая, что $x \neq 2$ и $x \neq 3$, умножим обе части данного уравнения на $(x-2)(x-3)$. Получим: $x(x-3) + 2 = 3(x-2)$, или $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Получили квадратное уравнение. Так как $(-3)^2 - 8 = 1 > 0$, то оно имеет два корня. Решив его по формуле (В), найдем $x_1 = 4$; $x_2 = 2$.

Но для данного уравнения значение $x = 2$ не является допустимым. Значит, данное уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

§ 45. Дискриминант.

В предыдущем параграфе была выведена общая формула решений квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0; \tag{1}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

Но, как мы видели (§ 44), квадратное уравнение (1) имеет решения только при условии, что $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \geqslant 0$. Преобразуем это выражение.

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Для того чтобы уравнение (1) имело решения, необходимо соблюдение условия

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geqslant 0.$$

Но выражение $4a^2$ всегда положительно ($a \neq 0$). Значит, знак левой части в неравенстве целиком зависит от знака выражения $b^2 - 4ac$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом (различителем) уравнения (1). Обозначим его через D.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Тогда формулу (2) можно записать короче:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, число решений уравнения (1) целиком зависит от значения D. Именно:

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Если $D < 0$, то уравнение не имеет решений.

Примеры.

1. $3x^2 - 2x + 7 = 0$.

Вычисляем:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -80 < 0.$$

Уравнение не имеет решений.

2. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$$D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0.$$

Уравнение имеет одно решение: $x = \frac{12}{2 \cdot 9} = \frac{2}{3}$.

Это же решение получим, подставив значения коэффициентов в формулу (B) § 44.

3. $4x^2 - 12x + 7 = 0$.

$$D = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = 144 - 112 = 32 > 0.$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}.$$

§ 46. Решение задач, приводящих к квадратным уравнениям.

Квадратные уравнения еще в большей мере, чем уравнения первой степени, оказывают помощь при решении задач. Значительная часть задач, легко решаемых при помощи уравнений первой степени, может быть решена и чисто арифметически, хотя обычно гораздо более трудным, длинным и часто очень искусственным путем. Задачи же, приводящие к квадратным уравнениям, как правило, совсем не поддаются арифметическому решению. А к таким именно задачам приводят многочисленные и самые разнообразные вопросы физики, механики, гидромеханики, аэродинамики и многих других прикладных наук. Квадратные уравнения оказывают здесь неоценимую услугу.

Основные этапы составления квадратных уравнений по условиям задачи те же, что и при решении задач, приводящих к уравнениям первой степени. Приведем примеры.

Задача 1. *Две машинистки перепечатали рукопись за* 6 *час.* 40 *мин. Во сколько времени могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая одна, если первая затратила бы на эту работу на* 3 *часа больше второй?*

Решение. Пусть первая машинистка затратит на перепечатку рукописи x часов. Значит, вторая машинистка затратит на эту же работу $(x-3)$ часов.

Узнаем, какую часть всей работы выполняет за один час каждая машинистка и обе вместе.

Первая машинистка выполнит за час $\frac{1}{x}$ часть.

Вторая » » » » $\frac{1}{x-3}$ часть.

Обе вместе машинистки выполняют » » $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}\right)$ часть.

Отсюда имеем:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{6\frac{2}{3}}, \tag{1}$$

или

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{20}.$$

По виду уравнения заключаем, что значения $x=0$ и $x=3$ не является для него допустимым. Кроме того, вторая машинистка затратит на работу $(x-3)$ часов; следовательно, должно быть $x-3>0$, то есть $x>3$.

Полагая, $x \neq 0$ и $x \neq 3$, умножим обе части уравнения на $20x(x-3)$. После упрощений получим квадратное уравнение.

$$3x^2-49x+60=0.$$

Так как $49^2-4\cdot 3\cdot 60=1681>0$, то уравнение имеет два решения. По формуле (Б) найдем:

$$x_1=15; \quad x_2=\frac{4}{3}.$$

Но так как должно быть $x > 3$, то значение $x = \frac{4}{3}$ не является допустимым.

Далее, значение $x = 15$ необходимо проверить по условию задачи и только после этого записать ответ.

Ответ. Первая машинистка затратила на работу 15 часов, вторая $15 - 3 = 12$ (часов).

Задача 2. *Собственная скорость самолета v км в час. Расстояние в l км самолет пролетел дважды: сначала по ветру, затем против ветра, причем на второй перелет он затратил на t часов больше. Определить скорость ветра.*

Ход решения изобразим в виде схемы:

Скорость ветра x *км* в час.

	Путь	Скорость	Время
По ветру	l	$v + x$	$\frac{l}{v+x}$
Против ветра	l	$v - x$	$\frac{l}{v-x}$
По условию	$\frac{l}{v-x} - \frac{l}{v+x} = t.$		

Исключив значения $x = \pm v$ как недопустимые, умножим обе части уравнения на $(v-x)(v+x)$. После упрощения получим квадратное уравнение:

$$tx^2 + 2lx - tv^2 = 0.$$

Решив его ($t \neq 0$), найдем:

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + t^2v^2}}{t}.$$

Из полученной формулы заключаем:

1. Уравнение всегда имеет решение, так как подкоренное выражение всегда положительно.

2. Задача имеет единственное решение, так как второй корень отбрасываем как отрицательный.

Задача 3. *Средняя скорость пассажирского поезда (включая остановки) на 20 км в час больше скорости товарного. Поэтому перегон в 450 км пассажирский поезд сделал быстрее на 6 часов. Найти скорость и время движения того и другого поезда.*

В задаче требуется определить четыре неизвестные величины. Для хода решения безразлично, какую из них мы выберем в качестве основного неизвестного. В зависимости от нашего выбора решение изобразится одной из следующих схем:

Схема 1.

Основное неизвестное — скорость пассажирского поезда.

	Путь	Скорость	Время
Пассажирский	450	x	$\frac{450}{x}$
Товарный	450	$x-20$	$\frac{450}{x-20}$

По условию . . . . $\frac{450}{x-20}-\frac{450}{x}=6.$

Получили уравнение, которое после упрощения приведется к квадратному.

Схема 2.

Основное неизвестное — скорость товарного поезда.

	Путь	Скорость	Время
Пассажирский	450	$x+20$	$\frac{450}{x+20}$
Товарный	450	x	$\frac{450}{x}$

По условию . . . . $\frac{450}{x}-\frac{450}{x+20}=6.$

Схема 3.

Основное неизвестное — время движения пассажирского поезда

	Путь	Время	Скорость
Пассажирский	450	x	$\frac{450}{x}$
Товарный	450	$x+6$	$\frac{450}{x+6}$

По условию . . . . $\frac{450}{x}-\frac{450}{x+6}=20.$

Схема 4

Основное неизвестное — время движения товарного поезда

	Путь	Время	Скорость
Пассажирский	450	$x-6$	$\frac{450}{x-6}$
Товарный	450	x	$\frac{450}{x}$

По условию . . . . . . $\frac{450}{x-6}-\frac{450}{x}=20.$

Предлагаем учащимся решить каждое из четырех полученных уравнений и, определив основное неизвестное, найти в каждом случае неизвестные, требуемые задачей.

§ 47. Теорема Виета.

Решим приведенное уравнение:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

По формуле получим:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2}$$

Отсюда $x_1 = 4$; $x_2 = 3$.

Обратим внимание на следующее: если сложить найденные корни, то получим число, противоположное коэффициенту при x. Действительно, в уравнении $p = -7$, а

$$x_1 + x_2 = 4 + 3 = 7.$$

Если найденные корни перемножить, то получим число, равное свободному члену уравнения. Действительно:

$$c = 12 \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

Возьмем еще уравнение:

$$x^2 + 2x - 35 = 0.$$

Его корни

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -7.$$

Опять имеем:

$$x_1 + x_2 = 5 + (-7) = -2 \qquad (p = 2);$$

$$x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-7) = -35 \qquad (q = -35).$$

Покажем, что корни любого приведенного уравнения обладают этим свойством. Докажем следующую теорему:

Теорема. ***Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.***

Пусть имеем уравнение:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если уравнение имеет решения, то они будут равны (§ 43):

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Отсюда получаем:

$$1)\ x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -p.$$

Итак,

$$x_1 + x_2 = -p.$$

$$2)\ x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q.$$

Итак,

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Теорема доказана.

Эта теорема называется теоремой Виета по имени французского математика Виета (1540—1603).

Полное квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

сделаем приведенным, разделив обе части на a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Тогда по теореме Виета будем иметь:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Если дискриминант квадратного уравнения $D = 0$, то уравнение имеет один корень и, следовательно, теорема Виета в этом случае неприменима.

Но введем следующее условие: будем считать, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ и в случае, когда $D = 0$, тоже имеет два корня, но равных. Каждый корень равен $-\frac{p}{2}$.

Эти два корня мы получим из формул:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Положим в них $\frac{p^2}{4} - q = 0$. Тогда имеем $x_1 = -\frac{p}{2}$; $x_2 = -\frac{p}{2}$.

При введенном условии теорема Виета остается верной и в случае, когда $D = 0$. Действительно,

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p; \ x_1 \cdot x_2 = \frac{p^2}{4} = q.$$

Таким образом, теорема Виета верна для любого квадратного уравнения, имеющего решение.

Пример. $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Имеем: $x_1 = x_2 = 5$; $x_1 + x_2 = 10$; $x_1 \cdot x_2 = 25$.

Теорема (обратная). ***Если сумма двух чисел равна p, а их произведение равно q, то эти числа являются кор-***

нями уравнения

$$x^2 - px + q = 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть дано, что

$$a + b = p; \quad ab = q. \qquad (2)$$

Докажем, что тогда числа a и b являются корнями уравнения (1).

Пользуясь равенствами (2), мы можем уравнение (1) переписать так:

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0. \qquad (3)$$

Покажем, что a удовлетворяет этому уравнению, а следовательно, и уравнению (1).

Подставив a вместо x в уравнение (3), получим:

$$a^2 - (a + b)a + ab = a^2 - a^2 - ab + ab = 0.$$

Левая часть оказалась равной нулю. Значит, a — корень уравнений (3) и (1).

Таким же образом подстановкой $x = b$ убедимся, что и b является корнем уравнений (3) и (1).

На основании этой теоремы легко решаются следующие задачи.

Задача 1. *Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы данные числа.*

Пусть m и n — данные числа. На основании теоремы, обратной теореме Виета, m и n являются корнями уравнения:

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Пример.

Пусть $m = 3$; $n = -5$.

Тогда

$$m + n = -2; \quad mn = -15.$$

Искомое уравнение:

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Задача 2. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

На основании той же теоремы заключаем, что x и y являются корнями уравнения

$$z^2 - az + b = 0.$$

Решив его (если $a^2 - 4b \geqslant 0$), найдем два значения (различных или равных) z_1 и z_2. Тогда, положив

$$x = z_1, \quad y = z_2 \quad \text{и} \quad x = z_2, \quad y = z_1,$$

получим два или одно решение системы.

Пример 1. $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=-21. \end{cases}$

Здесь $4^2-4(-21)=100>0$. Уравнение

$$z^2-4z-21=0$$

и данная система имеют два решения:

$$x_1=7; \quad y_1=-3.$$
$$x_2=-3; \quad y_2=7.$$

Пример 2. $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=25. \end{cases}$

Здесь $10^2-4\cdot 25=0$. Система имеет одно решение $x=5$, $y=5$.

Пример 3. $\begin{cases} x+y=7, \\ xy=15. \end{cases}$

Здесь $7^2-4\cdot 15=-11<0$. Система не имеет решений.

§ 48. Разложение квадратного трехчлена.

1. Квадратный трехчлен и его корни. Многочлен второй степени относительно какой-либо буквы называется иначе *квадратным трехчленом*, или *трехчленом второй степени* относительно этой буквы. Общий вид квадратного трехчлена такой:

$$ax^2+bx+c. \qquad (1)$$

Считается, что коэффициенты a, b и c являются некоторыми определенными числами (заметим, что a может быть и отрицательным), а x может принимать различные значения. В зависимости от значения x и самый трехчлен может принимать различные значения. Букву x будем называть *главной буквой*, или *аргументом*.

Пример. Обозначим через y трехчлен

$$y=x^2-4x-5. \qquad (2)$$

Будем давать x произвольные значения. Соответствующие значения трехчлена x^2-4x-5 или, что то же, значения y даны в следующей таблице:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4	5	6	7
y	40	27	16	7	0	-5	-9	-8	-5	0	7	16

Из этой таблицы, между прочим, видим, что при $x=-1$ и при $x=5$ значение трехчлена становится равным нулю.

Определение. **Те значения аргумента, которые обращают трехчлен в нуль, называются корнями этого трехчлена.**

Так $x = -1$ и $x = 5$ являются корнями трехчлена (2).

Чтобы определить корни трехчлена (1), надо найти те значения x, при которых он становится равным нулю, то есть те значения x, при которых

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{3}$$

Значит, корни трехчлена (1) мы найдем, решив уравнение (3). Но мы знаем, что это уравнение в зависимости от величины его дискриминанта $b^2 - 4ac$ может иметь два, одно решение и не иметь решений.

Значит, то же можно сказать и о трехчлене (1). Он а) имеет два корня (различных или равных), если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, б) не имеет корней, если $b^2 - 4ac < 0$.

Дискриминант уравнения (3) называется также дискриминантом и трехчлена (1).

2. Разложение трехчлена вида $x^2 + px + q$. Допустим, что трехчлен

$$y = x^2 + px + q$$

имеет два корня. Обозначим их α и β. Тогда эти числа α и β являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Но по теореме Виета будем иметь:

$$\alpha + \beta = -p; \quad \alpha\beta = q.$$

Значит,

$$p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha\beta.$$

Подставим значения p и q в данный трехчлен и преобразуем полученное выражение:

$$y = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta =$$

$$= x(x - \alpha) - \beta(x - \alpha) = (x - \alpha)(x - \beta).$$

Итак, мы получили:

$$x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$$

Таким образом, ***если трехчлен вида $y = x^2 + px + q$ имеет корни, то он может быть представлен в виде произведения двух сомножителей: один из них является разностью между аргументом и одним корнем, другой — разностью между аргументом и другим корнем.***

Пример.

$$y = x^2 - 6x + 7.$$

Решив уравнение

$$x^2-6x+7=0,$$

найдем его корни: $x_1=3+\sqrt{2}$; $x_2=3-\sqrt{2}$. Тогда

$$x^2-6x+7=(x-3-\sqrt{2})(x-3+\sqrt{2}).$$

3. Разложение трехчлена вида ax^2+bx+c. Возьмем теперь трехчлен

$$y=ax^2+bx+c, \tag{1}$$

где $a\neq 0$ и $a\neq 1$. Пусть корни уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \tag{2}$$

будут $x_1=\alpha$ и $x_2=\beta$.

Вынеся в данном трехчлене a за скобки, получим:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right). \tag{3}$$

Но так как $x_1=\alpha$ и $x_2=\beta$ — корни уравнения (2), или, что то же, уравнения $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, то по предыдущему:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Подстановка в (3) дает:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

Трехчлен ax^2+bx+c может быть представлен в виде произведения трех сомножителей: один равен коэффициенту при x^2, а два других разности между аргументом и корнями трехчлена.

Пример 1.

$$y=3x^2+5x+2;$$

$$D=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2=1>0.$$

Уравнение

$$3x^2+5x+2=0$$

имеет два корня: $x_1=-1$; $x_2=-\frac{2}{3}$.

Тогда

$$3x^2+5x+2=3(x+1)\left(x+\frac{2}{3}\right).$$

Выполнив умножение в правой части, убедимся в правильности разложения.

Полученное произведение можно представить в более удобном виде: перемножив сомножители 3 и $\left(x+\frac{2}{3}\right)$, получим:

$$3x^2+5x+2=(x+1)(3x+2).$$

Пример 2.

$$y = -6x^2 + 17x - 5.$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-5) = 289 - 120 = 169 > 0.$$

Уравнение

$$-6x^2 + 17x - 5 = 0,$$

или, что то же:

$$6x^2 - 17x + 5 = 0$$

имеет корни: $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = \frac{1}{3}$.

Тогда

$$-6x^2 + 17x - 5 = -6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right),$$

или

$$y = -6x^2 + 17x - 5 = -(2x - 5)(3x - 1).$$

Проверить умножением.

§ 49. Исследование корней квадратного уравнения.

Пусть дано, или получено при решении задачи квадратное уравнение. Часто бывает полезно до решения этого уравнения установить некоторые данные относительно его корней, или, как говорят, исследовать корни уравнения.

1. Исследование корней по дискриминанту уравнения. Прежде всего нужно, конечно, установить — стоит ли решать данное уравнение, то есть имеет ли оно корни. Из § 45 и 47 известно, что ответ на этот вопрос зависит от величины дискриминанта $D = b^2 - 4ac$, а именно:

1. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня.
2. Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня.
3. Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Примеры всех трех случаев приводились в предыдущих параграфах.

2. Исследование корней приведенного квадратного уравнения по его коэффициентам. Пусть дано уравнение:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p \neq 0 \quad \text{и} \quad q \neq 0).$$

Тогда, рассматривая коэффициенты этого уравнения, можно получить еще некоторые сведения относительно его корней, не решая самого уравнения.

Рассмотрим различные случаи.

1) Пусть $q < 0$. Тогда прежде всего заключаем, что уравнение имеет корни. В самом деле в этом случае всегда будет $\frac{p^2}{4} - q > 0$, так как $\frac{p^2}{4} > 0$ и $-q > 0$.

Итак, мы пришли к важному выводу: если в приведенном квадратном уравнении свободный член отрицателен, то уравнение имеет корни. Значит, в этом случае мы можем не выяснять предварительно знак дискриминанта.

Далее, по теореме Виета имеем:

$$x_1 + x_2 = -p \ (1); \qquad x_1 x_2 = q. \qquad (2)$$

Из условия $q < 0$ заключаем, что произведение корней $x_1 x_2$ отрицательно, а это означает, что корни имеют противоположные знаки: один из них положителен, другой отрицателен.

Поставим вопрос — который из них больше по абсолютной величине? Ответ на это получим из соотношения (1).

а) Пусть $p > 0$. Тогда сумма $x_1 + x_2 = -p$ отрицательна, а это значит, что отрицательный корень больше по абсолютной величине, чем положительный.

б) Пусть $p < 0$. Тогда сумма $x_1 + x_2$ положительна, и, значит, положительный корень больше по абсолютной величине, чем отрицательный.

Пример 1.

$$x^2 - 11x - 26 = 0.$$

$q = -26 < 0$; значит, уравнение имеет корни, и они имеют противоположные знаки.

$x_1 + x_2 = -p = 11$; значит, положительный корень больше по абсолютной величине, чем отрицательный. Решив уравнение, найдем его корни: $x_1 = 13$; $x_2 = -2$.

2) Пусть $q > 0$. Тогда из (2) заключаем, что если уравнение имеет корни, то произведение их $x_1 x_2$ положительно, а это означает, что корни имеют одинаковые знаки.

Поставим вопрос — какие именно? Ответ и здесь получим из соотношения (1).

а) Пусть $p > 0$. Тогда сумма $x_1 + x_2$ отрицательна и, значит, оба корня отрицательны.

б) Пусть $p < 0$. Тогда сумма $x_1 + x_2$ положительна и, значит, оба корня положительны.

Пример 2.

$$x^2 - 10x + 22 = 0.$$

$D = 10^2 - 4 \cdot 22 = 12 > 0$. Уравнение имеет корни, и они имеют одинаковые знаки, так как $x_1 x_2 = 22 > 0$.

Сумма корней равна 10. Значит, оба они положительны. Решив уравнение, найдем: $x_1 = 5 + \sqrt{3}$; $x_2 = 5 - \sqrt{3}$.

3 Исследование корней уравнения общего вида. Перейдем теперь к уравнению вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a > 0$. Разделив обе части уравнения на a, получим приведенное уравнение:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

которое имеет те же корни, что и данное.

Здесь $p = \frac{b}{a}$; $q = \frac{c}{a}$.

Но так как по условию $a > 0$, то знаки $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ совпадут соответственно со знаком b и c. А отсюда следует, что все выводы, которые были сделаны выше для приведенного уравнения, остаются в силе и для уравнения общего вида. Во всех выводах нужно только буквы p и q заменить буквами b и c.

Пример 3.

$$2x^2 - 7x + 11 = 0.$$

Так как $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11 = -39 < 0$, то уравнение не имеет решений.

Пример 4.

$$3x^2 + 8x - 4 = 0.$$

Так как $D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 112 > 0$, то уравнение имеет два корня.

$c = -4 < 0$. Корни имеют разные знаки.

$-b = -8 < 0$. Отрицательный корень имеет большую абсолютную величину.

§ 50. Биквадратные уравнения.

Определение. **Уравнение четвертой степени называется биквадратным, если неизвестное входит в него только в четных степенях.**

Общий вид биквадратного уравнения:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{1}$$

где a, b и c — любые действительные числа ($a \neq 0$). Это уравнение можно записать так:

$$a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0. \tag{2}$$

Будем искать сначала квадрат неизвестного, обозначив

$$x^2 = y. \tag{3}$$

Подставив y вместо x^2 в уравнение (2), будем иметь:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно y. Решим его (при условии, что $D \geqslant 0$).

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Из (3) получаем:

$$x^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

и

$$x^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5}$$

Получили два неполных квадратных уравнения. Решение их зависит от значений, которые были получены для y, то есть для x^2. Здесь могут быть три случая.

1) Оба значения y положительны. Тогда оба уравнения (4) и (5) имеют по два корня, а значит, уравнение (1) имеет четыре корня:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \tag{6}$$

Все четыре корня можно записать одной формулой

$$x_{1-4} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \tag{7}$$

Пример 1.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Положив $x^2 = y$, после подстановки будем иметь:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

$D = 13^2 - 144 = 25 > 0$. Уравнение имеет решения. Находим: $y_1 = 9$; $y_2 = 4$.

Получили два уравнения:

$$x^2 = 9 \text{ и } x^2 = 4,$$

решив которые, найдем:

$$x_1 = 3;\ x_2 = -3;\ x_3 = 2;\ x_4 = -2.$$

Те же решения мы нашли бы, подставив значения $a = 1$, $b = -13$, $c = 36$ в формулы (6) или (7).

2) Одно из значений y положительно, другое отрицательно. Тогда уравнение (4) имеет два решения, а уравнение (5) не имеет решений. Значит уравнение (1) имеет два решения:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Пример 2.

$$x^4 - x^2 - 20 = 0.$$

После подстановки $x^2 = y$ получим уравнение

$$y^2 - y - 20 = 0.$$

Так как $q = -20 < 0$, то уравнение имеет решения.

Получим:

$$y_1 = 5; \quad y_2 = -4.$$

Из уравнений

$$x^2 = 5 \quad \text{и} \quad x^2 = -4$$

имеет решения только первое: $x = \pm\sqrt{5}$.

3) Оба значения y отрицательны. Уравнение (1) не имеет решений.

Пример 3.

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0.$$

Имеем:

$$y^2 + 10y + 9 = 0; \quad D = 5^2 - 9 = 16 > 0.$$

Получим:

$$y_1 = -1; \quad y_2 = -9.$$

Уравнения $x^2 = -1$ и $x^2 = -9$, а следовательно, и данное уравнение не имеют решений.

§ 51. Иррациональные уравнения.

Задача. *Периметр прямоугольного треугольника равен* 30 *см, а гипотенуза равна* 13 *см. Найти катеты.*

Решение. Пусть один из катетов равен x сантиметрам. По гипотенузе и катету, пользуясь теоремой Пифагора, можно определить другой катет. Он будет равен $\sqrt{13^2 - x^2}$.

По условию:

$$13 + x + \sqrt{13^2 - x^2} = 30. \qquad (1)$$

Получили уравнение, в котором неизвестное находится под знаком корня. Такое уравнение называется иррациональным.

Определение. **Если в уравнении неизвестное входит в какое-либо выражение, стоящее под знаком корня, то уравнение называется иррациональным.**

Чтобы решить такое уравнение, надо предварительно привести его к рациональному виду. Решим таким путем уравнение (1).

Оставим в левой части уравнения только выражение, содержащее радикал (говорят: уединим радикал), а все остальное выражение перенесем в правую часть. Получим:

$$\sqrt{13^2 - x^2} = 30 - 13 - x,$$

или

$$\sqrt{169 - x^2} = 17 - x. \qquad (2)$$

Возведем обе части уравнения (2) в квадрат:

$$169 - x^2 = 289 - 34x + x^2. \qquad (3)$$

Получили рациональное уравнение.

Мы только пока не знаем, является ли уравнение (3) равносильным уравнению (1). Решим его.

$$2x^2 - 34x + 120 = 0,$$

или

$$x^2 - 17x + 60 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 12; \quad x_2 = 5.$$

Подставив оба найденные значения x в уравнение (1), убедимся, что оба они ему удовлетворяют. Значит: 1) один катет равен 12 *см*, тогда другой катет равен 30—13—12 = 5 (*см*); 2) один катет равен 5 *см*, тогда другой катет равен 30 — 13—5 = 12 (*см*).

Легко видеть, что по существу оба решения дают один и тот же треугольник.

Пример 1.

$$\sqrt{x-6} = 4.$$

Отсюда

$$x - 6 = 16; \quad x = 22.$$

Подстановкой убеждаемся, что $x = 22$ удовлетворяет данному уравнению.

Пример 2.

$$\sqrt{x-17} = 9 - x.$$

Не решая этого уравнения, можем установить, что оно не имеет решений.

Действительно, левая часть уравнения требует, чтобы x был не менее 17, а правая — чтобы x был не более 9 (так как $\sqrt{x-17}$ не может быть отрицательным числом). Очевидно, не существует такого значения x, которое удовлетворяло бы одновременно обоим этим условиям.

Пример 3.

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 14x - 16} - x + 1 = 0.$$

Уединим радикал:

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 14x - 16} = x - 1.$$

Возводим обе части этого уравнения в куб:

$$x^3 + x^2 - 14x - 16 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

Отсюда

$$4x^2 - 17x - 15 = 0;$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -\frac{3}{4}.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Пример 4.

$$\sqrt{5-x}=x+1;$$

$$5-x=x^2+2x+1;$$

$$x^2+3x-4=0;$$

$$x_1=1; \quad x_2=-4.$$

Подстановкой убеждаемся, что данному уравнению удовлетворяет лишь корень $x_1=1$. Корень $x_2=-4$ посторонний (в правой части получается отрицательное число).

Пример 5.

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1.$$

Желая освободиться от радикала $2x-4$, уединим его.

$$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}.$$

Теперь возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5,$$

что дает

$$x-10=2\sqrt{x+5}.$$

Наконец, освободим и последнее уравнение от радикала посредством вторичного возведения его в квадрат:

$$x^2-20x+100=4x+20,$$

или

$$x^2-24x+80=0.$$

Решаем это уравнение.

$$x=12\pm\sqrt{144-80}=12\pm\sqrt{64}=12\pm 8;$$

$$x_1=12+8=20; \quad x_2=12-8=4.$$

Подстановкой убеждаемся, что данное уравнение удовлетворяется только числом 20, а число 4 ему не удовлетворяет.

Пример 6.

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-2}+1=0.$$

Не решая этого уравнения, можем утверждать, что оно решений не имеет, так как сумма двух положительных чисел ($x\geqslant 2$) и одного неотрицательного $\left(\sqrt{x-2}\right)$ не может быть равной нулю.

Пример 7.

$$\sqrt{x-\sqrt{x}}=2\sqrt{3}. \qquad (1)$$

Возводим обе части уравнения в квадрат:

$$x-\sqrt{x}=12.$$

Далее:

$$x-12=\sqrt{x}; \qquad (2)$$

$$x^2-24x+144=x;$$

$$x^2-25x+144=0. \qquad (3)$$

Решив полученное уравнение, найдем: $x_1=16$; $x_2=9$.

Подстановкой убеждаемся, что первый корень удовлетворяет данному уравнению, а второй является посторонним.

§ 52. О равносильности уравнений.

При изучении уравнений первой степени мы уже встречались с понятием равносильности уравнений. Там давалось такое определение: два уравнения называются равносильными, если каждое из них имеет те же корни, что и другое.

Там же приводились два положения, устанавливающие, при каких преобразованиях данного уравнения полученное новое уравнение будет равносильно первоначальному. Напомним эти положения.

1. Если к обеим частям уравнения прибавим одно и то же число или многочлен от неизвестного, то новое уравнение будет равносильно первоначальному.

2. Если обе части уравнения умножим на одно и то же число или алгебраическое выражение, не равное нулю и не содержащее неизвестного, то новое уравнение будет равносильно первоначальному.

Покажем на примере, почему нельзя обе части уравнения умножить на нуль. Пусть имеем уравнение:

$$x-2=4,$$

корень которого $x=6$. Умножив обе части его на нуль, получим:

$$0\cdot(x-2)=0.$$

Ясно, что при любом значении x левая часть полученного уравнения будет равна нулю. Значит, этому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестного, а данному уравнению только $x=6$. Уравнения неравносильны.

Рассмотрим теперь подробнее, почему в положении 2 сделана оговорка относительно выражений, содержащих неизвестное.

Пусть дано уравнение:

$$x-5=0,$$

корень которого $x=5$. Умножим обе части этого уравнения на $x-3$. Получим:

$$(x-5)(x-3)=0\cdot(x-3),$$

то есть

$(x-5)(x-3)=0$ (так как выражение $0\cdot(x-3)$ равно нулю при любом x).

Значит, для того чтобы полученное равенство было справедливо, необходимо, чтобы было или $x-5=0$, откуда $x=5$,
или $x-3=0$, откуда $x=3$.

Мы видим, что уравнению $(x-5)(x-3)=0$ удовлетворяет, во-первых, корень данного уравнения и, во-вторых, корень $x=3$ уравнения $x-3=0$, которое мы получим, приравняв нулю множитель $x-3$. Но $x=3$ не удовлетворяет данному уравнению.

Пусть вообще дано уравнение

$$A=B \tag{1}$$

(для краткости каждую часть уравнения мы обозначили одной буквой). Умножим обе его части на некоторое выражение M, содержащее неизвестное. Получим

$$AM=BM, \tag{2}$$

или

$$(A-B)M=0. \tag{3}$$

Отсюда видим, что решениями уравнения (3) являются: во-первых, все решения уравнения (1): $A-B=0$ и, кроме того, решения уравнения $M=0$, если они имеются и не равны корням уравнения (1). В этом случае уравнение (2) будет неравносильно уравнению (1).

Если же множитель M не имеет корней, или они равны корням уравнения (1), то уравнение (2) будет равносильно уравнению (1).

Теперь мы можем объяснить и случаи появления посторонних корней в примерах 4,5 и 7 предыдущего параграфа. В этих примерах для освобождения уравнения от радикалов мы возводили в квадрат обе его части. Как изменилось при этом данное уравнение?

Рассмотрим вопрос сначала в общем виде:

Пусть опять дано уравнение (1):

$$A=B,$$

где буквами A и B для краткости обозначены левая и правая части уравнения.

Возведя обе его части в квадрат, получим:

$$A^2=B^2, \tag{4}$$

или

$$A^2-B^2=0, \text{ то есть } (A-B)(A+B)=0. \tag{5}$$

Уравнение (1) можно представить в виде:

$$A-B=0. \tag{6}$$

Отсюда видим, что, возводя уравнение (1) в квадрат, мы фактически умножали его на $A+B$, то есть на выражение, содержащее неизвестное. Значит, если уравнение $A+B=0$ имеет корни, то они будут удовлетворять уравнению (5) и могут не удовлетворять (1). Уравнение (5) в этом случае неравносильно (1).

Возьмем пример 4 из § 51.

$$\sqrt{5-x}=x+1.$$

Возведем обе части в квадрат.

$$\left(\sqrt{5-x}\right)^2=(x+1)^2.$$

Отсюда

$$\left(\sqrt{5-x}\right)^2-(x+1)^2=0$$

$$\left(\sqrt{5-x}-x-1\right)\left(\sqrt{5-x}+x+1\right)=0.$$

Первый множитель — данное уравнение.

Подстановкой убедимся, что корень $x=-4$, полученный при решении уравнения $\left(\sqrt{5-x}\right)^2-(x+1)^2=0$, удовлетворяет уравнению $\sqrt{5-x}+x+1=0$, но не удовлетворяет данному уравнению.

Рассмотрим теперь появление посторонних корней с точки зрения допустимых значений неизвестного в заданных уравнениях.

Рассмотрим опять пример 4 из § 51.

$$\sqrt{5-x}=x+1.$$

Так как корень всегда берется арифметический, то $x+1$ не может быть отрицательным числом. Для данного уравнения допустимыми являются лишь значения $x>-1$. В уравнении $x^2+3x-4=0$, которое было получено после освобождения от радикала, для x допустимыми являются любые значения. Корень $x=-4$ принадлежит множеству допустимых значений для уравнения $x^2+3x-4=0$, но не является допустимым для данного уравнения.

П р и м е р 5 из § 51.

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1. \qquad (1)$$

По освобождении от первого радикала было получено уравнение

$$x-10=2\sqrt{x+5}, \qquad (2)$$

а после освобождения от второго радикала уравнение

$$x^2-24x+80=0. \qquad (3)$$

Легко видеть, что в уравнении (2) допустимыми значениями являются $x\geqslant 10$, а в (3) — любые значения x. Корень $x=4$ не является допустимым для уравнения (2), но является допустимым для уравнения (3).

Точно так же найдем, что в примере 7 § 51 для уравнения (2) допустимыми являются значения $x\geqslant 12$, а для уравнения (3) любые.

Итак, во всех трех случаях оказалось, что при освобождении от радикалов получалось расширенное множество допустимых значений для неизвестного. Посторонние корни входили в это расширенное множество, но не входили в первоначальное и, следовательно, не удовлетворяли данному уравнению.

§ 53. Краткие исторические сведения.

Квадратные уравнения и способы их решения были известны в глубокой древности. Так еще за две тысячи лет до нашей эры задачи измерения земельных участков приводили древних вавилонян к решению квадратных уравнений.

В древней Греции (Пифагор, Евклид) квадратные уравнения решались геометрическим способом.

Знаменитый узбекский математик Аль-Хорезми (ч. I, § 71) решал квадратные уравнения как алгебраическим, так и геометрическим способом.

Так как общая формула решения квадратных уравнений тогда еще не была выведена, то Аль-Хорезми приводит решения шести различных видов квадратных уравнений, например:

1. Один квадрат равен корням ($x^2 = ax$).
2. Один квадрат и корни равны числу ($x^2 + ax = b$).
3. Один квадрат и число равны корням ($x^2 + a = bx$).

И т. д.

Приведем примеры решений Аль-Хорезми обоими способами:

$$x^2 + 21 = 10x. \qquad (1)$$

1. Раздели число корней пополам: $10:2 = 5$.
2. Умножь это число на самого себя: $5 \cdot 5 = 25$.
3. Вычти из него число: $25 - 21 = 4$.
4. Извлеки квадратный корень: $\sqrt{4} = 2$.
5. Этот корень прибавь к половине корней или вычти из нее: $5 + 2 = 7$; $5 - 2 = 3$.

Если записать все проведенные действия одной формулой, то получим:

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}.$$

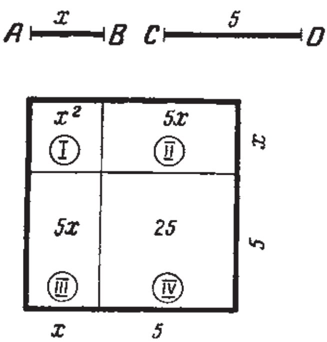
Как видим, решение Аль-Хорезми полностью совпадает с современным решением по формуле.

Приведем пример геометрического решения.

$$x^2 + 10x = 39. \qquad (2)$$

Пусть отрезок AB (черт. 16) равен x, а отрезок $CD = 5$.

Строим квадрат со стороной, равной $AB + CD$, то есть равной $x + 5$, и разбиваем его на четыре участка, как показано на чертеже.



Черт. 16.

Площадь квадрата равна $(x + 5)^2$. С другой стороны площадь участков I, II и III равна по условию 39, площадь IV равна 25. Значит, площадь всего квадрата равна $39 + 25 = 64$. Отсюда имеем:

$$(x + 5)^2 = 64; \quad x + 5 = 8, \quad x = 3.$$

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, имеются в старинных китайских и индийских математических трактатах.

Приведем задачу из сочинения индийского математика Бхаскары.

Стая обезьян забавлялась; квадрат одной восьмой части их резвился в лесу; остальные двенадцать кричали на вершине холма. Скажи мне: сколько было всех обезьян?

ГЛАВА VI.

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ.

§ 54. Переменные величины.

Если надувать детский воздушный шар, то будут увеличиваться его диаметр, поверхность и объем, будет уменьшаться толщина его оболочки; вес же этой оболочки остается неизменным.

Если наблюдать движение поезда от одной станции к другой, то также легко заметить, что некоторые величины, участвующие в движении поезда, изменяются, например: расстояние поезда от станции, запасы топлива и воды. Другие величины остаются неизменными, например: число вагонов, колес и пр.

То же можно наблюдать и во всяком другом процессе. Одни величины в течение всего процесса сохраняют одно и то же значение; такие величины называются постоянными. Другие же увеличиваются или уменьшаются, то есть принимают различные значения; такие величины называются переменными.

Определение. **Величины, которые в течение рассматриваемого процесса изменяют свое численное значение, называются переменными.**

Величины, численное значение которых остается неизменным, называются постоянными.

Одна и та же величина, рассматриваемая в двух различных процессах, может в одном случае оставаться постоянной, в другом переменной. Приведем примеры.

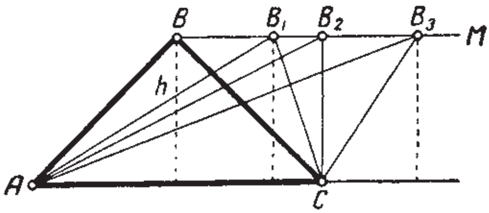
1. Пусть дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC (черт. 17). Через вершину B прямого угла проведем вправо прямую BM, параллельную гипотенузе AC. Будем перемещать вершину B по прямой BM. Треугольник будет последовательно занимать положения AB_1C, AB_2C,

Какие элементы треугольника будут при этом оставаться постоянными и какие будут принимать различные значения?

Легко проследить, что будут сохранять неизменной свою величину: основание AC; высота h, опущенная из вершины B; площадь треугольника $\left(\text{так как она равна } \frac{AC \cdot h}{2}\right)$.

Напротив, будут изменять свою величину: боковые стороны AB и BC; угол при вершине B; углы при основании AC.

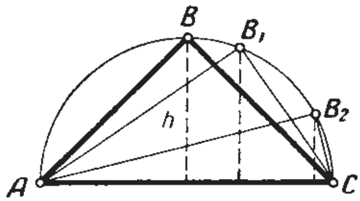
Следовательно, в рассматриваемых условиях первые три величины являются постоянными, а пять последних переменными.



Черт. 17.

2. Около того же прямоугольного треугольника ABC опишем окружность (гипотенуза AC будет диаметром этой окружности). Будем теперь перемещать вершину B по окружности в направлении к вершине C (черт. 18). Легко убедимся, что при этом остаются неизменными по величине: основание AC; угол B (как вписанный опирающийся все время на полуокружность и, следовательно, равный 90°).

Напротив, являются величинами переменными: высота h, опущенная из вершины B; площадь треугольника (так как изменяется высота при неизменном основании); боковые стороны AB и BC; углы A и C при основании.



Черт. 18.

Итак, мы видим, что в двух описанных процессах одна и та же величина AC (основание) остается постоянной в обоих случаях; высота и площадь являются постоянными в первом случае и переменными во втором; угол B является переменной в первом случае и постоянной во втором; боковые стороны и углы при основании в обоих случаях являются переменными.

Обычно входящие в формулу постоянные величины обозначаются первыми буквами алфавита: a, b, c, k, ..., а переменные последними: x, y, z, Конечно, это условие не является обязательным и соблюдается не всегда.

§ 55. Понятие о функциональной зависимости.

Несколько учеников покупают в магазине одинаковые тетради. Одна тетрадь стоит 20 коп. Если один ученик купил 3 тетради, а другой 5, то и уплата их за покупку будет различна: первый заплатит 60 коп., второй 1 руб. Мы здесь имеем дело с тремя величинами: ценой тетради, числом купленных тетрадей и стоимостью всей покупки. Из этих трех величин первая (цена одной тетради) является постоянной, а две остальные переменными, они принимают различные значения.

При этом каждому значению одной величины — числу купленных тетрадей, соответствует определенное значение другой — стоимость всех купленных тетрадей.

Это соответствие видно из следующей таблицы:

Число тетрадей	1	2	3	4	5	6	7
Стоимость в копейках	20	40	60	80	100	120	140

Определение. **Если две переменные величины связаны между собой так, что каждому значению одной из них соответствует определенное значение другой, то говорят, что между этими переменными существует функциональная зависимость.**

Значит, между числом купленных тетрадей и их стоимостью существует функциональная зависимость.

Приведем еще примеры величин, находящихся друг с другом в функциональной зависимости.

1. Время движения и путь, пройденный за это время.
2. Рост человека и его возраст.
3. Вес тела и его расстояние от центра земли.
4. Время суток и температура воздуха.
5. Площадь посева и размер снятого урожая.

§ 56. Аргумент и функция.

Вернемся снова к покупке тетрадей, о которой говорилось в § 55. Мы видели, что в этом процессе участвуют две переменные величины: число купленных тетрадей и их стоимость. Но легко видеть, что эти две величины играют в процессе покупки неодинаковую роль.

Количество тетрадей устанавливает сам ученик; эта величина может принимать произвольные значения: 3; 5; 8 и т. д. (Конечно, эти значения должны быть допустимыми; нельзя купить $2\frac{1}{2}$ или -3 тетради).

Значение же другой переменной величины — стоимости покупки, будет уже зависеть от значения первой, от числа купленных тетрадей.

Точно также, если мы будем произвольно изменять длину стороны квадрата, то уже в зависимости от этого будет изменяться и его площадь.

Определение 1. **Если две переменные находятся в функциональной зависимости, то та из них, которая может принимать произвольные (допустимые) значения, называется независимой переменной или аргументом.**

Другая переменная, значения которой зависят от значений аргумента, называется зависимой переменной, или функцией этого аргумента.

Значит, сумма денег, уплаченная за тетради, является функцией их количества.

Площадь квадрата — функция длины его стороны.

В § 48, рассматривая трехчлен ax^2+bx+c, мы назвали букву x аргументом. Теперь это название понятно. Как было указано, мы давали букве x произвольные числовые значения, а значения трехчлена зависели от этих значений x.

Если задать вопрос, какие же именно произвольные значения может принимать аргумент, то ответ будет различен в зависимости от особенностей рассматриваемого процесса.

Так, длина стороны квадрата может принимать любые положительные значения. Количество купленных тетрадей может выражаться только натуральным числом.

Определение 2. **Множество значений, которые может принимать аргумент, называется областью определения функции.**

Таким образом, площадь квадрата — функция, которая определена на множестве действительных положительных чисел. Стоимость купленных тетрадей — функция, которая определена на множестве натуральных чисел.

Заметим, что если существует функциональная зависимость между двумя переменными, то каждая из них по тем или иным мотивам может быть принята за аргумент, а другая будет функцией этого аргумента.

Возьмем опять пример с покупкой тетрадей.

Пусть у одного ученика было 40 коп., у другого 80 коп., у третьего 1 руб. и т. д. Поставим вопрос: сколько каждый из них может купить тетрадей, если одна тетрадь стоит 20 коп.? Очевидно, ответ на этот вопрос зависит от величины суммы, имеющейся у ученика. Здесь количество купленных тетрадей является уже функцией суммы денег, что можно изобразить таблицей:

Сумма денег	40	60	80	100	120
Количество тетрадей	2	3	4	5	6

Точно также двояко можно рассматривать зависимость между длиной стороны квадрата и величиной его площади.

В приведенном выше примере длина стороны являлась аргументом, а величина площади — его функцией.

Пусть требуется отмерить квадратные участки земли различной площади. Тогда длина стороны квадрата зависит от величины заданной площади. Эта величина будет аргументом, а длина стороны ее функцией.

Таким образом, разделение переменных, находящихся в функциональной зависимости является относительным. В зависимости от условий каждая из них может служить аргументом, а другая его функцией.

§ 57. Способы задания функции.

Из предыдущего § 56 следует, что основным признаком функциональной зависимости между двумя переменными величинами является наличие соответствия между значениями этих величин: каждому допустимому значению одной из них соответствует вполне определенное значение другой.

Как только такое соответствие установлено, то говорят, что задана функция.

Это соответствие может быть установлено различными способами. Рассмотрим некоторые из них.

1. Табличный способ. Всего проще установить соответствие между значениями двух переменных так: указать значения аргумента и для каждого из них указать соответствующее значение функции. Такой способ задания функции называется *табличным*.

Пример. В § 1 были приведены квадраты натуральных чисел от 11 до 19. Здесь мы имеем табличное задание функции: значения аргумента — натуральные числа от 11 до 19; значения функции — квадраты этих чисел.

Вообще всякие таблицы, как например таблицы кубов чисел, квадратных корней, таблицы синусов и др., являются не чем иным, как табличным заданием функции. Так в таблице синусов аргументом является угол, а функцией его синус. Каждому данному в таблице значению угла соответствует в той же таблице определенное значение его синуса.

2. Графический способ. Табличное задание функции неудобно тем, что дает значения функции только для тех значений аргумента, которые приведены в таблице.

Так, например, в таблице квадратов чисел от 11 до 19 (§ 1) мы уже не найдем квадрат числа 2,5.

Если надо иметь значения функции для любых значений аргумента (в тех или иных границах) и если при этом не требуется для значений функции большой точности, то в этих случаях часто применяется *графический* способ.

Он заключается в том, что каждое значение аргумента отмечается в системе координат точкой на оси абсцисс, а соответствующее ему значение функции — длиной перпендикуляра, проведенного к оси абсцисс из этой точки. При всевозможных изменениях абсциссы (то есть аргумента) концы перпендикуляров образуют некоторую линию, которая называется *графиком* данной функции. Дав аргументу определенное значение, восстанавливаем в соответствующей точке оси абсцисс перпендикуляр к ней. Ордината точки пересечения с графиком и дает соответствующее значение функции.

Пример. В § 1 был дан график уравнения $y=x^2$. Здесь любое действительное число является значением аргумента, а соответствующее значение ординаты является функцией этого аргумента, именно его квадратом.

3. Аналитический способ. Функция может быть задана формулой, показывающей — как по данному значению аргумента вычислить соответствующее значение функции. Такой способ задания функции называется аналитическим.

Пример. Функция $y=x^2$ показывает, как для каждого значения аргумента x вычислить соответствующее значение функции — квадрата этого аргумента.

Из приведенных примеров заключаем, что одна и та же функция (в данном случае квадрат числа) может быть задана различными способами. Обычно выбирается тот способ, который для данного случая наиболее удобен.

Существуют и другие способы задания функции.

Выше (§ 54) было сказано, что переменные величины принято обозначать последними буквами латинского алфавита — x, y, z, ... При этом обычно аргумент обозначают буквой x, а функцию буквой y. Такое обозначение связано с тем, что при графическом изображении функциональной зависимости значения аргумента отсчитываются по оси абсцисс (оси „иксов"), а соответствующие значения функции — по оси ординат (оси „игреков"). Выше это показано на примере графика функции $y=x^2$.

Понятие о взаимно-обратных функциях.

Возьмем опять функцию

$$y=x^2. \tag{1}$$

Здесь x является аргументом, y функцией.

Для любого заданного значения x мы найдем соответствующее значение y. Поставим обратную задачу: как по данному значению y найти соответствующее значение x. Из (1) имеем:

$$x=\sqrt{y}. \tag{2}$$

Эта формула позволяет для любого (допустимого) значения y определить соответствующее значение x. Здесь уже y является аргументом, а x его функцией. Функции (1) и (2) называются взаимно-обратными.

Как было сказано выше, принято аргумент обозначать через x, а функцию через y. Поэтому функцию (2) мы можем записать так:

$$y=\sqrt{x}. \tag{3}$$

Функция (3) также является обратной по отношению к функции (1). В § 10 мы видели, что графики функций (1) и (2) симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Значит, график любой из них можно получить, повернув вокруг биссектрисы первого координатного угла график обратной функции.

Точно также (§ 26) функции $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$ являются взаимно-обратными, и графики их симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла.

§ 58. Функция $y=kx$.

В первой части этого курса было дано определение прямо пропорциональной зависимости между двумя величинами. Она выражалась уравнением:

$$y=kx, \tag{1}$$

где k — определенное действительное число, не равное нулю.

При любом данном k значение y зависит от значения x. Следовательно, мы можем считать x аргументом, а y функцией этого аргумента.

В § 75 ч. 1 путем построения нескольких точек было показано, что графиком уравнения или, как будем теперь говорить, функции $y=kx$ является прямая. Докажем теперь это положение.

Теорема. ***Графиком функции $y=kx$ является прямая, проходящая через начало координат.***

Доказательство. Построим две точки графика. Положим $x=0$. Тогда из (1) находим $y=0$. Значит точка $O(0; 0)$ принадлежит графику, то есть график проходит через начало координат.

Положим $x=1$. Тогда из (1) получим $y=k$. Значит, график проходит через точку $A(1; k)$. Построим эту точку. Она будет лежать выше оси абсцисс, если $k>0$ (на черт. 19 $k=2$), и ниже этой оси, если $k<0$ (на черт. 20 $k=-2$).

Проведем через точки O и A прямую и докажем, что эта прямая является графиком функции $y=kx$.

Доказательство разобьем на две части.

1) Докажем, что все точки прямой OA принадлежат графику функции $y=kx$.

2) Докажем, что никакая другая точка плоскости не принадлежит графику функции $y=kx$.

Для доказательства первого положения достаточно показать, что координаты любой точки прямой OA удовлетворяют уравнению $y=kx$.

Возьмем на прямой OA (черт. 19) произвольную точку $B(m; n)$. Треугольники OMA и ONB подобны, так как имеют по прямому углу и угол AOM у них общий. Из подобия их заключаем:

$$\frac{BN}{ON}=\frac{AM}{OM}. \tag{2}$$

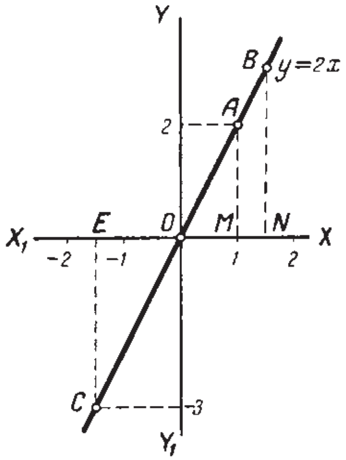
Но $BN = n$; $ON = m$; $AM = k$; $OM = 1$. Сделав подстановку в (2), получим:

$$\frac{n}{m} = \frac{k}{1}.$$

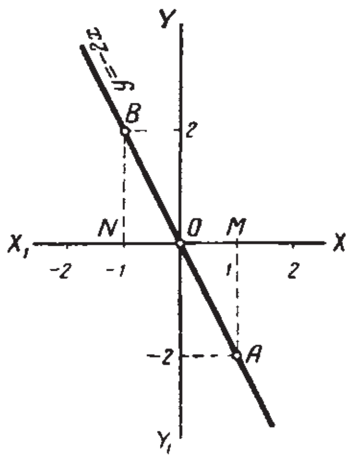
Отсюда

$$n = km. \tag{3}$$

Равенство (3) показывает, что координаты точки $B(m; n)$ удовлетворяют уравнению (1), и, следовательно, эта точка принадлежит графику функции $y = kx$.



Черт. 19.



Черт. 20.

Мы взяли на прямой OA точку B, лежащую выше оси абсцисс. Возьмем теперь на этой же прямой точку C, лежащую ниже оси абсцисс (черт. 19).

Пусть ее координаты равны p и q.

Из подобия треугольников OMA и OEC находим:

$$\frac{EC}{EO} = \frac{AM}{OM} = \frac{k}{1}. \tag{4}$$

Координаты p и q здесь отрицательные числа.

Следовательно, длина EO равна положительному числу $-p$, а длина EC — положительному числу $-q$. Сделав подстановку в (4), получим:

$$\frac{-q}{-p} = \frac{k}{1}, \quad \text{или} \quad \frac{q}{p} = k, \; q = kp. \tag{5}$$

Равенство (5) показывает, что и точка $C(p; q)$ принадлежит графику.

Так как точки B и C на прямой OB мы брали произвольно, то отсюда следует, что любая точка прямой BC лежит на графике функции $y = kx$.

Докажем теперь второе положение: если точка не лежит на прямой OA, то она не принадлежит графику функции $y = kx$.

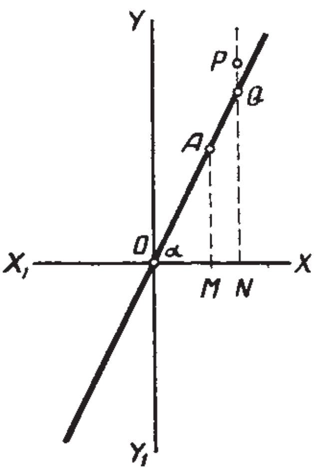
Для этого достаточно показать, что координаты любой точки, не лежащей на прямой OA, не удовлетворяют уравнению (1).

Возьмем произвольную точку P, лежащую выше прямой OA. Ордината этой точки пересечет прямую OA в некоторой точке Q (черт. 21).

Точка Q по доказанному принадлежит графику функции $y = kx$. Значит можем написать:

$$QN = k \cdot ON.$$

Но $PN > QN$; следовательно, $PN > k \cdot ON$. Это значит, что координаты точки P не удовлетворяют уравнению (1), и, следовательно, точка P не принадлежит графику функции $y = kx$.



Черт. 21.

Таким же способом докажем, что любая точка, лежащая ниже прямой OA, не принадлежит графику функции $y = kx$.

Итак, мы доказали, что все точки прямой OA и только эти точки принадлежат графику функции $y = kx$, то есть прямая OA является графиком функции $y = kx$.

Предлагается учащимся повторить все доказательство этой теоремы для чертежа 20 (при доказательстве учитывать знаки координат рассматриваемых точек).

Строя графики функции $y = kx$ при различных значениях k, легко заметить следующее:

1) Если $k > 0$, то обе координаты любой точки графика имеют одинаковые знаки: они или обе положительны, или обе отрицательны. Это значит, что прямая расположена в первом и третьем координатных углах (черт. 19). Если $k < 0$, то координаты любой точки графика имеют противоположные знаки. Это значит, что прямая расположена во втором и четвертом координатных углах (черт. 20).

2) Если $k > 0$, то из треугольника OAM (черт. 21) имеем

$$\frac{y}{x} = k = \operatorname{tg} \alpha,$$

то есть коэффициент k равен тангенсу угла, образуемого прямой OA с положительным направлением оси абсцисс (впоследствии убедимся, что это равенство справедливо и для прямой, изображенной на черт. 20).

Поэтому k называется угловым коэффициентом.

§ 59. Линейная функция.

В первой части курса (§ 77) рассматривалась линейная зависимость между двумя величинами. Она выражалась уравнением

$$y=kx+b, \tag{1}$$

где k и b — определенные действительные числа ($k \neq 0$).

При заданных k и b значение y зависит от значения x. Следовательно, мы можем считать x аргументом, а y его функцией. Функция такого вида называется линейной. Так как правая часть равенства (1) многочлен первой степени относительно x, то линейной функции можно дать такое определение.

Определение. **Многочлен первой степени относительно аргумента называется линейной функцией этого аргумента.**

Так как при $b=0$ функция примет вид $y=kx$, то рассмотренная в предыдущем параграфе функция является частным случаем линейной функции.

В § 77 первой части было показано построением, что графиком линейной функции является прямая. Докажем это.

Теорема. ***Графиком линейной функции является прямая.***

Доказательство. Построим сначала график (при $k=2$) функции

$$y=kx \tag{2}$$

(черт. 22). Дадим абсциссе x произвольное значение $x=a$. Тогда ордината точки графика функции (2) будет равна

$$y=ka, \tag{3}$$

а ордината точки графика функции (1) будет равна

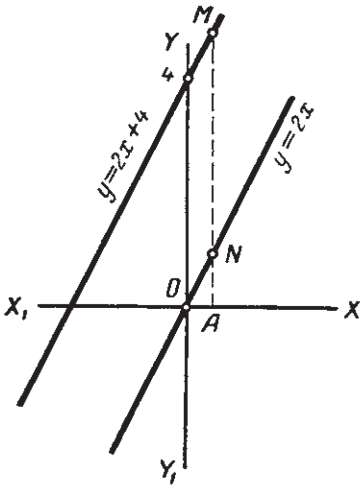
$$y=ka+b. \tag{4}$$

Так как абсциссу x мы взяли произвольно, то можем сказать, что ордината любой точки графика функции $y=kx+b$ равна значению b, сложенному с ординатой точки графика функции $y=kx$, имеющей ту же абсциссу.

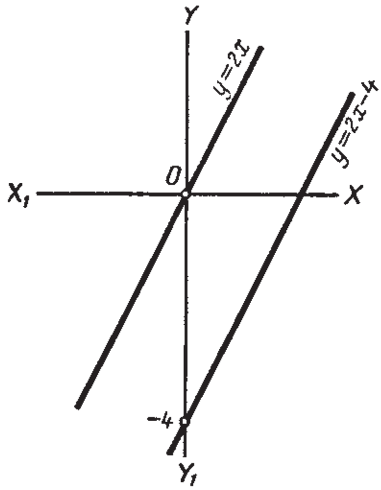
Установив это, легко построим график функции $y=kx+b$. Пусть $b>0$ (на черт. 22 $b=4$). Дадим x произвольное значение, например $x=0$. Тогда из (1) имеем:

$$y=k\ 0+b; \quad y=b.$$

Получили одну точку графика функции $y = kx + b$. Построим ее и проведем через нее прямую, параллельную графику функции $y = kx$. Эта прямая и будет графиком функции $y = kx + b$.

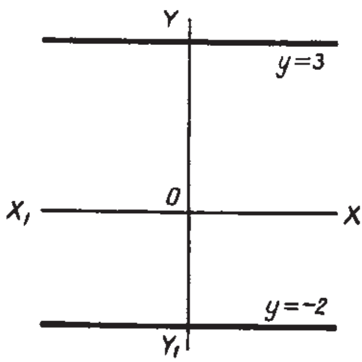


Черт. 22.



Черт. 23.

Действительно, ордината любой точки M этой прямой равна сумме $MN = b$ и NA — ординаты точки графика $y = kx$ с той же абсциссой. Значит, координаты любой точки этой прямой удовлетворяют уравнению (4).



Черт. 24.

С другой стороны, если координаты какой-либо точки удовлетворяют уравнению (4), то ордината $y = kx + b$ этой точки равна ординате kx соответствующей точки прямой плюс b. Значит, она лежит на прямой $y = kx + b$.

Если $b < 0$ (на черт. 23 $b = -4$), то графиком функции $y = kx + b$ будет прямая, лежащая ниже графика функции $y = kx$.

Рассмотрим некоторые частные случаи функции

$$y = kx + b.$$

1) Пусть $b = 0$. Тогда функция примет вид

$$y = kx.$$

Условие $b = 0$ показывает, что отрезок, отсекаемый графиком функции на оси ординат от ее начала, равен нулю, то есть прямая проходит через начало координат. Это мы и видели, рассматривая функцию $y = kx$ (§ 58).

2) Пусть $k = 0$, $b \neq 0$. Тогда функция $y = kx + b$ примет вид $y = b$.

Это равенство показывает, что при любом значении x ордината точки графика функции $y = b$ будет всегда равна b. Это значит, что все точки графика находятся на одном и том же расстоянии b от оси абсцисс. Другими словами, графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси абсцисс, и отстоящая от нее на расстояние, равное b. На чертеже 24 построены графики функций: $y = 3$ и $y = -2$.

3) Пусть $a = 0$ и $b = 0$. Функция $y = kx + b$ примет вид $y = 0$.

При любом значении x ордината $y = 0$. Очевидно, что этому условию удовлетворяют все точки оси абсцисс и только они. Значит, графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс.

§ 60. Трехчлен второй степени.

Общий вид трехчлена второй степени:

$$ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c — любые действительные числа ($a \neq 0$). Давая x любые значения, будем получать соответствующие значения трехчлена.

Значит, трехчлен является функцией аргумента x. Обозначим эту функцию через y:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{1}$$

Те значения аргумента, которые обращают его в нуль, называются **корнями** трехчлена. Чтобы найти эти корни, достаточно решить уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

Пример 1.

$$y = x^2 - 4x - 5. \tag{3}$$

Приведем таблицу значений этого трехчлена при некоторых значениях x.

x	-4	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	27	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16	27	40

Корнями трехчлена являются $x = -1$ и $x = 5$; мы могли найти их, решив уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Рассматривая таблицу, замечаем, что при увеличении значений x значения y сначала убывают, затем возрастают неограниченно. Покажем, что при $x = 2$ значение трехчлена $y = -9$ является наименьшим. Для этого представим трехчлен в таком виде:

$$y = (x - 2)^2 - 9.$$

Раскрыв скобки, убедимся, что это выражение тождественно с (3).

Отсюда видим, что при любом значении x, кроме $x=2$, значение y будет больше (-9), так как к (-9) прибавляется положительное число.

Значит, при $x=2$ y принимает наименьшее значение, равное (-9).

Пример 2.

$$y=-x^2+2x+8. \tag{4}$$

Составим таблицу:

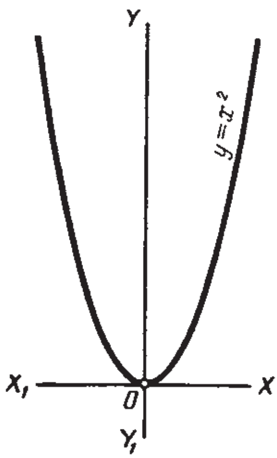
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-27	-16	-7	0	5	8	9	8	5	0	-7	-16	-27	-40

Таблица показывает, что при увеличении значений x значения трехчлена сначала увеличиваются, затем безгранично уменьшаются. Покажем, что при $x=1$ трехчлен имеет наибольшее значение. Запишем трехчлен в таком виде:

$$y=-(x-1)^2+9.$$

Отсюда видим, что при любом значении x, кроме $x=1$, значение y будет меньше 9 и только при $x=1$ оно будет равно 9, то есть будет наибольшим.

Построим теперь график трехчлена (1), начав с некоторых частных случаев.



Черт. 25.

§ 61. График функции $y=x^2$.

С графиком функции $y=x^2$ мы уже встречались (§ 1). Он представляет собой фигуру, называемую **параболой** (черт. 25). В дальнейшем для краткости вместо слов „парабола, изображающая функцию $y=x^2$“, будем говорить „парабола $y=x^2$“. При $x=0$ получим $y=0$. Кривая $y=x^2$ проходит через начало координат. В этой точке она касается оси абсцисс.

При изменении x от нуля до бесконечности значения y также увеличиваются от нуля до бесконечности; график образует ветвь, бесконечно удаляющуюся вверх и вправо.

Так как $(-x)^2=x^2$, то для каждых двух противоположных значений x получим одно и то же значение y. Следовательно, давая x отрицательные значения, получим вторую ветвь параболы, симметричную первой относительно оси ординат. Точка O, в которой парабола пересекается с осью симметрии, называется **вершиной** параболы. Значит, вершина параболы $y = x^2$ находится в точке $O(0; 0)$, то есть в начале координат.

§ 62. График функции $y = x^2 + n$.

Построим график функции

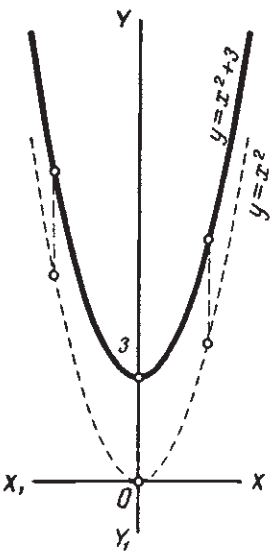
$$y = x^2 + 3. \tag{1}$$

Сравнивая эту функцию с функцией

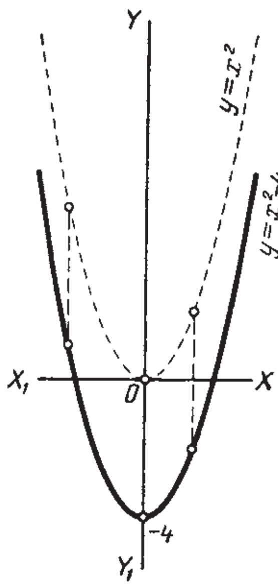
$$y = x^2, \tag{2}$$

замечаем, что при одном и том же значении x значение y в функции (1) будет на 3 больше значения y в функции (2). Например:

x	-5	-2	0	1	3	
x^2	25	4	0	1	9	49
x^2+3	28	7	3	4	12	52



Черт. 26.



Черт. 27.

Это значит, что каждая точка графика первой функции будет лежать на 3 единицы выше точки с той же абсциссой графика второй функции (черт. 26). Отсюда следует, что график функции (1) можно получить, передвинув на 3 единицы вверх в направлении оси ординат график функции (2).

Рассуждая таким же образом, можно показать, что график функции

$$y = x^2 - 4 \tag{3}$$

можно получить, передвинув график функции $y = x^2$ в направлении оси ординат на 4 единицы вниз (черт. 27).

Отсюда можно сделать общий вывод.

График функции $y = x^2 + n$ можно получить, передвинув график функции $y = x^2$ в направлении оси ординат на $|n|$ единиц (вверх, если $n > 0$; вниз, если $n < 0$).

Таким образом, графиком функции $y = x^2 + n$ является парабола, расположенная симметрично относительно оси ординат. Ее вершина находится в точке $(0; n)$.

§ 63. График функции $y = (x + m)^2$.

Построим график функции

$$y = (x + 3)^2. \tag{1}$$

Сравнивая эту функцию с функцией

$$y = x^2, \tag{2}$$

можно заметить, что при каком-либо значении $x = a$ функция (1) будет иметь то же значение, какое имеет функция (2) при $x = a + 3$.

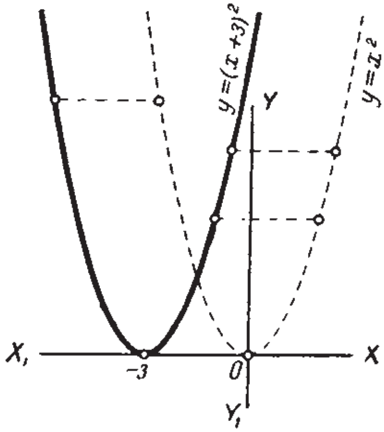
x	-8	-6	-4	-3	-1	1	4
$(x+3)^2$	25	9	1	0	4	16	49
x	-5	-3	-1	0	2	4	7
x^2	25	9	1	0	4	16	49

Это значит, что каждая точка графика первой функции лежит на 3 единицы левее точки графика второй функции с той же ординатой (черт. 28). Отсюда следует, что график функции (1) можно получить, передвинув на 3 единицы влево, то есть в направлении оси абсцисс, график функции (2).

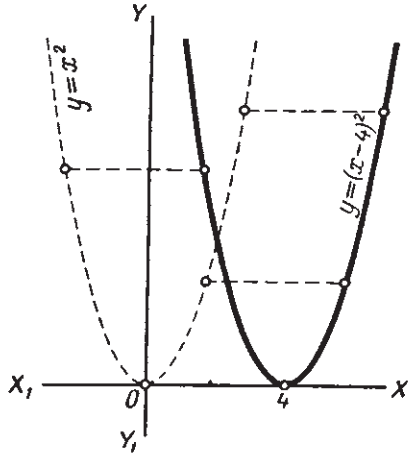
Рассуждая таким же образом, можно показать, что график функции

$$y=(x-4)^2$$

можно получить, передвинув график функции $y=x^2$ на 4 единицы вправо, в направлении оси абсцисс (черт. 29).



Черт. 28.



Черт. 29.

Отсюда можно сделать общий вывод.

График функции $y=(x+m)^2$ можно получить, передвинув график функции $y=x^2$ в направлении оси абсцисс на $|m|$ единиц (влево, если $m>0$; вправо, если $m<0$).

Таким образом, графиком функции $y=(x+m)^2$ является парабола, расположенная симметрично относительно прямой, параллельной оси ординат и отстоящей от нее на расстояние, равное $|m|$. Вершина параболы находится в точке $(-m; 0)$.

§ 64. График трехчлена $y=x^2+px+q$.

Построим график трехчлена.

$$y=x^2-8x+19. \tag{1}$$

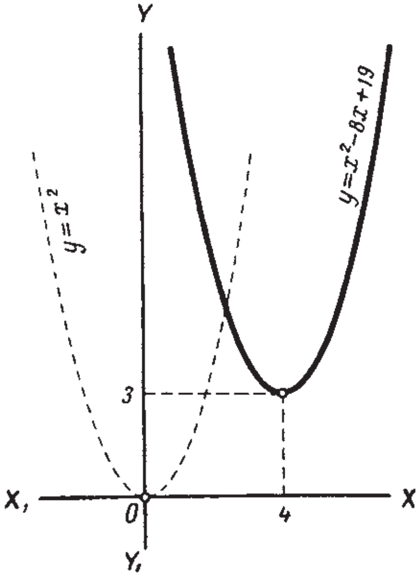
Сначала преобразуем этот трехчлен, выделив в нем квадрат двухчлена $x-4$:

$$y=(x-4)^2+3. \tag{2}$$

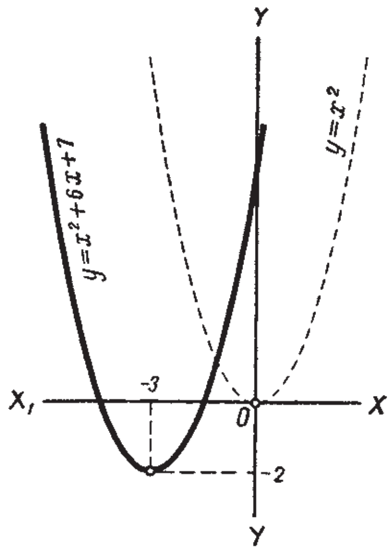
Видим, что график функции (2) можно получить, передвинув в направлении оси ординат вверх на 3 единицы график функции $y=(x-4)^2$ (§ 62).

Но график функции $y=(x-4)^2$ является графиком функции $y=x^2$, передвинутым в направлении оси абсцисс на 4 единицы вправо (§ 63).

Отсюда следует, что график функции (2) или, что то же, функции (1) можно получить, передвинув график функции $y=x^2$ на 4 единицы вправо и на 3 единицы вверх (черт. 30).



Черт. 30.



Черт. 31.

Рассуждая таким же образом, построим график трехчлена

$$y=x^2+6x+7. \tag{3}$$

Представив трехчлен в таком виде:

$$y=(x+3)^2-2, \tag{4}$$

заключаем, что график трехчлена (3) можно получить, передвинув график функции $y=x^2$ на 3 единицы влево и на 2 единицы вниз (черт. 31).

Точно так же, графиком трехчлена

$$y=x^2-5x-1,$$

который можно представить в таком виде:

$$y=x-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}-1,$$

или

$$y=\left(x-2\frac{1}{2}\right)^2-7\frac{1}{4},$$

является парабола $y=x^2$, передвинутая на $2\frac{1}{2}$ единицы вправо и на $7\frac{1}{4}$ единиц вниз.

Возьмем теперь трехчлен

$$y=x^2+px+q. \tag{5}$$

Его можно представить в таком виде:

$$y=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$

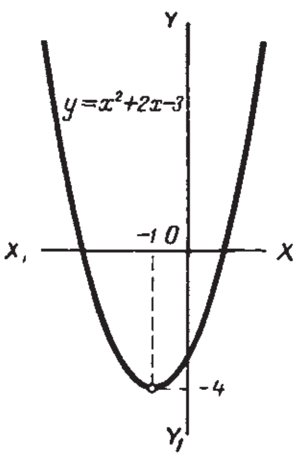
или

$$y=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}. \tag{6}$$

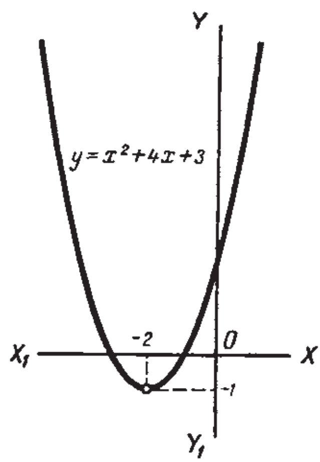
Отсюда заключаем.

***График трехчлена $y=x^2+px+q$ можно получить, передвинув график функции $y=x^2$ в направлении оси абсцисс* на $\left|\frac{p}{2}\right|$ *и в направлении оси ординат на* $\left|\frac{4q-p^2}{4}\right|$.**

Таким образом, графиком трехчлена $y=x^2+px+q$ является парабола $y=x^2$, расположенная симметрично относительно прямой,



Черт. 32.



Черт. 33.

параллельной оси ординат и отстоящей от нее на расстояние, равное $\left|\frac{p}{2}\right|$. Вершина параболы находится в точке $\left(-\frac{p}{2};\ \frac{4q-p^2}{4}\right)$

Пример 1.

$$y=x^2+2x-3.$$

Здесь $\frac{p}{2}=1$; $\frac{4q-p^2}{4}=-4$. Значит, графиком трехчлена является парабола $y=x^2$, передвинутая на 1 влево и на 4 вниз (черт. 32).

Пример 2.

$$y=x^2+4x+3.$$

Здесь $\frac{p}{2}=2$; $\frac{4q-p^2}{4}=-1$. График дан на чертеже 33.

§ 65. График трехчлена $y=ax^2+bx+c$.

Построим график трехчлена

$$y=2x^2+4x-6. \qquad (1)$$

Вынесем за скобку коэффициент при x^2

$$y=2(x^2+2x-3). \qquad (2)$$

Сравнивая эту функцию с функцией

$$y=x^2+2x-3, \qquad (3)$$

замечаем, что при одном и том же значении аргумента x значения y функции (1) будут в два раза больше значений функции (3). Например:

x	-5	-3	0	2	3	5
x^2+2x-3	12	0	-3	5	12	32
$2x^2+4x-6$	24	0	-6	10	24	64

Это значит, что ордината каждой точки графика функции (1) равна удвоенной ординате точки с той же абсциссой графика функции (3).

Отсюда следует, что график функции (1) можно получить так: построить график функции (3) (черт. 32) и удвоить ординату каждой точки его. Полученная кривая (черт. 34) и будет графиком функции (1). Эта кривая тоже называется параболой. По сравнению с параболой $y=x^2$ ветви ее более круто поднимаются вверх.

Рассуждая таким же образом, найдем, что график функции

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x+1\frac{1}{2},$$

или, что то же, функции

$$y=\frac{1}{2}(x^2+4x+3)$$

можно получить из графика функции $y=x^2+4x+3$ (черт. 33), уменьшив вдвое ординату каждой его точки (черт. 35).

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент при x^2 отрицателен.

Возьмем трехчлен

$$y = -2x^2 - 4x + 6, \tag{4}$$

который мы можем представить в таком виде:

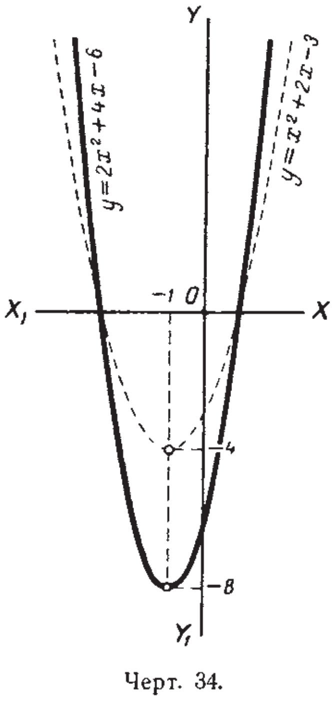
$$y = -(2x^2 + 4x - 6). \tag{5}$$

Сравним его с трехчленом (1):

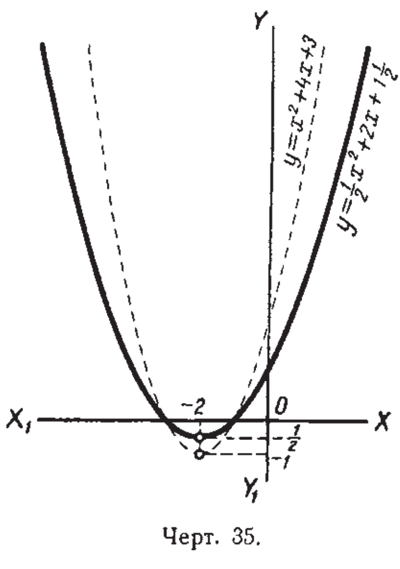
$$y = 2x^2 + 4x - 6. \tag{6}$$

Очевидно, что при любом значении x значения y в (5) и (6) будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. (Лишь при значениях x, равным корням трехчлена, обе функции будут равны нулю.)

Это значит, что точки графиков функций (5) и (6) с одной и той же абсциссой имеют противоположные ординаты, то есть расположены симметрично относительно оси абсцисс.



Черт. 34.



Черт. 35.

Отсюда следует, что и весь график трехчлена (5) будет симметричен с графиком трехчлена (6) относительно оси абсцисс.

Таким образом, график трехчлена $y = -2x^2 - 4x + 6$ можно получить, повернув график трехчлена $y = 2x^2 + 4x - 6$ на 180° вокруг оси абсцисс.

Рассуждения останутся совершенно теми же, если вместо трехчлена (4) взять любой другой трехчлен с отрицательным коэффициентом при x^2.

Значит, мы можем сделать общий вывод.

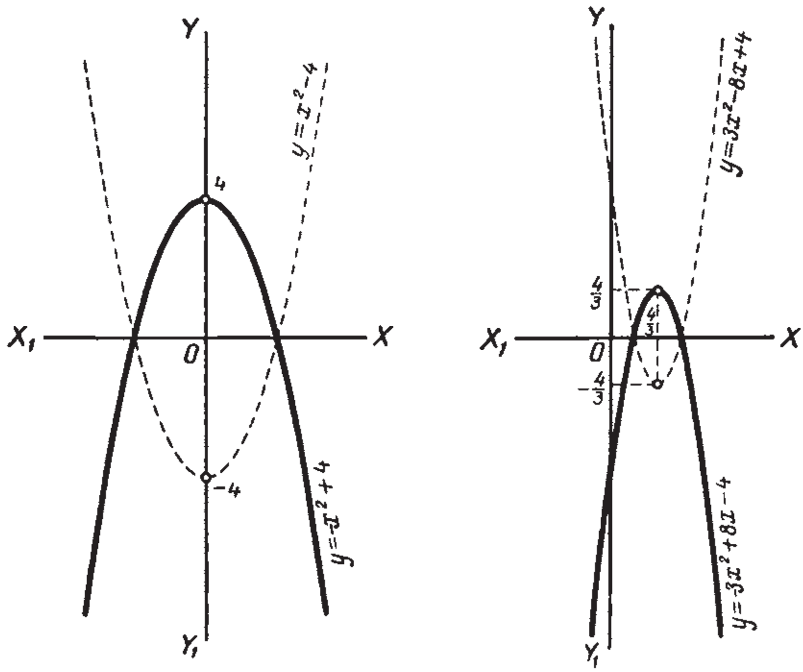
График трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, где $a < 0$, можно получить, повернув график трехчлена $y = -ax^2 - bx - c$ на 180° вокруг оси абсцисс.

Пример 1.

$$y = -x^2 + 4.$$

Строим график функции

$$y = x^2 - 4.$$



Черт. 36. Черт. 37.

Это будет парабола $y = x^2$, передвинутая на 4 единицы вниз. Повернув этот график на 180° вокруг оси абсцисс, получим график функции $y = -x^2 + 4$ (черт. 36, сравнить с черт. 27).

Пример 2.

$$y = -3x^2 + 8x - 4.$$

Строим график функции

$$y = 3x^2 - 8x + 4.$$

Эту функцию можно представить в таком виде:

$$y = 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}\right) = 3\left[\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right].$$

Значит, чтобы построить график функции $y = -3x^2 + 8x - 4$, нужно параболу $y = x^2$ передвинуть на $\frac{4}{9}$ единицы вниз и на $\frac{4}{3}$ вправо, затем увеличить ординаты всех точек в 3 раза. Полученный график повернуть на 180° вокруг оси абсцисс.

График данной функции изображен на чертеже 37.

ГЛАВА VII.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

§ 66. Уравнение второй степени с двумя неизвестными.

Если уравнение содержит несколько неизвестных, то степенью (или измерением) каждого члена называется сумма показателей при неизвестных, входящих в этот член. Наибольшая из этих сумм является и степенью самого уравнения.

Так, уравнение $x^3 - 3x^2y^2 + 5 = 0$ является уравнением четвертой степени.

Общий вид уравнения второй степени с двумя неизвестными следующий:

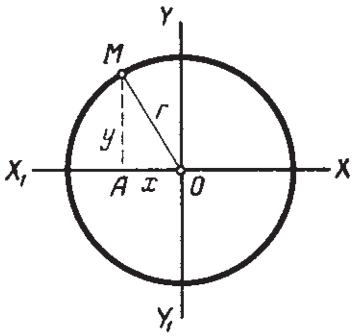
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \qquad (1)$$

Он содержит три члена второй степени, два первой и свободный член f.

Все коэффициенты могут принимать любые числовые значения. В частности, некоторые из них могут быть равны нулю. Например, в уравнении

$$x^2 - y^2 = 0$$

$a = 1$, $c = -1$, а все остальные коэффициенты равны нулю. Не могут только быть одновременно равны нулю все три первых коэффициента, a, b и c, так как тогда уравнение (1) было бы ниже второй степени.



Черт. 38.

В аналитической геометрии доказывается, что всякое уравнение второй степени с двумя неизвестными графически изображается одной из трех кривых — эллипсом (в частности окружностью), параболой, или гиперболой (лишь при некоторых частных значениях коэффициентов графиком уравнения (1) будут две прямые).

Так, например, графиком уравнения

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad (2)$$

будет окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 3 (черт. 38).

Действительно, взяв на этой окружности произвольную точку M с координатами x и y, из треугольника AMO получим:

$$AO^2 + MA^2 = r^2,$$

или

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Значит, координаты любой точки окружности удовлетворяют уравнению (2).

Легко показать, что координаты любой точки, не лежащей на окружности, уравнению (2) не удовлетворяют (построив координаты точки и соединив ее с началом координат, из получившегося треугольника найдем, что $x^2 + y^2 < r^2$ или $x^2 + y^2 > r^2$).

§ 67. Система двух уравнений, из которых одно второй и одно первой степени.

Задача. *Прямоугольный участок площадью* 1000 *м*^{2} *огорожен забором длиной* 130 *м. Определить длину и ширину участка.*

Решение. Пусть длина участка равна x метрам, ширина y метрам. Тогда площадь его будет равна xy *м*^{2}. По условию эта площадь равна 1000 *м*^{2}. Получаем уравнение:

$$xy = 1000. \tag{1}$$

Это — уравнение второй степени.

Кроме того, в задаче дана величина периметра участка. Так как периметр его равен $2x + 2y$, то получаем второе уравнение: $2x + 2y = 130$, или, разделив все члены на 2:

$$x + y = 65. \tag{2}$$

Это — уравнение первой степени.

Итак, для решения задачи мы имеем систему уравнений, из которых одно второй и одно первой степени:

$$\begin{cases} xy = 1000, \\ x + y = 65. \end{cases} \tag{3}$$

Решим ее способом подстановки. Выразим из второго уравнения y через x:

$$y = 65 - x. \tag{4}$$

Сделав подстановку в первое уравнение, получим:

$$x(65 - x) = 1000. \tag{5}$$

Система уравнений (4) и (5) и система (3) равносильны (ч. 1, § 80). Решив уравнение (5), найдем: $x_1 = 40$, $x_2 = 25$.

Отсюда подстановкой в (4) получаем соответственно:

$$y_1=65-40=25; \quad y_2=65-25=40.$$

Получили два решения:

1) длина участка 40 *м*, ширина 25 *м*;

2) длина 25 *м*, ширина 40 *м*. Очевидно, что фактически получен один ответ на вопрос задачи.

Решим в общем виде систему уравнений, из которых одно второй и одно первой степени.

Имеем системы:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \\ mx+ny+p=0. \end{cases} \tag{6}$$

Определим из второго уравнения y.

$$y=-\frac{mx+p}{n}. \tag{7}$$

Сделав подстановку в первое уравнение, получим:

$$ax^2-bx\frac{mx+p}{n}+c\left(-\frac{mx+p}{n}\right)^2+dx+e\left(-\frac{mx+p}{n}\right)+f=0. \tag{8}$$

Система уравнений (7) и (8) равносильна системе (6).

Но уравнение (8) является уравнением с одним неизвестным и не выше второй степени. Решив его, найдем значения x; подставив их в (7), найдем соответствующие значения y.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} 4x^2-y^2+2x-2y-17=0, \\ 2x-y-3=0. \end{cases} \tag{9}$$

Из второго уравнения находим:

$$y=2x-3. \tag{10}$$

Подстановка в первое уравнение дает:

$$4x^2-(2x-3)^2+2x-2(2x-3)-17=0.$$

Это уравнение по упрощении примет вид:

$$x-2=0.$$

Отсюда

$$x=2.$$

Подстановка в уравнение (10) дает:

$$y=1.$$

§ 68. Система двух уравнений второй степени.

З а д а ч а. *Площадь прямоугольного треугольника равна* 30 *см*², *а гипотенуза равна* 13 *см*². *Определить катеты.*

Р е ш е н и е. Обозначим длину катетов в сантиметрах через x и y. Тогда площадь треугольника равна $\frac{xy}{2}$ *см*². По условию имеем:

$$\frac{xy}{2}=30. \tag{1}$$

Кроме того, по теореме Пифагора имеем:

$$x^2+y^2=13^2. \tag{2}$$

Итак, имеем систему уравнений второй степени:

$$\begin{cases} xy=60, \\ x^2+y^2=169. \end{cases} \tag{3}$$

Решим ее способом подстановки. Из первого уравнения имеем:

$$y=\frac{60}{x}. \tag{4}$$

(Заметим, что $x \neq 0$, так как в этом случае произведение xy было бы равно нулю).

Подставив во второе уравнение, получим:

$$x^2+\frac{60^2}{x^2}=169,$$

или

$$x^4-169x^2+3600=0.$$

Решив это биквадратное уравнение, найдем:

$$x_{1,2}=\pm 12; \quad x_{3,4}=\pm 5.$$

По условию задачи для x допустимыми являются только положительные значения.

Значит, окончательно имеем:

$$x_1=12; \quad x_2=5.$$

Подстановкой этих значений в (4) найдем:

$$y_1=5; \quad y_2=12.$$

Оба решения по существу дают один ответ на вопрос задачи: один из катетов равен 12 *см*, другой 5 *см*.

Система (3) была решена сравнительно легко, так как уравнения получились простые. В общем же случае дело обстоит гораздо сложнее.

Система уравнений второй степени в общем случае будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0, \end{cases}$$

где все коэффициенты — любые числа (a b и c одновременно не равны нулю).

Общий ход решения этой системы можно представить так. Уравняем коэффициенты, например при y^2, для чего умножим обе части первого уравнения на c_2, а второго на c_1; затем вычтем второе уравнение из первого. Получим:

$$(a_1c_2-a_2c_1)x^2+(b_1c_2-b_2c_1)xy+(d_1c_2-d_2c_1)x+$$
$$+(e_1c_2-e_2c_1)y+(f_1c_2-f_2c_1)=0.$$

Это уравнение первой степени относительно y. Определим из него y и подставим полученное выражение вместо y в одно из данных уравнений. После приведения к целому виду, получим уравнение с одним неизвестным x в общем случае четвертой степени.

Такое уравнение решить элементарно можно лишь в исключительных случаях (например, когда получилось биквадратное уравнение).

Общие способы решения уравнений четвертой степени излагаются в высшей алгебре.

Решим несколько систем, допускающих элементарное решение.

Пример 1.

$$\begin{cases} x^2-y^2=40, \\ x+y^2=16. \end{cases}$$

Мы могли бы из второго уравнения определить x и, подставив в первое уравнение, получили бы биквадратное уравнение. Но данная система решается гораздо проще. Сложив оба уравнения, сразу исключим y. Получим:

$$x^2+x=56.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем:

$$x_1=7, \quad x_2=-8.$$

Подставив значения x во второе уравнение системы, получим

$$y^2=9 \text{ и } y^2=24.$$

Отсюда

$$y_{1,2}=\pm 3, \quad y_{3,4}=\pm 2\sqrt{6}\approx\pm 4{,}9.$$

Итак, имеем четыре решения:

x	7	7	-8	-8
y	3	-3	4,9	$-4{,}9$

Пример 2.

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=13, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Вычтя второе уравнение из первого, получим:

$$2xy=6; \quad xy=3; \quad y=\frac{3}{x}.$$

Подставив $\frac{3}{x}$ вместо y в одно из данных уравнений, получим после упрощений биквадратное уравнение относительно x, из которого найдем:

$$x_{1,2}=\pm 1; \quad x_{3,4}=\pm 3.$$

Подставив эти значения в выражение $y=\frac{3}{x}$, получим соответственно:

$$y_{1,2}=\pm 3; \quad y_{3,4}=\pm 1.$$

Пример 3.

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2+2=0, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$$

Замечая, что x входит во второе уравнение только в первой степени, определим его из этого уравнения:

$$x=\frac{y^2+15}{2y}.$$

После подстановки в первое уравнение получим биквадратное уравнение относительно y.

§ 69. Системы уравнений, решаемые особыми приемами.

Некоторые системы уравнений решаются элементарно с помощью особых приемов в зависимости от вида уравнений. Приведем примеры.

1. $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$

Первый способ. Способ решения этой системы подстановкой был показан при решении задачи в § 67.

Приведем еще два способа.

Второй способ. Возведем обе части первого уравнения в квадрат и вычтем из него учетверенное второе. Получим:

$$x^2-2xy+y^2=a^2-4b,$$

или

$$(x-y)^2=a^2-4b.$$

Отсюда

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

Получаем две системы первой степени:

$$1)\begin{cases}x+y=a,\\ x-y=\sqrt{a^2-4b};\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}x+y=a,\\ x-y=-\sqrt{a^2-4b}.\end{cases}$$

Решив их, получим два решения данной системы.

Третий способ. Согласно теореме, обратной теореме Виета (§ 47), x и y являются корнями уравнения $z^2-az+b=0$.

Решив его, найдем:

$$z=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Отсюда

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2},\\[2mm] y_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\\[2mm] y_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}.\end{cases}$$

Получили те же решения, что и раньше.

2. $\begin{cases}x^2+y^2=a,\\ xy=b.\end{cases}$

Эту систему мы тоже решали подстановкой (§ 68). Покажем другие способы.

Второй способ. Прибавим к первому уравнению удвоенное второе, а затем вычтем из него же удвоенное второе. Получим

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=a+2b,\\ x^2-2xy+y^2=a-2b,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(x+y)^2=a+2b,\\ (x-y)^2=a-2b.\end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases}x+y=\pm\sqrt{a+2b},\\ x-y=\pm\sqrt{a-2b}.\end{cases}$$

Комбинируя знаки перед корнем, получим четыре системы уравнений первой степени:

$$\begin{cases}x+y=\sqrt{a+2b},\\ x-y=\sqrt{a-2b};\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=-\sqrt{a+2b},\\ x-y=\sqrt{a-2b};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=\sqrt{a+2b},\\ x-y=-\sqrt{a-2b};\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=-\sqrt{a+2b},\\ x-y=-\sqrt{a-2b}.\end{cases}$$

Все эти системы решаются легко путем сложения и вычитания уравнений в каждой системе.

3. $\begin{cases} x - y = a, \\ xy = b. \end{cases}$

Первый способ. Умножив второе уравнение на -1, получим систему:

$$\begin{cases} x + (-y) = a, \\ x(-y) = -b. \end{cases}$$

Следовательно, x и $-y$ являются корнями уравнения:

$$z^2 - az - b = 0.$$

Решив его, найдем:

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}; \quad -y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}; \quad y_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}; \quad -y_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}; \quad y_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Числовой пример.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 15 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + (-y) = 2, \\ x(-y) = -15; \end{cases}$$

x и $-y$ являются корнями уравнения:

$$z^2 - 2z - 15 = 0.$$

Решив его, найдем:

$$z_1 = 5; \quad z_2 = -3.$$

Отсюда

$$x_1 = 5; \quad -y_1 = -3; \quad y_1 = 3;$$

$$x_2 = -3; \quad -y_2 = 5; \quad y_2 = -5.$$

Итак, решения системы будут:

$$\begin{cases} x_1 = 5; \\ y_1 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -5. \end{cases}$$

Второй способ. Возведя первое уравнение в квадрат и прибавив к нему учетверенное второе, получим:

$$(x + y)^2 = a^2 + 4b.$$

Отсюда

$$x + y = \pm\sqrt{a^2 + 4b}.$$

Присоединив первое из данных уравнений, получим две системы первой степени:

$$\begin{cases} x-y=a, \\ x+y=\sqrt{a^2+4b}; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=a, \\ x+y=-\sqrt{a^2+4b}. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$

Возведя первое уравнение в квадрат и вычтя из него второе, получим:

$$2xy=a^2-b; \quad xy=\frac{a^2-b}{2}.$$

Присоединив к этому уравнению первое из данных, получим систему:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=\dfrac{a^2-b}{2}, \end{cases}$$

присоединив второе, получим систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=b, \\ xy=\dfrac{a^2-b}{2}, \end{cases}$$

решать которые мы умеем.

§ 70. Графическое решение систем уравнений.

В первой части настоящего курса (§ 81) был показан графический способ решения системы уравнений первой степени с двумя неизвестными. Строились прямые — графики данных уравнений. Если эти прямые пересекались, то координаты точки пересечения и являлись решением системы.

Совершенно так же решаются графически и системы уравнений второй степени с двумя неизвестными.

Строится график каждого из уравнений системы. Если эти графики имеют одну или несколько общих точек, то координаты каждой из этих точек удовлетворяют обоим уравнениям, то есть являются решением системы. Приведем несколько примеров.

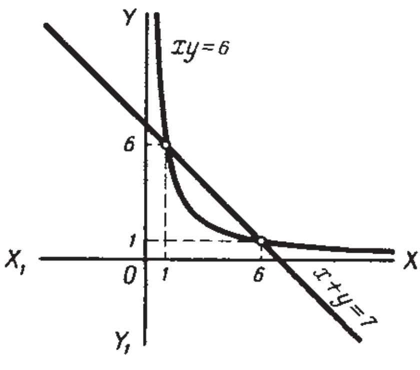
Пример 1.

$$\begin{cases} x+y=7, \\ xy=6. \end{cases}$$

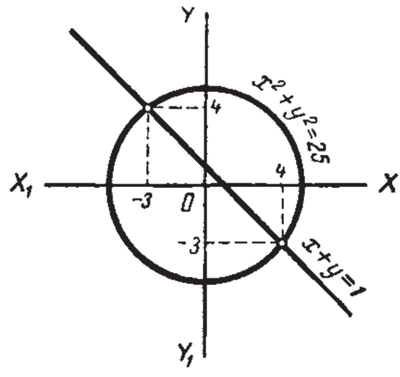
Графиком первого уравнения является прямая, проходящая через точки (7; 0) и (0; 7).

Графиком второго уравнения является гипербола (см. ч. I, § 76).

На чертеже 39 видно, что прямая пересекает гиперболу в двух точках. Измерив их расстояния от осей и округляя результаты, найдем решения системы: $x_1 = 1$, $y_1 = 6$ и $x_2 = 6$, $y_2 = 1$.



Черт. 39.

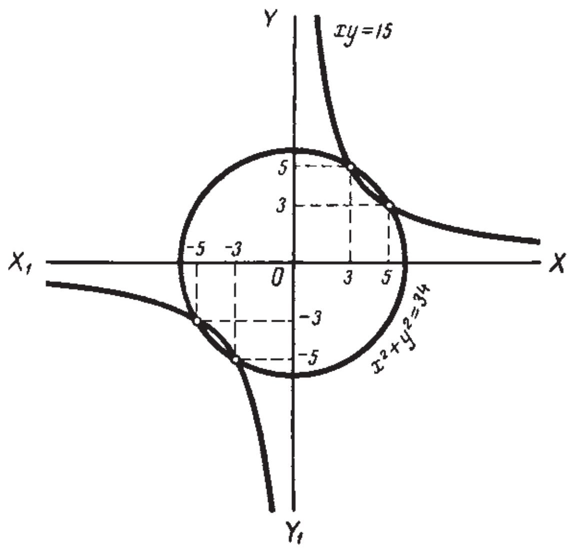


Черт. 40.

Пример 2.

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является прямая, проходящая через точки (1; 0) и (0; 1).



Черт. 41.

Графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 5 (§ 66). Из чертежа 40 видим, что координаты точек пересечения, то есть решения системы, будут: $x_1 = 4$, $y_1 = -3$ и $x_2 = -3$, $y_2 = 4$.

Пример 3.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является окружность с радиусом, равным $\sqrt{34}$, с центром в начале координат.

Графиком второго уравнения является гипербола.

На чертеже 41 видны четыре точки пересечения этих кривых. Их координаты и, значит, решения системы будут:

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3, \\ y_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -3, \\ y_3 = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -5, \\ y_4 = -3. \end{cases}$$

§ 71. Решение задач.

Решение многих задач приводит к решению системы уравнений второй степени. Приемы составления уравнений по условию задачи те же, что и при составлении систем уравнений первой степени.

Приведем несколько примеров.

Задача 1. *Высота равнобедренного треугольника равна* 12 *см. Периметр его равен* 36 *см. Определить стороны.*

Решение. Обозначим в сантиметрах основание через x, боковую сторону через y.

По условию:

$$y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 12^2. \tag{1}$$

$$2y + x = 36. \tag{2}$$

Упростив уравнения (1) и (2), получим систему:

$$\begin{cases} 4y^2 - x^2 = 576, \\ 2y + x = 36. \end{cases}$$

Решим ее способом подстановки. Из второго уравнения получим:

$$2y = 36 - x. \tag{3}$$

Подставим в первое уравнение:

$$(36 - x)^2 - x^2 = 576,$$

или по раскрытии скобок:

$$1296 - 72x = 576.$$

Отсюда $x = 10$.

Сделав подстановку в (3), найдем:

$$y = 13.$$

Ответ. Основание равно 10 *см*, боковая сторона 13 *см*.

Задача 2. *Двое рабочих могут выполнить работу* в 12 *часов. Если же каждый из них отдельно выполнит половину всей работы, то всего будет затрачено* 25 *часов. Во сколько дней каждый из них, работая один, мог выполнить всю работу?*

Решение. Пусть первый рабочий может выполнить всю работу в x часов, второй в y часов. Первый рабочий в 1 час выполнит $\frac{1}{x}$ часть работы. Второй рабочий в 1 час выполнит $\frac{1}{y}$ часть работы. Оба в 1 час выполнят $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть работы.

По условию

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}. \qquad (1)$$

Первый рабочий половину всей работы выполнит в $\frac{x}{2}$ часов.

Второй „ „ „ „ „ в $\frac{y}{2}$ часов.

Оба вместе затратят на всю работу $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)$ часов. По условию

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=25.$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} 12x+12y=xy, \\ x+y=50. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 12 и вычтя из первого, получим

$$xy-600=0.$$

Итак имеем систему:

$$\begin{cases} x+y=50, \\ xy=600, \end{cases}$$

решив которую (§ 69), найдем:

$$x_1=30, \quad y_1=20; \quad x_2=20, \quad y_2=30.$$

Оба решения удовлетворяют условию задачи.

Ответ. Один из рабочих (первый или второй) может выполнить работу в 30 часов, другой в 20 часов.

Задача 3. *Два обыкновенных плуга и один тракторный обрабатывают вместе некоторый участок в* 6 *дней. Восемь обыкновенных плугов выполнили бы ту же работу лишь на* 2 *дня раньше, чем один тракторный. Во сколько раз производительность тракторного плуга больше, чем обыкновенного?*

Решение. Пусть один обыкновенный плуг может выполнить всю работу в x дней, а тракторный в y дней.

Два обыкновенных плуга выполнят в один день $\frac{2}{x}$ части работы.

Тракторный плуг может выполнить в один день $\frac{1}{y}$ часть всей работы.

Вместе они выполнят в один день $\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)$ часть всей работы. По условию

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}. \tag{1}$$

Восемь обыкновенных плугов выполнят всю работу за $\frac{x}{8}$ дней. Один тракторный выполнит эту работу за y дней. По условию

$$y-\frac{x}{8}=2. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) образуют систему:

$$\begin{cases} 12y+6x=xy, \\ 8y-x=16. \end{cases}$$

Решив систему подстановкой ($x=8y-16$), найдем:

$$x_1=48, \quad y_1=8; \quad x_2=-4, \quad y_2=1\frac{1}{2}.$$

Очевидно, условию задачи удовлетворяет только первое решение.

Ответ. Производительность тракторного плуга в 6 раз больше обыкновенного.

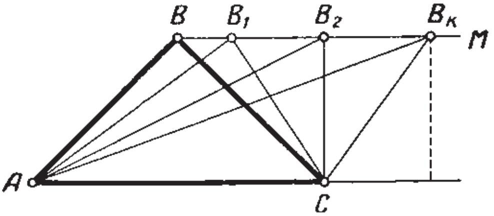
ГЛАВА VIII.

ПРЕДЕЛЫ.

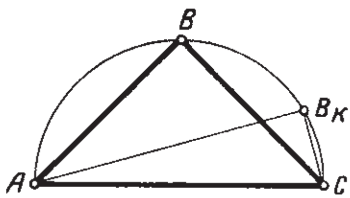
§ 72. Понятие о пределе.

Вернемся еще раз к примерам, рассмотренным в § 54. Пусть вершина прямого угла в равнобедренном прямоугольном треугольнике перемещается в одном случае по прямой, параллельной основанию (черт. 42), в другом по окружности, описанной около треугольника (черт. 43).

Рассмотрим, как будут изменяться элементы треугольника. Оказывается, что характер изменения их может быть различен.



Черт. 42.



Черт. 43.

Пример 1. Возьмем сторону AB на чертеже 42. При перемещении вершины B вправо длина стороны все время увеличивается и может быть сделана как угодно большой. Какой бы величины отрезок нам ни был задан, взяв радиус циркуля, больший этого отрезка, из точки A как из центра можем провести дугу, которая пересечет прямую BM (черт. 42).

Получим некоторую точку B_k. Соединив ее прямыми с A и C, получим треугольник AB_kC, в котором сторона AB_k будет, очевидно, больше заданного отрезка. При дальнейшем перемещении вершины B вправо от точки B_k длина стороны AB еще больше увеличивается, оставаясь, таким образом, все время больше длины заданного отрезка.

Итак, длина стороны AB (то есть ее численная величина), все время увеличиваясь при перемещении вершины B вправо, может сделаться и при дальнейшем изменении оставаться больше любого данного числа. В таких случаях говорят, что данная величина увеличивается беспредельно.

Пример 2. Возьмем ту же сторону AB на чертеже 43. При перемещении вершины B в направлении к вершине C сторона AB тоже увеличивается, но в этих условиях уже не беспредельно. Являясь хордой окружности, она не может сделаться больше диаметра этой окружности, то есть больше AC.

Такая переменная величина называется ограниченной. Как легко заметить, сторона AB не может даже сделаться равной стороне AC, так как для этого нужно, чтобы вершина B совпала с вершиной C, а тогда треугольник ABC уже не будет существовать.

Но можно показать, что по мере приближения вершины B к вершине C длина стороны AB может сделаться как угодно близкой к длине AC.

Докажем, что какой бы ничтожно малый отрезок ни был нам задан, разность между длинами сторон AC и AB, начиная с некоторого положения вершины B, будет меньше длины этого отрезка и при дальнейшем перемещении вершины B остается меньше ее.

Допустим, что нам задан отрезок длиной в $\frac{1}{100}$ *см*. Возьмем еще меньший отрезок, например в $\frac{1}{200}$ *см*, и радиусом, равным длине этого отрезка, из точки C как из центра проведем дугу до пересечения с окружностью (по ту же сторону AC, что и вершина B).

Получим некоторую точку B_k. Соединив ее прямыми с A и C, получим треугольник AB_kC.

Как известно, во всяком треугольнике любая сторона больше разности двух других сторон. Следовательно, для нашего треугольника мы можем записать:

$$AC - AB_k < B_kC. \tag{1}$$

Но $B_kC = \frac{1}{200}$ *см*, то есть меньше $\frac{1}{100}$. Отсюда, обозначив постоянную длину AC через a, переменную длину AB_k через x, получим:

$$a - x < \frac{1}{100}, \tag{2}$$

что нам и требовалось доказать. Очевидно, что при дальнейшем перемещении вершины B сторона B_kC будет еще уменьшаться, оставаясь всегда больше разности двух других сторон. Следовательно, неравенство (2) будет все время оставаться справедливым.

Точно так же можно показать, что разность $AC - AB_k$ может сделаться и при дальнейшем изменении оставаться меньше $\frac{1}{1000}$ *см*, $\frac{1}{10\,000}$ *см*, и т. д.

В этом случае постоянную величину — длину стороны AC — называют **пределом** переменной величины — длины стороны AB.

Определение. **Если абсолютная величина разности между постоянной и переменной величинами может сделаться и при дальнейшем изменении переменной оставаться меньше любого положительного числа, то эта постоянная называется пределом переменной.**

Если постоянная величина a является пределом переменной x, это записывается так:

$$\text{пред. } x = a \text{ или } \lim x = a.$$

Здесь символ lim есть сокращение латинского слова limes — предел.

Употребляется и такая запись:

$$x \to a,$$

и вместо „предел x равен a" говорят: „x стремится к a".

§ 73. Монотонность.

В приведенных в § 72 примерах переменные величины изменялись в одном направлении, то есть или все время увеличивались или все время уменьшались. Такие переменные называются монотонными.

Если в процессе изменения переменной величины каждое последующее числовое значение ее больше предыдущего, то переменная называется монотонно возрастающей.

Если в процессе изменения переменной величины каждое последующее числовое значение ее меньше предыдущего, то переменная называется монотонно убывающей.

Не всякая переменная является монотонной. Возьмем на чертеже 42 сторону BC. При перемещении точки B вправо она сначала уменьшается, достигает наименьшей величины в положении CB_2 (становится перпендикулярной к AC и BM) и затем увеличивается беспредельно.

Относительно величин, изменяющихся монотонно, существует простой признак, позволяющий установить, имеет ли данная переменная предел или нет.

1) Если монотонно возрастающая переменная остается все время меньше некоторого постоянного числа, то она имеет предел (равный этому числу или меньший его). Так, в примере 2 § 72 сторона AB, увеличиваясь, остается все время меньше диаметра окружности.

Значит, она имеет предел (в данном случае как раз равный этому диаметру).

2) Если монотонно убывающая величина остается все время больше некоторого постоянного числа, то она имеет предел (равный этому числу, или больший его).

Так, числовое значение выражения $1+\frac{n+1}{n}$, где n — натуральное число, монотонно убывает с увеличением n, оставаясь все время больше единицы. Значит, она имеет предел (в данном случае больший 1, именно 2).

§ 74. Бесконечно большие величины.

В § 72 мы видели пример величины, неограниченно увеличивающейся. В качестве второго примера возьмем сумму углов многоугольника при увеличении числа его сторон.

Как известно, эта сумма выражается формулой

$$S_n = 180^\circ(n-2),$$

где n означает число сторон. Совершенно очевидно, что с увеличением числа n сторон увеличивается и величина суммы углов многоугольника. Так, давая n значения 3, 4, 5, будем иметь:

$$S_3 = 180^\circ;\ S_4 = 360^\circ;\ S_5 = 540^\circ:\ S_6 = 720^\circ;\ \ldots;$$
$$S_{12} = 1800^\circ; \ldots,\ S_{112} = 19\,800^\circ \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что сумма углов многоугольника при достаточно большом n может стать больше любого как угодно большого числа, и при дальнейшем увеличении n будет все время больше этого числа. Такие переменные величины имеют особое название; они называются *бесконечно большими*.

Переменная величина называется бесконечно большой, если в процессе изменения ее абсолютная величина становится и при дальнейшем изменении остается больше сколь угодно большого положительного числа.

Понятно, что бесконечно большая величина никакого предела иметь не может.

Какое бы определенное число мы ни взяли, бесконечно большая величина в конце концов превзойдет его.

Но часто и по отношению к величинам бесконечно большим применяют термин „предел"; именно говорят, что „предел равен бесконечности". Для этого „предела" приняли особый знак ∞; пользуясь им, выражение „x есть величина бесконечно большая" можно записать так:

$$\text{пред. } x = \infty, \qquad \lim\ x = \infty, \qquad x \to \infty$$

Если число x отрицательное и увеличивается беспредельно по абсолютной величине, то можно написать:

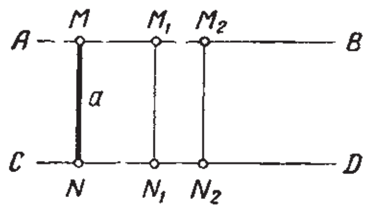
$$\lim\ x = -\infty$$

Надо помнить, что символ бесконечности ∞ не представляет собой никакого числа. Все записи выражают только то, что x есть величина бесконечно большая; другими словами, величина x увеличивается беспредельно по абсолютной величине.

§ 75. Предел постоянной величины.

Возьмем две параллельные прямые AB и CD (черт. 44) и восставим к ним перпендикуляр MN. Обозначим длину этого перпендикуляра через a. Будем теперь передвигать этот перпендикуляр вдоль прямых AB и CD. Он будет занимать различные положения, но длина его все время остается равной a.

Этот пример показывает, что мы можем и постоянную величину рассматривать как переменную, принимающую все время одно и то же числовое значение.



Черт. 44.

Другими словами, постоянную величину мы можем рассматривать как частный случай переменной.

Другой пример такой величины дает чертеж 42. В треугольнике ABC высота, опущенная из вершины B, перемещается вместе с вершиной, но величина ее остается все время одной и той же.

Можно ли в таком случае говорить о пределе постоянной величины? Да, этим пределом является как раз сама постоянная величина. В самом деле, допустим, например, что $MN = 5$ *см*. Как бы мы ни передвигали отрезок MN, разность между его длиной и отрезком в 5 *см* всегда остается меньше любого сколь угодно малого числа (так как она всегда равна нулю). Следовательно, этот случай вполне подходит под то определение предела, которое дано в § 72, и мы можем записать:

$$\lim 5 = 5.$$

Вообще для любого постоянного числа a будем иметь:

$$\lim a = a.$$

Пределом постоянной величины является сама эта величина.

§ 76. Свойства пределов.

Укажем некоторые свойства пределов, главным образом те, с которыми придется встречаться в дальнейшем, а также при изучении геометрии.

1. ***Предел суммы двух или нескольких переменных равен сумме пределов слагаемых.***

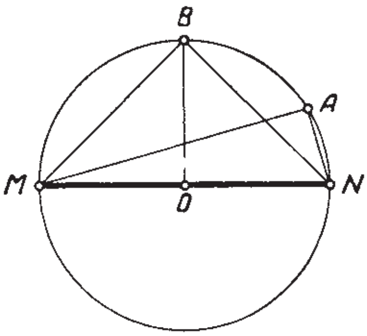
Пусть переменные x и y имеют своими пределами числа a и b:

$$\lim x = a; \quad \lim y = b.$$

Тогда, согласно приведенному выше утверждению, должно быть:

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y = a + b.$$

Поясним это положение на примере. Проведем в окружности (черт. 45) диаметр MN и возьмем на ней вблизи от точки N точку A. Соединим ее с точками M и N. Получим треугольник MAN. Будем теперь перемещать вершину A по окружности до тех пор, пока дуга AN не станет равной 90°. Это будет, когда вершина A совпадет с точкой B. При этом будет монотонно увеличиваться периметр треугольника AMN. Найдем предел этого периметра, то есть его величину в положении MBN. Воспользуемся для этого приведенным выше положением. Имеем:



Черт. 45.

$$P = MN + MA + NA.$$

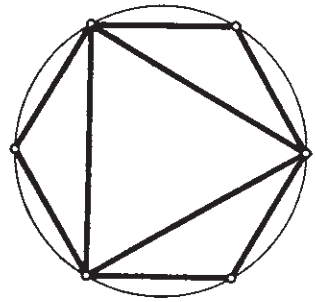
При перемещении точки A величина стороны $MN = 2R$ остается неизменной, а стороны MA и NA изменяются, приближаясь каждая к своему пределу, именно:

$$\lim MA = MB = R\sqrt{2}; \quad \lim NA = BN = R\sqrt{2},$$

$$\lim P = \lim MN + \lim MA + \lim NA = 2R + R\sqrt{2} + R\sqrt{2} = \\ = 2R(1 + \sqrt{2}).$$

Обращаем особое внимание на то, что свойство справедливо только для определенного (конечного) числа слагаемых (хотя это число может быть и очень большим). Если же число слагаемых становится бесконечно большим, то свойство 1 к такой сумме уже применить нельзя. Покажем это на примере.

Возьмем окружность (черт. 46) и впишем в нее правильный треугольник, затем шестиугольник, 12-угольник и т. д. При этом стороны многоугольника будут все время уменьшаться. Очевидно, что при неограниченном увеличении числа сторон каждая из них имеет пределом нуль. Тем не менее сумма этих сторон (то есть периметр многоугольника) не



Черт. 46.

только не стремится к нулю, но, наоборот, все время увеличивается (предел этой суммы принимают за длину окружности).

2. *Предел разности двух переменных равен разности пределов уменьшаемого и вычитаемого.*

Если

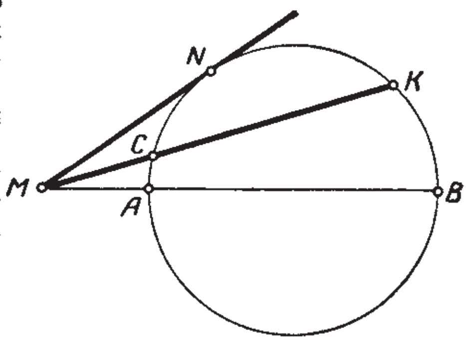
$$\lim x = a; \quad \lim y = b,$$

то

$$\lim (x - y) = \lim x - \lim y = a - b.$$

Пример. Из точки M вне окружности проведем к ней касательную MN и секущую MK (черт. 47). Будем перемещать секущую, передвигая точку K по окружности от N к B. Как будет при этом изменяться величина хорды CK? Очевидно, она будет возрастать, начиная от нуля, и в предельном положении, когда секущая примет положение MB, хорда будет равна $AB = 2R$ (R — радиус окружности). Значит, мы можем написать:

$$\lim CK = 2R.$$



Черт. 47.

С другой стороны, хорду CK мы можем рассматривать как разность между секущей MK и ее внешней частью MC.

$$CK = MK - MC.$$

Согласно положению 2, предел CK должен быть равен разности пределов переменных MK и MC. Действительно:

$$\lim MK = MB; \quad \lim MC = MA.$$

Следовательно, будем иметь:

$$\lim CK = \lim MK - \lim MC = MB - MA = AB = 2R.$$

Мы получили тот же самый предел для хорды CK, который мы нашли выше, наблюдая непосредственно характер ее изменения.

3. *Предел произведения двух (или нескольких) переменных равен произведению пределов сомножителей.*

Если

$$\lim x = a; \quad \lim y = b,$$

то

$$\lim (xy) = \lim x \cdot \lim y = ab.$$

Вернемся опять к чертежу 45. Найдем предел, к которому стремится площадь треугольника MAN, если точка A приближается к точке B.

Обозначим длину катета MA через x, а катета AN через y. Тогда площадь треугольника будет равна половине произведения этих величин:

$$S = \frac{1}{2} xy.$$

При перемещении точки A от N к B будут изменяться x, y и S, но соотношение $S = \frac{1}{2} xy$ все время сохраняется. Легко видеть, что

$$\lim AN = BN = R\sqrt{2}; \quad \lim AM = BM = R\sqrt{2}.$$

Следовательно, по свойству 3 должно быть:

$$\lim S = \lim\left(\frac{1}{2} xy\right) = \lim \frac{1}{2} \lim x \cdot \lim y = \frac{1}{2} R\sqrt{2} \cdot R\sqrt{2} = R^2.$$

Действительно, мы можем величину площади треугольника MBN вычислить и непосредственно, взяв за основание MN. Высота тогда будет $OB = R$, и мы получим:

$$\lim S = \frac{1}{2} MN \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2.$$

Заметим, что это свойство, как и первое, относится к любому, но конечному числу множителей: когда число множителей безгранично возрастает, то оно может оказаться и неверным.

4. ***Предел частного двух переменных равен частному от деления предела делимого на предел делителя, если только предел делителя не равен нулю.***

Если

$$\lim x = a; \quad \lim y = b \quad \text{и} \quad b \neq 0,$$

то

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y} = \frac{a}{b}.$$

В предыдущем примере мы рассматривали площадь как произведение катетов AM и AN. Мы можем, наоборот, найти величину одного катета, например AM, по величине площади и другого катета и, пользуясь прежними обозначениями, записать:

$$x = \frac{2S}{y}.$$

Согласно свойству 4, мы можем записать:

$$\lim x = \frac{\lim 2S}{\lim y},$$

но

$\lim y = R\sqrt{2}$; $\quad \lim 2S = 2 \cdot \lim S = 2 \cdot$ пл. $MBN = MN \cdot OB = 2R^2$ (как видим, мы вычислили площадь треугольника MBN независимо от катега AM и его предела MB). Подстановка в формулу дает:

$$x = \frac{2R^2}{R\sqrt{2}} = R\sqrt{2}.$$

Это же число мы получили, определяя предел катета AM непосредственно.

§ 77. Числовая последовательность.

Всякое четное положительное число можно записать в виде $2n$, где n — некоторое натуральное число. Давая n последовательно значения 1, 2, 3, ..., будем получать различные четные числа.

n	1	2	3	...	17	...	45	...
$2n$	2	4	6	...	34	...	90	...

Говорят, что числа 2, 4, 6, 8, ... образуют числовую последовательность. Отдельные числа, входящие в нее, называются членами последовательности. Члены последовательности занумерованы. Каждому номеру, то есть натуральному числу, соответствует определенное и единственное четное число.

Например, числу 21 соответствует число 42, числу 38 соответствует 76 и т. д.

Поэтому мы можем рассматривать числа натурального ряда как значения аргумента, а соответствующие им четные числа как значения функции. Особенность этой функции заключается в том, что аргумент может принимать только натуральные значения. Поэтому последовательность мы можем определить так.

Определение. **Последовательностью называется функция от натурального аргумента.**

Обозначив члены последовательности четных чисел через a_1, a_2, a_3, ..., будем иметь:

$$a_1 = 2; \quad a_2 = 4; \quad a_3 = 6; \quad \ldots .$$

n-й член последовательности называется ее общим членом. Для последовательности четных чисел общий член будет иметь вид:

$$a_n = 2n.$$

Примеры последовательности:

1) 1; 3; 5; 7; ... .

Общий член $a_n = 2n - 1$.

2) 1; 4; 9; 16; ... .

Общий член $a_n = n^2$.

Если задан общий член последовательности, то можно вычислить любой член ее, если известен его номер.

Пример.

Общий член последовательности $a_n = \frac{1}{n}$.

Тогда $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3}$ и т. д.

Итак, всякая последовательность является функцией натурального аргумента.

Но раз так, то все, что было раньше сказано о характере изменения переменной, о пределах и их свойствах — все это без всяких изменений может быть сказано и о числовой последовательности. Так, последовательность называется монотонно возрастающей, если каждый ее последующий член больше предыдущего.

Аналогично определяется монотонно убывающая последовательность.

К монотонной числовой последовательности применимы и признаки существования предела, данные в § 73. Именно:

1) Если члены монотонно возрастающей последовательности остаются меньше какого-либо постоянного числа, то последовательность имеет предел (меньший этого числа или равный ему).

2) Если члены монотонно убывающей последовательности остаются больше какого-либо постоянного числа, то последовательность имеет предел (больший этого числа или равный ему).

Приведем пример. Возьмем такую числовую последовательность:

$$\frac{2}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ \dots .$$

Здесь знаменатели дробей идут в порядке натурального ряда чисел, а числитель каждой дроби на единицу больше знаменателя.

Легко заметить, что числа этого ряда все время убывают. Действительно, первый член ряда больше 1 на единицу, второй уже только на $\frac{1}{2}$, третий на $\frac{1}{3}$ и т. д. Значит, члены последовательности все время уменьшаются. Но могут ли они, убывая, стать числом отрицательным, например — 2? Нет, члены остаются все время положительными, то есть бо́льшими нуля. Следовательно, последовательность имеет предел, больший нуля или равный нулю. Покажем, что этот предел равен 1.

Действительно, можно всегда найти такой член, который отличается от 1 на сколь угодно малое число, а все дальнейшие члены будут отличаться от 1 еще на меньшую величину.

Возьмем, например, число $\frac{1}{1000000}$. В нашей последовательности есть дробь $\frac{1000002}{1000001}$, которая разнится от 1 только на $\frac{1}{1000001}$, то есть меньше, чем на $\frac{1}{1000000}$, а дальнейшие дроби будут отличаться от 1 уже на $\frac{1}{1000002}$, $\frac{1}{1000003}$ и т. д. Следовательно, пределом нашей числовой последовательности является 1; мы можем n-й член этой последовательности (так называемый общий член) обозначить так: $\frac{n+1}{n}$ и записать:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

§ 78. Краткие исторические сведения.

Еще древнегреческие ученые (Евклид, Архимед) при вычислении площадей и объемов некоторых фигур фактически прибегали к понятию предела, не определяя этого понятия и не вводя самого термина «предел». При доказательстве ряда теорем они применяли прием, впоследствии названный приемом «предельного перехода». Сущность этого приема покажем на примере.

Пусть требуется доказать теорему, что длины окружностей относятся как их диаметры. Сначала доказывается, что периметры двух подобных вписанных правильных многоугольников относятся как диаметры соответствующих описанных окружностей. А так как длина окружности определяется как предел периметров вписанных многоугольников (при бесконечном удвоении числа их сторон), то выводится, что длины окружностей также относятся как их диаметры.

Термин «предел» в его латинском названии был введен Ньютоном в XVII в.

Строгая теория пределов была разработана лишь в течение XIX века.

ГЛАВА IX.

ПРОГРЕССИИ.

§ 79. Арифметическая прогрессия.

В § 77 было дано понятие о числовой последовательности.

К простейшим последовательностям, известным еще в глубокой древности, относятся последовательности, называемые прогрессиями.

Определение. **Арифметической прогрессией называется последовательность чисел, из которых каждое последующее равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.**

Члены такой последовательности будем называть теперь членами прогрессии и обозначать по порядку так:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots .$$

Разность между последующим и предыдущим членами прогрессии называется разностью прогрессии и обозначается обычно буквой d (иногда буквой r).

Ясно из самого определения прогрессии, что эта разность будет одна и та же, какие бы два соседних члена прогрессии мы ни взяли.

Чтобы показать, что данная последовательность является арифметической прогрессией, иногда перед ней ставят знак $\div$, например:

$$\div\, 1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\ \ldots .$$

$$\div -10;\ -5;\ 0;\ 5;\ 10\ \ldots .$$

$$\div\, 7;\ 4;\ 1;\ -2;\ -5\ \ldots .$$

В первом примере $d=2$, во втором $d=5$ и в третьем $d=-3$.

Как видим, разность прогрессии может быть числом положительным и отрицательным. Если разность прогрессии число положительное, то прогрессия называется возрастающей. Если разность прогрессии число отрицательное, то прогрессия называется убывающей.

Примечание. Формально можно считать прогрессией и такой ряд чисел, в котором разность равна нулю, например:

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \ldots .$$

Здесь $d=0$ и $a_1=a_2=a_3\ldots=4$.

Мы не будем такие последовательности причислять к прогрессиям и в дальнейшем везде будем предполагать, что d не равно нулю.

§ 80. Общий член прогрессии.

Если нам нужно узнать величину, например, сотого члена арифметической прогрессии, то было бы слишком долго и утомительно выписывать все 99 членов, чтобы из 99-го члена получить сотый. Выведем поэтому формулу, позволяющую сразу написать любой член прогрессии, если нам известны первый член и разность прогрессии.

Теорема. ***Всякий член арифметической прогрессии равен ее первому члену, сложенному с разностью, умноженной на число предшествующих членов.***

Требуется доказать справедливость формулы

$$a_k=a_1+d(k-1) \tag{1}$$

для любого натурального k.

Эта формула называется формулой общего члена арифметической прогрессии.

Доказательство проведем методом математической индукции.

1) Для $k=1$ и $k=2$ формула справедлива, так как

$$a_1=a_1+0\cdot d;\quad a_2=a_1+1\cdot d.$$

2) Допустим, что формула (1) справедлива для k, равного некоторому натуральному числу m.

Тогда она будет справедлива и для $k=m+1$.

Действительно, из допущения следует:

$$a_m=a_1+d(m-1). \tag{2}$$

Прибавив к обеим частям этого равенства d, получим:

$$a_m+d=a_1+dm. \tag{3}$$

Но

$$a_m+d=a_{m+1}.$$

Сделав подстановку в (3), получим:

$$a_{m+1}=a_1+dm.$$

Из п. 1 и 2 следует, что формула (1) верна для любого натурального k.

Следовательно,

$$\boldsymbol{a_k=a_1+d(k-1).} \tag{I}$$

Пример 1. Дана прогрессия

$$2;\ 5;\ 8;\ \ldots.$$

Написать 19-й член этой прогрессии.

Здесь $a_1=2$ и $d=3$. По формуле (1) получим:

$$a_{19}=2+3\cdot 18=56.$$

До сих пор мы имели дело с прогрессиями, члены которых могли продолжать как угодно далеко.

В практике часто ограничиваются некоторым определенным числом членов прогрессии. Такую прогрессию будем называть конечной.

Число ее членов обычно обозначается через n.

Последний член конечной прогрессии будет равен:

$$a_n=a_1+d(n-1) \tag{4}$$

(часто последний член арифметической прогрессии обозначают через l).

Пример 2. В прогрессии

$$18;\ 14;\ 10;\ \ldots$$

двенадцать членов. Вычислить последний член.

Здесь $a_1=18$, $d=-4$, $n=12$. По формуле (1) получим:

$$a_{12}=18+11(-4)=-26.$$

§ 81. Свойство членов арифметической прогрессии.

Возьмем прогрессию, состоящую из шести членов:

$$1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16.$$

Сложим попарно члены, равноотстоящие от ее концов:

$$1+16=17;\quad 4+13=17;\quad 7+10=17.$$

Точно так же для прогрессии

$$-8;\ -3;\ 2;\ 7;\ 12$$

будем иметь:

$$-8+12=4;\quad -3+7=4;\quad 2+2=4.$$

Мы видим, что в обоих случаях сумма членов, равноотстоящих от концов прогрессии, оставалась постоянной, равной сумме ее крайних членов.

Докажем, что это свойство будет верным для любой арифметической прогрессии (конечной).

Теорема. ***Сумма членов, равноотстоящих от концов арифметической прогрессии, равна сумме ее крайних членов.***

Доказательство. Пусть дана прогрессия:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n, \tag{1}$$

разность которой равна d. Ее k-й член

$$a_k = a_1 + d\,(k-1). \tag{2}$$

Возьмем прогрессию, состоящую из тех же членов, но написанных в обратном порядке:

$$a_n;\ a_{n-1};\ a_{n-2};\ \ldots\ a_2;\ a_1 \tag{3}$$

Ее разность равна $-d$. В этой прогрессии k-й член от начала, обозначим его через b_k, будет:

$$b_k = a_n + (-d)(k-1) = a_n - d\,(k-1). \tag{4}$$

Сложив почленно (2) и (4), получим:

$$a_k + b_k = a_1 + a_n. \tag{5}$$

Но k-й член от начала в прогрессии (3) b_k является k-м членом от конца в прогрессии (1). Следовательно, равенство (5) и доказывает теорему.

§ 82. Сумма членов арифметической прогрессии.

Свойство членов арифметической прогрессии поможет нам легко найти сумму всех членов конечной прогрессии, когда известны ее крайние члены и число членов.

Теорема. ***Сумма членов арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов.***

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть дана арифметическая прогрессия:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots\ a_{n-2};\ a_{n-1};\ a_n.$$

Напишем дважды сумму n ее членов, записав их в прямом и обратном порядке:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

В правой части друг под другом стоят члены, равноотстоящие от концов прогрессии. Сложим почленно эти равенства, соединяя в пары члены, стоящие один под другим.

Получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Мы получим n пар членов. Сумма членов в каждой скобке по свойству, выведенному в предыдущем параграфе, равна сумме первого и последнего членов, то есть a_1+a_n. Заменив каждую сумму равной ей суммой a_1+a_n, получим n таких сумм:

$$2S_n=(a_1+a_n)n.$$

Отсюда

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}. \qquad \text{(II)}$$

Пример 1. Найти сумму членов прогрессии

$$13;\ 15;\ 17;\ 19;\ 21;\ 23;\ 25.$$

Здесь $a_1=13$, $a_n=25$, $n=7$. По формуле (II) получим:

$$S=\frac{(13+25)\cdot 7}{2}=133.$$

Так как

$$a_n=a_1+d(n-1),$$

то, сделав подстановку в формулу (II), получим:

$$S_n=\frac{[2a_1+d(n-1)]n}{2}. \qquad \text{(III)}$$

Эту формулу удобно применять, когда последний член прогрессии неизвестен.

Пример 2. Найти сумму первых десяти членов прогрессии.

$$\div\ 17;\ 14;\ 11;\ 8;\ \ldots.$$

Здесь $a_1=17$; $d=-3$; $n=10$. По формуле (III) получим:

$$S_{10}=\frac{(2\cdot 17-3\cdot 9)\,10}{2}=7\cdot 5=35.$$

§ 83. Геометрическая прогрессия.

В арифметической прогрессии каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Рассмотрим теперь последовательности другого вида, называемые геометрическими прогрессиями.

Определение. **Геометрической прогрессией называется последовательность чисел, из которых каждое последующее равно предыдущему, умноженному на одно и то же число.**

Для обозначения геометрической прогрессии иногда употребляют знак $\div\div$, например:

$$\div\div\ 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots.$$

$$\div\div\ 2;\ -6;\ 18;\ -54;\ 162;\ \ldots.$$

$$\div\div\ 10;\ 5;\ 2{,}5;\ 1{,}25;\ 0{,}625;\ \ldots.$$

В каждой из этих прогрессий любой член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число: в первой прогрессии на 2, во второй на -3, в третьей на $\frac{1}{2}$.

Члены этой прогрессии будем также обозначать через

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n.$$

Частное от деления любого члена на предыдущий называется знаменателем прогрессии и обозначается обычно через q. В приведенных выше прогрессиях $q=2$, $q=-3$; $q=\frac{1}{2}$.

Как видим, q может быть и положительным и отрицательным числом.

Если $|q|>1$, то члены прогрессии возрастают по абсолютной величине и прогрессия называется возрастающей. Если $|q|<1$, то прогрессия называется убывающей.

Примечание. Если положить $q=1$, то получится последовательность, в которой все члены равны одному и тому же числу. Такие последовательности мы не будем причислять к прогрессиям и в дальнейшем везде будем предполагать, что $|q|$ не равно единице.

§ 84. Общий член геометрической прогрессии.

Выведем формулу, позволяющую сразу определить любой член геометрической прогрессии, не выписывая всех предшествующих членов. Если обозначить знаменатель прогрессии через q, то по определению прогрессии можем написать

$$a_2=a_1q. \qquad (1)$$

Точно так же

$$a_3=a_2q,$$

или, подставив значение a_2 из (1), получим:

$$a_3=a_1q\cdot q=a_1q^2.$$

Поступая так и далее, будем получать:

$$a_4=a_3q=a_1q^2q=a_1q^3.$$

И т. д.

Докажем, что любой член геометрической прогрессии находится по тому же закону.

Теорема. ***Всякий член геометрической прогрессии равен ее первому члену, умноженному на знаменатель прогрессии в степени, равной числу предшествующих членов.***

Значит, требуется доказать справедливость формулы:

$$a_k=a_1q^{k-1}$$

для любого натурального k. Эта формула называется **формулой общего члена** геометрической прогрессии.

Докажем теорему методом математической индукции

1) Для $k=1$ и $k=2$ формула справедлива, так как:

$$a_1 = a_1 \cdot q^0, \quad a_2 = a_1 \cdot q^1.$$

2) Допустим, что формула справедлива для $k=m$. Докажем, что тогда она будет справедлива и для числа $k=m+1$.

Действительно, из допущения следует:

$$a_m = a_1 \cdot q^{m-1}. \tag{2}$$

Умножив обе части этого равенства на q, получим:

$$a_m q = a_1 q^m. \tag{3}$$

Но

$$a_m q = a_{m+1}$$

по определению геометрической прогрессии. Сделав подстановку в (3), получим:

$$a_{m+1} = a_1 q^m.$$

Из п. 1 и 2 следует, что теорема верна для любого натурального k.

Следовательно,

$$\boldsymbol{a_k = a_1 q^{k-1}}. \tag{IV}$$

Пример. Дана прогрессия:

$$\div\div 1;\ 3;\ 9;\ \ldots.$$

Написать шестой член этой прогрессии. Здесь $a_1 = 1$; $q = 3$. Следовательно, по формуле будем иметь:

$$a_6 = a_1 q^5 = 1 \cdot 3^5 = 243.$$

§ 85. Сумма членов геометрической прогрессии.

На основании предыдущего параграфа мы можем конечную геометрическую прогрессию, состоящую из n членов, написать в таком виде:

$$a_1;\ a_1 q;\ a_1 q^2;\ \ldots;\ a_1 q^{n-1},$$

где a_1 — первый член, q — знаменатель прогрессии. Найдем сумму всех членов этой прогрессии, то есть вычислим:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}. \tag{1}$$

Чтобы быстрее прийти к цели, поступим следующим образом: умножим обе части равенства (1) на q. Под полученным результатом снова подпишем равенство (1). Будем иметь:

$$S_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n; \tag{2}$$
$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1},$$

Нетрудно видеть, что если мы вычтем почленно из верхней строки нижнюю, то взаимно уничтожатся: первый член верхней строки и второй член нижней; второй член верхней строки и третий член нижней и т. д. В итоге в правой части останутся последний член верхней строки и первый член нижней. Таким образом, будем иметь:

$$S_n q - S_n = a_1 q^n - a_1,$$

или

$$S_n (q - 1) = a_1 (q^n - 1). \tag{3}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}}. \tag{V}$$

По этой формуле, зная a_1, n и q, мы можем вычислить S_n.

Пример 1. В прогрессии:

3; 6; 12; ... найти сумму восьми членов.

По формуле (V) имеем:

$$S_8 = \frac{3 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 255 = 765.$$

Если известен и последний член прогрессии, то вычисление суммы можно несколько упростить. Мы знаем, что

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Формулу (V) можно представить в таком виде:

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1}{q - 1}.$$

Подставив теперь a_n вместо $a_1 q^{n-1}$, получим:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}}. \tag{VI}$$

Пример 2. В геометрической прогрессии:

$$a_1 = 3; \quad q = 2; \quad a_n = 96.$$

Найти сумму всех членов прогрессии.

По формуле (VI) будем иметь:

$$S_n = \frac{96 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 189.$$

Если в прогрессии $q < 1$, то в формуле (V) знаменатель будет отрицателен. В этом случае удобнее, умножив числитель и знаменатель формулы (V) на -1, записать ее в таком виде:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}}. \tag{VII}$$

Пример 3. Найти сумму шести членов прогрессии:

$$\div\div 4; \quad 2; \ 1; \ \ldots .$$

Здесь $a_1 = 4$; $q = \frac{1}{2}$; $n = 6$. По формуле (VII) получим:

$$S_6 = \frac{4\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4 \cdot \frac{63}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot 63}{64} = 7\frac{7}{8}.$$

§ 86. Бесконечные геометрические прогрессии.

Бесконечно возрастающая геометрическая прогрессия. Пусть в бесконечной геометрической прогрессии $|q| > 1$. Как бы мало q ни отличалось от единицы, все же члены прогрессии будут увеличиваться по абсолютной величине, причем, как сейчас покажем, члены прогрессии будут возрастать безгранично. Возьмем для примера прогрессию:

$$1; \ 1{,}001; \ 1{,}001^2; \ 1{,}001^3; \ \ldots . \qquad (1)$$

у которой $a_1 = 1$ и $q = 1{,}001$.

Найдем такую степень числа 1,001, которая больше 1000. Значит, мы должны иметь:

$$1{,}001^n > 1000.$$

Можно вычислить (мы это легко сделаем, когда ознакомимся с употреблением таблиц логарифмов гл. X), что это неравенство будет справедливо при $n = 7500$, а следовательно, и при всяком большем n. Итак, начиная с 7501-го члена, все члены нашей прогрессии будут больше тысячи. Точно так же можно вычислить, что, например, начиная с 15001-го члена, все члены прогрессии будут больше 1 000 000 и т. д.

Если a_1 или q, или оба будут числами отрицательными, то члены прогрессии или все, или попеременно будут отрицательными. Так, в нашем примере прогрессия примет вид: при $a_1 = 1$ и $q = -1{,}001$:

$$1; \ -1{,}001; \ 1{,}001^2; \ -1{,}001^3; \ 1{,}001^4; \ \ldots, \qquad (2)$$

при $a_1 = -1$ и $q = 1{,}001$:

$$-1; \ -1{,}001; \ -1{,}001^2; \ -1{,}001^3; \ -1{,}001^4; \ \ldots, \qquad (3)$$

при $a_1 = -1$ и $q = -1{,}001$:

$$-1; \ 1{,}001; \ -1{,}001^2; \ 1{,}001^3; \ -1{,}001^4; \ \ldots . \qquad (4)$$

Но абсолютная величина всех членов прогрессии полностью совпадает с членами рассмотренной выше прогрессии, и, следовательно, члены их неограниченно возрастают по абсолютной величине.

Что касается суммы членов бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, то она тоже возрастает неограниченно по абсолютной величине, оставаясь все время положительной (прогрессия 1), отрицательной (прогрессия 3), или поочередно меняя знак (прогрессии 2 и 4).

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Рассмотрим, наконец, бесконечную геометрическую прогрессию, у которой $|q| < 1$. Мы сейчас увидим, что в этом случае прогрессия резко отличается по своим свойствам от всех, рассмотренных в этом параграфе.

Пусть, например, дана прогрессия:

$$1;\ \frac{2}{3};\ \frac{2^2}{3^2};\ \frac{2^3}{3^3};\ \frac{2^4}{3^4};\ \ldots,\quad \text{или}\quad 1;\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{9};\ \frac{8}{27};\ \frac{16}{81};\ \ldots$$

у которой $a_1 = 1$ и $q = \frac{2}{3}$.

Мы видим, что члены этой прогрессии убывают. Но какой характер этого убывания? Может ли в этой прогрессии оказаться член, меньший $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{1000000}$ и т. д. Оказывается, не только может, но и непременно будет. Так, для того чтобы найти член, меньший $\frac{1}{1000000}$, достаточно определить, при каком значении n будет

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{1000000}.$$

С помощью таблиц логарифмов (гл. X) легко вычисляется, что уже при $n = 35$ это неравенство выполняется. Значит, 36-й член нашей прогрессии (а следовательно, и все дальнейшие) будет меньше $\frac{1}{1000000}$.

Покажем теперь, что вообще какое бы малое положительное число $\frac{1}{A}$ (где A сколь угодно большое число) ни было задано, в нашей прогрессии всегда найдется член, меньший этого числа.

Возьмем прогрессию, члены которой были бы числами, обратными членам данной прогрессии, а именно:

$$1;\ \frac{3}{2};\ \frac{3^2}{2^2};\ \frac{3^3}{2^3};\ \ldots.$$

Мы получили бесконечно возрастающую геометрическую прогрессию, в которой $a_1 = 1$ и $q = \frac{3}{2}$. Но мы уже знаем, что в такой прогрессии всегда найдется член, больший любого числа A, как бы велико оно ни было. Следовательно, найдется такое значение n, при котором:

$$\frac{3^n}{2^n} > A.$$

Отсюда

$$3^n > A \quad 2^n; \quad \frac{3^n}{A} > 2^n; \quad \frac{1}{A} > \frac{2^n}{3^n}.$$

Но последнее неравенство показывает, что как бы ни было мало число $\frac{1}{A}$, в данной прогрессии найдется член, меньший этого числа, а значит все последующие члены будут и подавно меньше его.

Покажем теперь, что в любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии члены ее убывают таким образом, что, начиная с некоторого члена, становятся и в дальнейшем остаются меньше сколь угодно малого положительного числа.

Пусть дана прогрессия

$$a; \quad aq; \quad aq^2; \quad aq^3; \quad \ldots, \tag{1}$$

где $a \neq 0$ и $q < 1$ (пока предположим, что a и q — числа положительные). Пусть дано также сколь угодно малое число $\frac{1}{A}$ (где A является сколько угодно большим числом). Покажем, что найдется такое значение n, при котором будет иметь место неравенство

$$aq^n < \frac{1}{A}. \tag{2}$$

Возьмем прогрессию, члены которой обратны членам данной, то есть прогрессию

$$\frac{1}{a}; \quad \frac{1}{aq}; \quad \frac{1}{aq^2}; \quad \ldots. \tag{3}$$

В этой прогрессии первый член равен $\frac{1}{a}$, а знаменатель прогрессии $\frac{1}{q}$ больше единицы $\left(\text{так как } q < 1 \text{ и, значит, в дроби } \frac{1}{q}\right.$ числитель больше знаменателя$\left.\right)$. Таким образом, прогрессия (3) — бесконечно возрастающая. Как мы знаем, в такой прогрессии всегда найдется член, больший любого заданного числа A. Пусть это будет $(n+1)$-й член.

Тогда будем иметь:

$$\frac{1}{aq^n} > A.$$

Отсюда

$$1 > A \cdot aq^n,$$

или

$$\frac{1}{A} > aq^n. \tag{4}$$

Но неравенство (4) есть не что иное, как то же неравенство (2), только записанное в другом порядке. Итак, наше предложение доказано.

Мы предположили, что a и q — числа положительные. Но, приняв во внимание то, что было сказано о бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, легко сообразить, что и в случае, если a или q, или оба будут числами отрицательными, то члены прогрессии (3) будут неограниченно возрастать, а члены прогрессии (1) убывать по абсолютной величине. Все наши рассуждения остаются в силе, только вместо члена a_n надо взять его абсолютную величину $|a_n|$.

Итак, мы показали, что члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии, начиная с некоторого, становятся и в дальнейшем остаются меньше (по абсолютной величине) сколь угодно малого положительного числа.

§ 87. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Пусть дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия:

$$a;\ aq;\ aq^2;\ aq^3;\ \ldots \tag{1}$$

Найдем по формуле сумму n первых членов этой прогрессии:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}. \tag{2}$$

(Мы взяли эту формулу, так как $|q| < 1$.)

С увеличением n в сумму S_n будет входить все большее и большее количество членов прогрессии (1). Поэтому, предел S_n при $n \to \infty$ и принимается за сумму членов бесконечно убывающей прогрессии (1) и обозначается буквой S.

Вычислим этот предел. На основании свойств пределов, изложенных в § 76, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \lim \frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}.$$

Так как a, q, а следовательно, и $(1-q)$ постоянные числа, то

$$\lim\frac{a}{1-q} = \frac{\lim a}{\lim(1-q)} = \frac{a}{1-q},$$

а так как $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q} = \frac{\lim aq^n}{\lim(1-q)} = \frac{0}{1-q} = 0.$$

Итак,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}; \qquad \boldsymbol{S = \frac{a}{1-q}}.$$

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна ее первому члену, деленному на разность между единицей и знаменателем прогрессии.

Примеры.

1. $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \ldots .$

Здесь

$$a=1;\ q=\frac{1}{2};\ S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

2. $1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \ldots .$

$$a=1;\ q=-\frac{1}{2};\ S=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

§ 88. Обращение десятичной периодической дроби в обыкновенную.

Как известно из арифметики, при обращении обыкновенной дроби в десятичную может получиться или конечная, или бесконечная периодическая десятичная дробь (чистая или смешанная).

Часто приходится решать и обратную задачу — представить данную десятичную периодическую дробь в виде обыкновенной, из которой эта периодическая дробь получилась. Решим эту задачу.

Начнем с примеров чистой периодической дроби. При этом мы будем брать только дроби, меньшие единицы, так как если десятичная дробь содержит целую часть, то, обратив ее дробную часть в обыкновенную дробь, достаточно прибавить к ней эту целую часть.

Пример 1. Обратить дробь 0,(7) в обыкновенную.

Имеем:

$$0{,}(7)=0{,}7777\ldots=\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\ldots .$$

Мы видим, что дробь 0,(7) является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен $\frac{7}{10}$, а знаменатель прогрессии равен $\frac{1}{10}$. По формуле, выведенной в § 87, можем написать:

$$0{,}(7)=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{7}{9}.$$

Проверить полученный результат можно, обратив дробь $\frac{7}{9}$ в десятичную.

Пример 2. Пусть дана дробь 0,(35).

Имеем:

$$0,(35)=0,353535\ldots=\frac{35}{100}+\frac{35}{10000}+\frac{35}{1000000}+\ldots.$$

Здесь $a_1=\frac{35}{10^2}$; $q=\frac{1}{10^2}$. По формуле суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии будем иметь:

$$0,(35)=\frac{\frac{35}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{\frac{35}{10^2}}{\frac{99}{10^2}}=\frac{35}{99}.$$

Пример 3. Пусть дана дробь 0,(236).

Имеем:

$$0,(236)=\frac{236}{10^3}+\frac{236}{10^6}+\frac{236}{10^9}+\ldots.$$

$$0,(236)=\frac{\frac{236}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}}=\frac{\frac{236}{10^3}}{\frac{999}{10^3}}=\frac{236}{999}.$$

Рассматривая дроби, полученные в приведенных примерах, заметим, что все они составлены по одному и тому же способу, который можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 1. ***Чистая периодическая десятичная дробь равна обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду данной дроби, а знаменатель составлен из девяток, записанных столько раз, сколько цифр в периоде.***

Доказательство. Пусть период данной чистой периодической десятичной дроби, который мы для краткости обозначим через A, содержит n цифр. Тогда будем иметь:

$$0,(A)=\frac{A}{10^n}+\frac{A}{10^{2n}}+\frac{A}{10^{3n}}+\ldots.$$

Значит,

$$0,(A)=\frac{\frac{A}{10^n}}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{\frac{A}{10^n}}{\frac{10^n-1}{10^n}}=\frac{A}{10^n-1}.$$

Это равенство и доказывает теорему. В полученной дроби числитель равен периоду A, а знаменатель равен $10^n-1=\underbrace{999\ \ldots\ 9}_{n\text{ раз}}$.

Примеры.

$$0,(24)=\frac{24}{99}=\frac{8}{33};\quad 0,(031)=\frac{31}{999};\quad 3,(3)=3\frac{3}{9}=3\frac{1}{3}.$$

Перейдем теперь к смешанным периодическим десятичным дробям.

Пример 1. Дана дробь 0,4 (23).

Имеем:

$$0{,}4\,(23)=\frac{4}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\dots.$$

$$0{,}4\,(23)=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\dots.$$

Слагаемые в правой части, начиная со второго, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{23}{10^3}$ и знаменателем прогрессии $\frac{1}{10^2}$. Тогда

$$0{,}4(23)=\frac{4}{10}+\frac{\frac{23}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{4}{10}+\frac{\frac{23}{10^3}}{\frac{10^2-1}{10^2}}=\frac{4}{10}+\frac{23}{10\,(10^2-1)}.$$

Сложив дроби в правой части, получим:

$$0{,}4(23)=\frac{4\,(10^2-1)+23}{10\,(10^2-1)}=\frac{400-4+23}{10\,(10^2-1)}=\frac{423-4}{10\,(10^2-1)}.$$

Вычислив числитель и знаменатель, найдем:

$$0{,}4(23)=\frac{419}{990}.$$

Пример 2. Дана дробь 0,47 (23).

Имеем:

$$0{,}47(23)=\frac{47}{10^2}+\frac{23}{10^4}+\frac{23}{10^6}+\frac{23}{10^8}+\dots;$$

$$0{,}47(23)=\frac{47}{10^2}+\frac{\frac{23}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{47}{10^2}+\frac{23}{10^2\,(10^2-1)}=$$

$$=\frac{47\,(10^2-1)+23}{10^2\,(10^2-1)}=\frac{4700-47+23}{10^2\,(10^2-1)}=\frac{4723-47}{10^2\,(10^2-1)}.$$

Отсюда
$$0{,}47(23)=\frac{4676}{9900}.$$

Пример 3. Дана дробь 0,87(5).

$$0{,}87\,(5)=\frac{87}{10^2}+\frac{5}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\dots;$$

$$0{,}87(5)=\frac{87}{10^2}+\frac{\frac{5}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{87}{10^2}+\frac{5}{10^2\,(10-1)}=\frac{87\,(10-1)+5}{10^2\,(10-1)}=$$

$$=\frac{870-87+5}{10^2\,(10-1)}=\frac{875-87}{10^2\,(10-1)}.$$

Окончательно

$$0,87(5)=\frac{788}{900}.$$

Рассматривая дроби, полученные в примерах 1, 2 и 3, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. ***Смешанная периодическая десятичная дробь равна обыкновенной дроби, числитель которой — разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а знаменатель составлен из девяток, записанных столько раз, сколько цифр в периоде, и нулей, записанных столько раз, сколько цифр до периода.***

Примеры.

$$0,3(871)=\frac{3871-3}{9990}=\frac{3868}{9990}=\frac{1934}{4995}.$$

$$0,27(356)=\frac{27356-27}{99900}=\frac{27329}{99900}.$$

Правильность полученных дробей во всех примерах легко проверить, обратив их в десятичные.

§ 89. Краткие исторические сведения.

Задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии имелись уже в древнейших математических сочинениях. Многие из них повторялись в различных вариациях в позднейших математических работах. Примером может служить геометрическая прогрессия с знаменателем 7.

В египетском папирусе Ахмеса (около 2000 лет до нашей эры, см. ч. 1, § 71) имеется задача:

„У 7 лиц (или в 7 домах) по 7 кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей; каждая мышь съедает по 7 колосьев ячменя; каждый колос может дать 7 мер зерна. Сколько всего?

В решении дается ответ: 19607.

В известном сочинении „Книга об абаке" итальянского математика Фибоначчи (XII, XIII в.) эта задача дана в такой форме:

„7 старух отправляются в Рим. У каждой по 7 мулов; каждый мул несет по 7 мешков; в каждом мешке по 7 хлебов; в каждом хлебе по 7 ножей; каждый нож в 7 ножнах. Сколько всего предметов?

В русских математических рукописях XVI—XVII вв. эта задача принимает такой вид:

„Идет 7 старух; у каждой старухи по 7 посохов; на всяком посохе по 7 сучков; на каждом сучке по 7 кошелей; во всяком кошеле по 7 пирогов в каждом пироге по 7 воробьев; во всяком воробье по 7 пупков".

Интересно, что число членов прогрессии со временем увеличивалось в первой задаче последний член был 7^5, во второй: 7^6 и в третьей 7^7.

Такой же многовековой путь прошла задача на геометрическую прогрессию с знаменателем 2.

Широко известна древняя индийская задача о шахматах. В ней говорится, что изобретатель шахматной игры потребовал за свое изобретение следующую награду: за первый квадрат шахматной доски уплатить одно зерно ячменя, за второй — два, за третий — четыре, и т. д., удваивая число зерен за каждый следующий квадрат.

Требование оказалось совершенно невыполнимым, так как число зерен равно:

$$N = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Этим количеством зерен можно было бы покрыть весь земной шар слоем, примерно, в 1 *см* толщиной.

В старинных русских рукописях эта задача дается в форме требования определить прирост стада овец или коз за несколько лет, если число голов в стаде ежегодно увеличивается.

В „Арифметике" Магницкого (ч. 1, § 9) эта задача дана в такой форме:

„Купец, уплатив за лошадь 156 руб., решил, что заплатил дорого, и стал отдавать лошадь обратно. Тогда продавец предложил купцу, чтобы тот уплатил ему только за 24 гвоздя в подковах, а лошадь пусть берет в придачу бесплатно. Плата же за гвозди должна быть такова: за первый гвоздь $\frac{1}{4}$ коп., за второй $\frac{1}{2}$ копейки, за третий 1 копейку и т. д., удваивая плату за каждый следующий гвоздь. Купец с радостью согласился, полагая, что в итоге выйдет не более 10 руб. Но, как легко подсчитать, плата за все гвозди выражается в сумме 41943 руб. $3\frac{3}{4}$ коп.

Задачи на арифметическую прогрессию также встречаются уже в древних математических рукописях (например, в египетских папирусах). Приведем одну старинную задачу из индийской рукописи VII—VIII вв. (являющейся списком с более древней рукописи III—IV вв.). „Путник в первый день проходит 2 единицы пути, а в каждый следующий день тремя единицами более, чем в предыдущий. Другой путник проходит в первый день 3 единицы пути, а в каждый следующий на 2 единицы больше, чем в предыдущий. Когда первый догонит второго?

ГЛАВА X.

ЛОГАРИФМЫ.

§ 90. Понятие о степени с иррациональным показателем.

В главе IV были рассмотрены свойства степени с любым рациональным показателем.

Естественно поставить вопрос: а что следует понимать под значением выражения a^n, если n — иррациональное число? Какому числу считать равными такие выражения, как, например, $3^{\sqrt{2}}$, 5^{π}, $(\sqrt{7})^{\sqrt{3}}$? Этот вопрос имеет большое теоретическое и практическое значение, так как с иррациональными показателями часто приходится встречаться в математике и ее приложениях.

Рассмотрим этот вопрос на числовом примере.

Возьмем выражение $10^{\sqrt{2}}$. Чтобы установить, какое значение придать этому выражению, поступим следующим образом.

Число $\sqrt{2}$ представим в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213\ \ldots .$$

Составим последовательность его приближенных значений с недостатком.

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots . \qquad (1)$$

Последовательность эта возрастающая, ограниченная; ее пределом и является иррациональное число $\sqrt{2}$.

Составим теперь последовательность из степеней десяти, беря показателями члены последовательности (1).

$$10^1;\ 10^{1,4};\ 10^{1,41};\ 10^{1,414};\ 10^{1,4142}. \qquad (2)$$

В последовательности (2) все показатели числа рациональные; следовательно, все ее члены — определенные числа (например, $10^{1,41} = \sqrt[100]{10^{141}}$).

Если вычислить первые члены этой последовательности с точностью, например, до 0,001, то получим:

$$10;\ 25{,}119;\ 25{,}703;\ 25{,}941;\ 25{,}953.$$

(Изучив настоящую главу, учащиеся сами легко произведут эти вычисления при помощи таблицы логарифмов.)

Каждый член последовательности (2) больше предыдущего (§ 35, теорема 5). Следовательно, эта последовательность — монотонная, возрастающая. Эта последовательность ограниченная, так как все ее члены меньше, например, 10^2.

Следовательно (§ 77), эта последовательность имеет предел.

Вот это число, являющееся пределом последовательности (2), мы и будем считать значением выражения $10^{\sqrt{2}}$.

Те же самые рассуждения можно полностью повторить для степени любого положительного числа с иррациональным показателем.

Следовательно, мы можем дать такое определение:

Определение. **Степень положительного числа с иррациональным показателем n равна пределу, к которому стремится последовательность рациональных степеней этого числа, когда последовательность их показателей стремится к числу n.**

К этому определению сделаем следующие замечания:

1) В определении не указывается, каким образом последовательность рациональных показателей стремится к показателю n, ибо это является несущественным. Действительно, мы могли бы, например, взять последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ с избытком.

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ \ldots \tag{3}$$

Мы получили бы монотонную, убывающую, ограниченную последовательность чисел:

$$10^2;\ 10^{1,5};\ 10^{1,42};\ \ldots, \tag{4}$$

которая имеет определенный предел. Этот предел мы и могли принять за значение $10^{\sqrt{2}}$.

Можно доказать, что этот предел будет тот же, что и для последовательности (2).

В связи с этим мы могли бы определить число $10^{\sqrt{2}}$ неравенством

$$10^{\alpha} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{\beta},$$

где α и β — любые приближенные значения $\sqrt{2}$, первое с недостатком, второе с избытком.

2) В разобранном выше примере за основание степени было взято число 10, большее единицы. Если взять основание, меньшее единицы, то все рассуждения и выводы останутся теми же, только последовательность (2) будет убывающей, а последовательность (4) возрастающей.

3) Степень с отрицательным иррациональным показателем определяется так же, как степень с рациональным отрицательным показателем:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

4) Можно доказать, что действия со степенями с иррациональным показателем выполняются по тем же правилам, которые были выведены для степеней с рациональным показателем.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};\ a^m : a^n = a^{m-n};\ (a^m)^n = a^{mn};\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Все эти равенства справедливы для любых действительных показателей. Мы это положение примем без доказательства.

5) Для положительных действительных чисел остаются справедливыми и теоремы 4, 5 и 6 § 35:

если $a > 1$ и $n > 0$, то $a^n > 1$.
если $a > 1$ и $n_1 > n_2$, то $a^{n_1} > a^{n_2}$;
если $a > 1$ и $a^{n_1} > a^{n_2}$, то $n_1 > n_2$.

§ 91. Показательная функция.

1. Задача. *Население города в настоящий момент составляет a человек. Высчитано, что ежегодно население увеличивается в среднем на $p\%$. Чему равно будет население города через x лет?*

Решение. $p\%$ от a человек составит $\frac{ap}{100}$ человек. Таков будет прирост населения за первый год. Значит через год население города будет составлять

$$A_1 = a + \frac{ap}{100} = a\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ человек.} \qquad (1)$$

За второй год прирост населения составит $p\%$ уже от A_1, то есть составит $\frac{A_1p}{100}$ человек. Значит, через два года все население будет составлять

$$A_2 = A_1 + \frac{A_1p}{100} = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) \text{ человек.}$$

Сделав подстановку из (1), получим:

$$A_2 = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

Совершенно таким же образом найдем, что через три года население составит

$$A_3 = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \text{ человек.}$$

Отсюда заключаем, что через x лет население города составит

$$A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \qquad (2)$$

Формула (2) называется формулой *сложных процентов*. По этой формуле начисляется процентная сумма на вклад в сберегательную кассу (за каждый следующий год процентная сумма, начисляется не только на первоначально положенную сумму, но и на процентную сумму, начисленную за предыдущие годы).

В приведенной выше задаче x может принимать не только целые, но любые действительные значения (можно говорить о приросте населения за $5\frac{1}{2}$ лет, за 7,3 года и т. п.).

В формуле (2) переменная величина A является функцией переменной величины x, причем аргумент x является показателем степени.

Такие функции называются *показательными*.

Определение. **Показательной функцией называется функция вида**

$$y = a^x,$$

где a — постоянное число, а x — независимое переменное (аргумент).

Исследуем функцию $y = a^x$, считая, что x принимает любые действительные значения. Начнем с частного примера.

2. Функция $y = 10^x$. Пусть имеем функцию

$$y = 10^x.$$

Рассмотрим некоторые свойства этой функции, а потом построим ее график.

1) Функция $y = 10^x$ имеет положительное значение при всех значениях x.

Пусть x — положительное рациональное число. Так как $10 > 1$, то по теореме 4 § 35 будем иметь:

$$10^x > 1,$$

а значит, и подавно

$$10^x > 0.$$

Пусть x — положительное иррациональное число. Тогда число 10^x заключено между двумя положительными рациональными числами:

$$10^{x_1} < 10^x < 10^{x_2},$$

где x_1 и x_2 — приближенные значения x с недостатком и с избытком (§ 90). Следовательно, и само число 10^x является положительным.

Пусть x — отрицательное число: $x = -m$ $(m > 0)$.

Тогда

$$10^x = 10^{-m} = \frac{1}{10^m},$$

и так как по доказанному $10^m > 0$, то и $\frac{1}{10^m} > 0$.

Итак, функция 10^x имеет положительное значение при любом действительном x.

2) Функция $y=10^x$ — монотонно возрастающая.

Пусть $x_1 < x_2$. Тогда (§ 35) будем иметь:

$$10^{x_1} < 10^{x_2} \quad \text{или} \quad y_1 < y_2,$$

то есть большему значению аргумента соответствует и большее значение функции.

3) При $x=0$ $y=1$; при $x>0$ $y>1$; при $x<0$ $y<1$.

При $x=0$

$$y=10^0=1$$

по определению нулевой степени. А так как функция $y=10^x$ монотонно возрастающая (п. 2), то:

$$\text{при } x<0 \ y<1; \quad \text{при } x>0 \ y>1.$$

Построим теперь график функции $y=10^x$.

Вычислим приближенные значения y при некоторых значениях x.

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
10^x	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10

Построив полученные точки и приняв во внимание промежуточные значения x, а также то, что функция возрастает с возрастанием x, получим график функции $y=10^x$ в таком виде (черт. 48).

На графике наглядно видны все перечисленные выше свойства функции $y=10^x$.

3. Функция $y=a^x$. Исследуем теперь показательную функцию в общем виде. Но прежде наложим некоторые ограничения на постоянное число a.

Если $a=0$, то при $x>0$ $y=0$, а при $x \leqslant 0$ y не имеет смысла. Поэтому будем считать, что $a \neq 0$.

Если a — число отрицательное, то при $x=1, 2, 3, \ldots$ y будет принимать то положительные, то отрицательные значения. При дробном же значении x с четным знаменателем функции y теряет смысл. (Например, при $a=-3$ и $x=\frac{1}{2}$ будем иметь $y=\sqrt{-3}$ — выражение, не имеющее смысла.) Поэтому будем считать a положительным числом.

При $a=1$ будем иметь $y=1^x=1$ при любом x.

Так как эта функция не представляет интереса, будем считать, что $a \neq 1$.

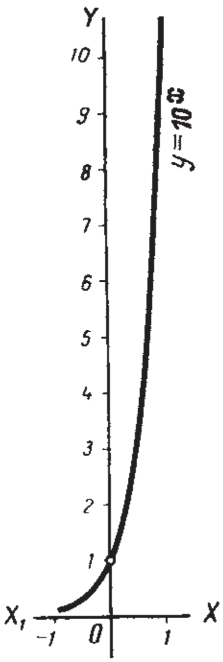
Итак, в дальнейшем будем считать a положительным числом, не равным единице.

Рассмотрим подробно случай, когда $a > 1$, так как в дальнейшем с такой функцией нам и придется иметь дело.

Итак, исследуем свойства функции $y = a^x$, где $a > 1$, а x принимает любые действительные значения.

Выше мы рассмотрели функцию $y = a^x$ при $a = 10$, то есть при $a > 1$. Поэтому можно ожидать, что свойства, установленные для функции $y = 10^x$, будут справедливы и для любого $a > 1$. Действительно.

1. ***Функция a^x положительна при любом значении x.***
2. ***Функция a^x монотонно возрастающая.***
3. ***При $x = 0$ $y = 1$; при $x > 0$ $y > 1$; при $x < 0$ $y < 1$.***



Черт. 48.

Предлагаем учащимся доказать эти свойства совершенно так же, как они выше были доказаны для функции $y = 10^x$.

Из свойства 1 следует, что график функции $y = a^x$ весь расположен выше оси абсцисс (так как при всех значениях x значения ординаты y положительны).

Из свойств 2 и 3 следует:

1) что точка (0; 1) принадлежит графику;

2) что при увеличении x от 0 до бесконечности ордината y возрастает тоже до бесконечности;

3) что при уменьшении x от 0 до $-\infty$ ордината уменьшается, приближаясь как угодно близко к нулю (никогда не достигая его в силу свойства 1).

Таким образом, график функции $y = a^x$ будет иметь примерно такой вид (черт. 49).

В зависимости от значения a график функции будет при большем a более круто подниматься при увеличении x. (На черт. 49 график построен для $a = 2$. Сравнить с чертежом 48, где график построен для $a = 10$.)

Мы рассмотрели функцию $y = a^x$ при $a > 1$. Перечислим кратко свойства этой функции при положительном a, меньшем единицы: $0 < a < 1$.

1. ***Функция a^x положительна при всех значениях x.***

Так как $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Следовательно, по доказанному выше:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x > 0, \text{ или, что то же, } \frac{1}{a^x} > 0.$$

Но это может быть только, когда $a^x > 0$.

2. *Функция a^x монотонно убывающая.*

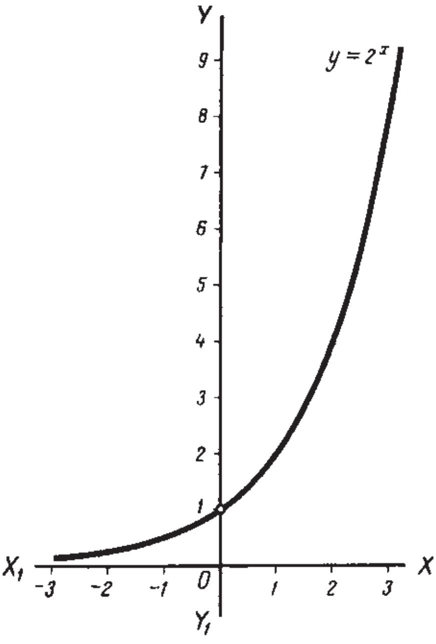
Так как $\frac{1}{a} > 1$, то при $x_1 < x_2$ имеем:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2} \text{ или } \frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}.$$

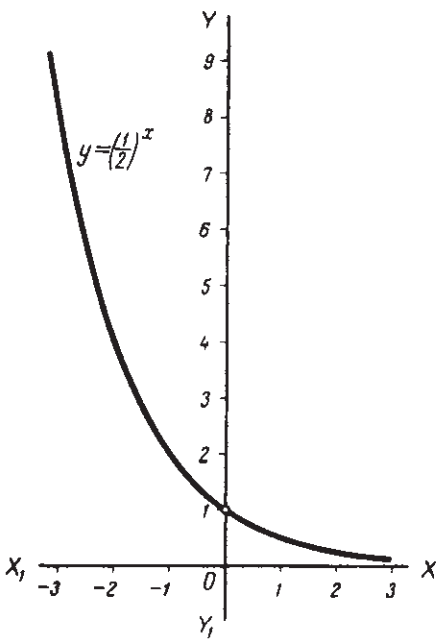
Отсюда после умножения неравенства на положительное число $a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ получим:

$$a^{x_2} < a^{x_1}.$$

Итак, функция a^x при $a < 1$ с увеличением аргумента x убывает, то есть является монотонно убывающей.



Черт. 49.



Черт. 50.

3. *При $x = 0$ $a^x = 1$, при $x > 0$ $a^x < 1$, при $x < 0$ $a^x > 1$.*

Действительно: $a^0 = 1$ по определению нулевой степени. А так как функция монотонно убывающая (п. 2), то:

при $x > 0$ $a^x < 1$;
при $x < 0$ $a^x > 1$.

Все перечисленные свойства наглядно подтверждаются графиком функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)$ (черт. 50).

§ 92. Понятие о логарифме.

В показательной функции

$$y = a^x \tag{1}$$

каждому значению x соответствует определенное значение y. Это значение можно определить вычислением или по графику показательной функции.

Например, при $x = 2$ $y = a^2$, при $x = \frac{1}{2}$ $y = \sqrt{a}$ и т. д.

Поставим обратную задачу: пусть дано некоторое значение y и требуется найти соответствующее значение x, удовлетворяющее равенству (1).

Например, пусть для функции $y = 10^x$ требуется найти значение x, соответствующее $y = 100$. Очевидно, $x = 2$, так как $10^2 = 100$.

Таким образом, в равенстве (1) известно значение y и требуется найти показатель x такой, что, возведя a в степень x, получим заданное значение y. В этом случае x называется логарифмом числа y по основанию a. Так в предыдущем примере число 2 является логарифмом числа 100 по основанию 10.

Определение. **Логарифмом числа N по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить N.**

Записывается логарифм так:

$$x = \log_a N.$$

Символ log есть сокращение слова логарифм, а за ним внизу записывается основание a, которое надо возвести в степень x, чтобы получить N.

Читается запись: икс равно логарифму N по основанию a.

Так, приведенный выше пример можно записать:

$$\log_{10} 100 = 2.$$

Точно так же

$$\log_2 8 = 3, \text{ так как } 2^3 = 8;$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}, \text{ так как } 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\log_4 \frac{1}{16} = -2, \text{ так как } 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$$

Из определения логарифма числа N по основанию a следует

$$a^{\log_a N} = N.$$

По существу это равенство есть не что иное, как краткая запись определения логарифма: именно это равенство показывает, что $\log_a N$ есть показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить N.

П р и м е р ы.

1. $\log_2 8 = 3;\quad 2^{\lg_2 8} = 2^3 = 8.$

2. $\log_{10} 10\,000 = 4;\quad 10^{\log_{10} 10\,000} = 10^4 = 10\,000.$

3. $\log_{49} 7 = \frac{1}{2};\quad 49^{\log_{49} 7} = 49^{\frac{1}{2}} = 7.$

§ 93. Логарифмическая функция.

1. Функция $y = \log_{10} x$. В показательной функции

$$y = 10^x \tag{1}$$

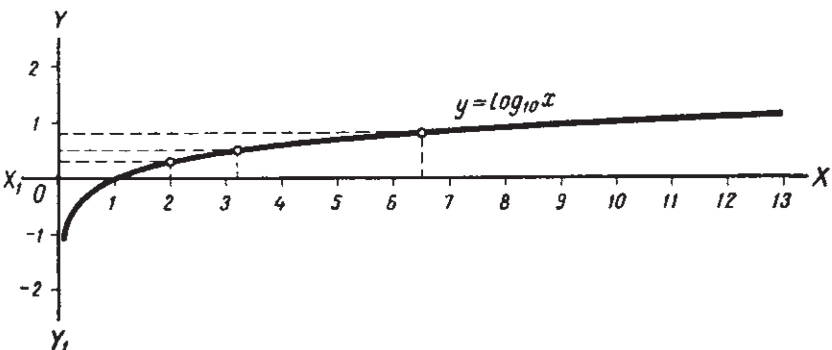
выразим x через y. Согласно § 92 получим:

$$x = \log_{10} y. \tag{2}$$

Здесь x является функцией y. Обозначая как обычно, аргумент через x, а функцию через y, получим:

$$y = \log_{10} x. \tag{3}$$

Функция (3) является обратной по отношению к функции (1). Она называется логарифмической функцией. Следовательно, график этой функции можно получить, повернув график показательной функции (1) на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла (черт. 51).



Черт. 51.

Рассматривая чертеж 51, можем установить некоторые свойства логарифмической функции (3).

1) Весь график функции (3) расположен вправо от оси ординат; значит, абсцисса x принимает только положительные значения. Отсюда следует: ***отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.***

2) При любой положительной абсциссе соответствующая ордината непременно пересечет график функции (3) и притом только в одной точке. Отсюда ***всякое положительное число имеет логарифм и притом единственный.***

3) При $x=1$ график пересекает ось абсцисс. ***Логарифм единицы равен нулю.***

4) При $x=10$ $y=1$; значит: ***логарифм основания равен единице.***

5) Из чертежа 51 видим, что с увеличением абсциссы x увеличивается и ордината y. Значит: ***большему числу соответствует и больший логарифм.***

Иначе это свойство можно выразить так:

Функция $y=\log_{10} x$ — монотонно возрастающая.

6) Из чертежа видим, что при значениях x, меньших единицы, график расположен ниже оси абсцисс, то есть ординаты его точек отрицательны. Наоборот, при значениях x, бóльших единицы, график расположен выше оси абсцисс, то есть ординаты его точек положительны.

Логарифмы чисел, бóльших единицы, положительны; логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.

Впрочем, это свойство прямо вытекает из п. 3 и 5. Действительно, по п. 3 логарифм единицы равен нулю. А тогда по п. 5 логарифмы чисел, бóльших единицы, должны быть больше нуля, а чисел, меньших единицы — меньше нуля.

График логарифмической функции позволяет найти приближенное значение логарифмов чисел. Найдем, например $\log_{10} 2$. На оси абсцисс находим точку 2 и из нее проводим перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с графиком (черт. 51).

Ордината точки пересечения, приблизительно равная 0,3, и дает значение $\log_{10} 2$ с точностью до 0,1.

$$\log_{10} 2 = 0{,}3.$$

Таким же образом найдем, например, что $\log_{10} 6{,}5 = 0{,}8$.

Тот же график может служить и для решения обратной задачи: по данному логарифму числа найти само это число.

Пусть, например, $\log_{10} x = 0{,}5$. На оси ординат находим точку 0,5 и из нее проводим перпендикуляр к этой оси до пересечения с графиком.

Абсцисса точки пересечения, приблизительно равная 3,2, и даст значение x.

2. Функция $y=\log_a x$. Возьмем теперь показательную функцию в общем виде:

$$y=a^x,$$

где $a>0$ и $a \neq 1$.

Выражая x через y, получим согласно § 92:

$$x=\log_a y.$$

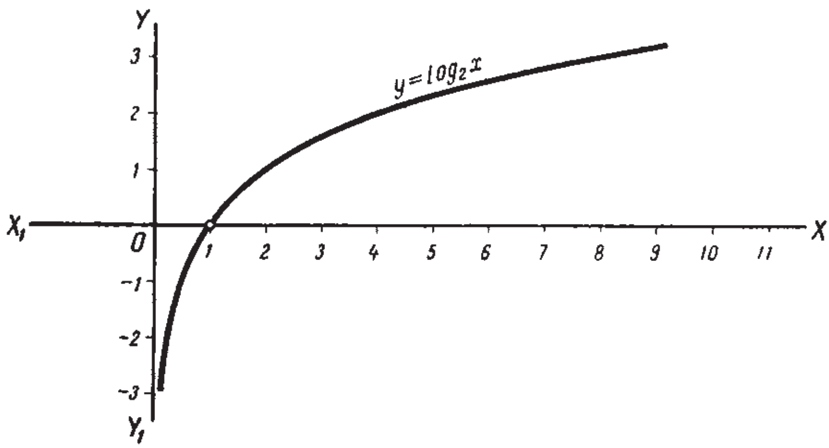
Здесь x является функцией y. Обозначая, как обычно, аргумент через x, а функцию через y, получим:

$$y=\log_a x.$$

Определение. **Логарифмической функцией при основании a называется функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$.**

В настоящем параграфе мы рассмотрим логарифмическую функцию при основании a, большем единицы: $a > 1$.

Функция $y = \log_a x$ является обратной по отношению к функции $y = a^x$. Следовательно, ее график можно получить, повернув график функции $y = a^x$ (черт. 49) на 180° вокруг биссектрисы первого координатного угла (черт. 52).



Черт. 52.

3. Логарифмические таблицы. Выше было показано, как по графику логарифмической функции можно определить логарифм какого-либо числа и, наоборот, как по данному логарифму числа найти это число. Но график дает довольно грубое приближение.

Поэтому в вычислениях, требующих большей точности, обычно пользуются логарифмическими таблицами.

В таблицах даются логарифмы всех чисел с точностью до трех, четырех, пяти и т. д. десятичных знаков. Соответственно этому и таблицы называются трехзначными, четырехзначными и т. д.

В настоящем курсе мы будем пользоваться четырехзначными таблицами логарифмов.

Тогда в примерах, приведенных выше, мы пришли бы к таким результатам:

1) $\log_{10} 2 = 0{,}3010$; 2) $\lg_{10} 6{,}5 = 0{,}8129$; 3) $x = 3{,}162$.

В практике, например, при измерительных работах на местности обычно достаточна точность до трех-четырех десятичных знаков. В более тонких вычислениях пользуются и более точными таблицами. Например, при астрономических вычислениях иногда бывает необходимо пользоваться четырнадцатизначными таблицами.

§ 94. Свойства логарифмов.

В предыдущем параграфе из рассмотрения графика функции $y=\log_{10} x$ мы установили некоторые свойства этой функции. Здесь мы покажем, что этими свойствами обладает всякая логарифмическая функция, основание которой больше единицы. Пусть дана функция:

$$y=\log_a x, \tag{1}$$

где $a>1$.

Отсюда по определению логарифма (§ 92) имеем:

$$x=a^y. \tag{2}$$

Исходя из этого равенства, выведем свойства логарифмов.

1. ***Отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют.***

Равенство (2) показывает, что при любом значении y число x может быть только положительным (§ 90). Значит, и в равенстве (1) аргумент x может быть только положительным числом. Наглядно это положение подтверждается тем, что график функции (1) (черт. 52) целиком лежит справа от оси ординат, то есть абсциссы всех его точек положительны.

2. ***Всякое положительное число имеет логарифм и притом единственный.***

Это свойство можно доказать, но мы примем его без доказательства, основываясь на наглядности: при любом положительном значении абсциссы x ордината y непременно пересечет график функции (1) и притом только в одной точке.

3. ***Логарифм единицы равен нулю***

$$\log_a 1=0.$$

Действительно, из равенства (2) при $x=1$ имеем:

$$a^y=1.$$

При a, не равном единице, это равенство возможно лишь при $y=0$.

Наглядно это подтверждается тем, что при $x=1$ график пересекает ось абсцисс.

4. ***Логарифм основания равен единице.***.

Действительно, из равенства (2) при $x=a$ имеем:

$$a=a^y,$$

что возможно только при $y=1$. Наглядно это подтверждается тем, что при $x=a$ ордината соответствующей точки графика равна единице (на черт. 52 $a=2$).

5. ***При основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм.***

Пусть:

$$x_1 = a^{y_1} \quad \text{и} \quad x_2 = a^{y_2}.$$

При $x_1 < x_2$ будем иметь:

$$a^{y_1} < a^{y_2},$$

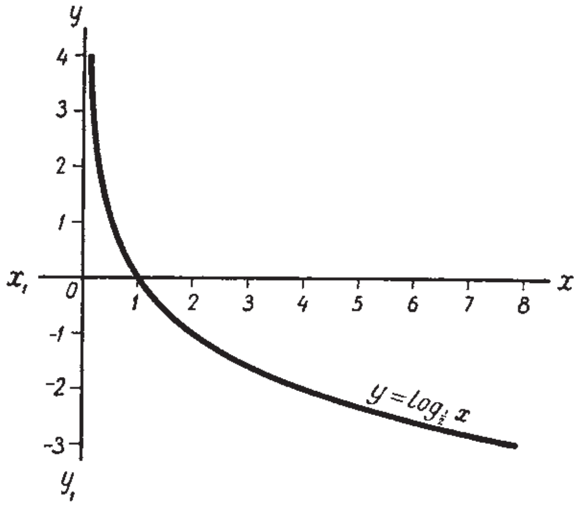
а отсюда следует (§ 90, п. 5):

$$y_1 < y_2.$$

Это свойство можно выразить и так: при основании a, большем единицы, функция $y = \log_a x$ — монотонно возрастающая.

Графически это свойство выражается в том, что с возрастанием абсциссы x возрастают и ординаты соответствующих точек графика функции (1).

6. ***При основании, большем единицы, логарифмы чисел, бо́льших единицы, положительны, а логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны.***



Черт. 53.

Это свойство вытекает из п. 3 и 5.

Так как $\log_a 1 = 0$, то из п. 5 следует, что при $x > 1$ $y > 0$, а при $x < 1$ $y < 0$.

Графически это свойство выражается в том, что при всех значениях x, бо́льших единицы, график функции (1) лежит выше оси абсцисс, а при значениях x, меньших единицы, ниже оси абсцисс.

Выше были рассмотрены свойства логарифмов при основании, большем единицы.

Возьмем теперь за основание положительное число, меньшее единицы, например $a = \frac{1}{2}$.

График функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дан на чертеже 53.

Предлагаем учащимся из рассмотрения этого чертежа показать, что при основании, меньшем единицы, первые четыре из рассмотренных в этом параграфе свойств сохраняются, а последние два изменяются. Сформулировать эти два свойства при $a < 1$.

§ 95. Теоремы о логарифмах.

Докажем относительно логарифмов теоремы, которые в дальнейшем окажут большую помощь при практических вычислениях сложных арифметических выражений.

Теорема 1. ***Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.***

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

Доказательство. По определению логарифма имеем:

$$M = a^{\log_a M};$$

$$N = a^{\log_a N}$$

Перемножив эти равенства, получим:

$$MN = a^{\log_a M + \log_a N}$$

Отсюда (по определению логарифма):

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

Пример.

$$\log_2 8\sqrt{2} = \log_2 8 + \log_2 \sqrt{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Действительно, так как $8\sqrt{2} = 2^3 \quad 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3\frac{1}{2}}$, то $\log_2 8\sqrt{2} = \log_2 2^{3\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$.

Доказательство можно было провести совершенно так же, если взять произведение трех, четырех и т. д. сомножителей.

Значит, теорема верна и для любого конечного числа сомножителей. Это можно записать так:

$$\log_a M_1 M_2 \ldots M_k = \log_a M_1 + \log_a M_2 + \ldots + \log_a M_k.$$

Теорема 2. ***Логарифм степени равен показателю степени, умноженному на логарифм основания.***

$$\log_a M^k = k \log_a M.$$

Доказательство. Имеем по определению:

$$M = a^{\log_a M}.$$

Возведем обе части этого равенства в степень k. Отсюда

$$M^k = (a^{\log_a M})^k = a^{k \log_a M}; \quad \log M^k = k \log_a M.$$

Пример.

$$\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10.$$

Действительно, так как $9^5 = (3^2)^5 = 3^{10}$, то

$$\log_3 9^5 = \log_3 3^{10} = 10 \log_3 3 = 10.$$

Теорема 3. ***Логарифм дроби равен логарифму числителя минус логарифм знаменателя.***

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

Доказательство. По определению логарифма имеем:

$$M = a^{\log_a M}; \quad N = a^{\log_a N}.$$

Разделив первое на второе, получим:

$$\frac{M}{N} = a^{\log_a M - \log_a N}.$$

Отсюда

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

Пример.

$$\log_5 \frac{25}{\sqrt[3]{5}} = \log_5 25 - \log_5 \sqrt[3]{5} = 2 - \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Действительно, так как

$$\frac{25}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5^2}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{2-\frac{1}{3}} = 5^{1\frac{2}{3}},$$

то

$$\log_5 \frac{25}{\sqrt[3]{5}} = \log_5 5^{1\frac{2}{3}} = 1\frac{2}{3} \log_5 5 = 1\frac{2}{3}.$$

Теорема 4. ***Логарифм корня равен логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель корня.***

$$\log_a \sqrt[k]{M} = \frac{1}{k} \log_a M.$$

Доказательство. Имеем по определению:

$$M = a^{\log_a M}.$$

Извлечем из обеих частей этого равенства корень степени k.

$$\sqrt[k]{M}=\sqrt[k]{a^{\log_a M}}=a^{\frac{\log_a M}{k}}$$

Отсюда по определению логарифма

$$\log_a \sqrt[k]{M}=\frac{\log_a M}{k}=\frac{1}{k}\log_a M.$$

Пример.

$$\log_4 \sqrt[5]{2}=\frac{1}{5}\log_4 2=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}.$$

Действительно, так как

$$\sqrt[5]{2}=\sqrt[10]{2^2}=4^{\frac{1}{10}},$$

то

$$\log_4 \sqrt[5]{2}=\log_4 4^{\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}\log_4 4=\frac{1}{10}.$$

§ 96. Логарифмирование и потенцирование алгебраических выражений.

1. Логарифмирование. В § 93 было сказано, что логарифм какого-либо данного числа можно найти, пользуясь или графиком логарифмической функции, или таблицей логарифмов.

Теоремы, доказанные в § 95, позволяют найти логарифм сложного выражения, зная логарифмы чисел, которые входят в это выражение.

Нахождение логарифма данного выражения коротко называется *логарифмированием* этого выражения.

Пример.

$$x=\frac{3{,}87^2\cdot\sqrt[3]{68}}{\sqrt[5]{0{,}86^2}}. \qquad (1)$$

На основании теоремы 3 § 95 пишем:

$$\log x=\log\left(3{,}87^2\cdot\sqrt[3]{68}\right)-\log\sqrt[5]{0{,}86^2};$$

по теореме 1:

$$\log x=\log 3{,}87^2+\log\sqrt[3]{68}-\log\sqrt[5]{0{,}86^2};$$

по теоремам 2 и 4:

$$\log x=2\log 3{,}87+\frac{1}{3}\log 68-\frac{2}{5}\log 0{,}86. \qquad (2)$$

Найдя логарифмы чисел 3,87; 68; 0,86 и произведя над ними указанные действия, найдем и логарифм данного выражения.

Следует приобрести навык, логарифмируя данное выражение, сразу писать окончательное выражение, например, логарифмируя выражение (1) сразу писать (2).

Примечание. Пусть требуется логарифмировать выражение:

$$x = \frac{a^2 (b+c)^3}{(m-n)^2}.$$

Будем иметь (предполагаем, что $b+c>0$ и $m-n>0$):

$$\log x = 2\log a + 3\log(b+c) - 2\log(m-n).$$

Мы не имеем правила, по которому можно было бы логарифм суммы выразить через логарифмы слагаемых, или логарифм разности через логарифмы уменьшаемого и вычитаемого. Поэтому, чтобы найти $\log(b+c)$ и $\log(m-n)$, надо предварительно выполнить сложение и вычитание чисел, заключенных в скобки.

2. Потенцирование. Запишем формулы, выведенные в § 95, в обратном порядке.

$$\log M + \log N = \log MN; \tag{1}$$

$$k\log M = \log M^k; \tag{2}$$

$$\log M - \log N = \log \frac{M}{N}; \tag{3}$$

$$\frac{1}{k}\log M = \log \sqrt[k]{M}. \tag{4}$$

Пусть в результате логарифмирования некоторого выражения x получили:

$$\log x = \log a + \log b. \tag{5}$$

Какое выражение было логарифмировано?

На основании равенства (1) можем написать:

$$\log a + \log b = \log ab,$$

или

$$\log x = \log ab.$$

Отсюда следует:

$$x = ab. \tag{6}$$

Из выражения (5) мы получили выражение (6). Такое преобразование называется потенцированием.

Потенцировать данное выражение — значит найти то выражение, в результате логарифмирования которого получилось данное выражение.

Пример.

$$\log x = 3\log a + \frac{1}{5}\log b - 4\log c.$$

На основании формул (2) и (4) можем написать:

$$\log x = \log a^3 + \log \sqrt[5]{b} - \log c^4.$$

На основании формул 1 и 3:

$$\log x = \log \frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{c^4}.$$

Отсюда

$$x = \frac{a^3 \sqrt[5]{b}}{c^4}.$$

§ 97. Десятичные логарифмы.

Как уже сказано выше (§ 93), можно составить таблицы логарифмов, взяв за основание любое положительное число, не равное единице. Практически оказывается наиболее целесообразным взять за основание число 10, что связано с принятой у нас десятичной системой счисления. Логарифмы, вычисленные по основанию десять, коротко называют просто десятичными. Для десятичных логарифмов вместо обозначения log употребляют lg. Поэтому, например, выражение $\lg 3$ обозначает логарифм числа 3, вычисленный по основанию 10.

Отметим некоторые свойства десятичных логарифмов (в добавление к свойствам, выведенным в § 94 для логарифмов при любом основании, большем единицы).

1. Логарифм степеней десяти. Из самого определения логарифма следует, что

$$\lg 10^k = k \tag{1}$$

при любом k. Отсюда выведем некоторые частные случаи, которые в дальнейшем окажут помощь при вычислениях.

Теорема 1. ***Логарифм натуральной степени десяти равен числу нулей в десятичной записи этой степени.***

Из равенства (1) следует:

$$\lg 10 = 1; \quad \lg 100 = \lg 10^2 = 2; \quad \lg 1000 = 3 \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$\lg \underbrace{100\ldots0}_{k \text{ нулей}} = \lg 10^k = k.$$

Теорема 2. ***Логарифм десятичной дроби, изображаемой единицей с предшествующими нулями, равен отрицательному числу, абсолютная величина которого равна числу нулей в данной дроби, считая и нуль целых.***

Из того же равенства (1) следует:

$$\lg 0{,}1 = \lg 10^{-1} = -1; \quad \lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2, \text{ и т. д.}$$

Вообще

$$\lg \underbrace{0{,}00\ldots0}_{k \text{ нулей}}1 = \lg 10^{-k} = -k.$$

2. Логарифмы рациональных чисел. Если рациональное число не является целой степенью десяти, то его логарифм — иррациональное число.

Покажем это на примерах.

1) Допустим, что логарифм числа 15 равен рациональному числу. Мы можем его записать в виде рациональной дроби $\frac{m}{n}$:

$$\lg 15 = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Отсюда

$$10^{\frac{m}{n}} = 15.$$

Или по возведении обеих частей в степень n:

$$10^m = 15^n. \tag{2}$$

Правая часть этого равенства делится на 3, а левая не делится. Следовательно, равенство (2), а значит и (1), невозможно. А так как всякое положительное число имеет логарифм (§ 94), то отсюда следует, что $\lg 15$ является иррациональным числом.

2) Пусть $\lg 20 = \frac{m}{n}$. $\quad$ (3)

Отсюда

$$10^m = 20^n = (2^2 \cdot 5)^n,$$

или

$$2^m \quad 5^m = 2^{2n} \cdot 5^n. \tag{4}$$

Обе части содержат только множители 2 и 5, но левая содержит одинаковое число обоих множителей, а правая различное. Стало быть, равенство (4), а значит и (3), невозможно, и $\lg 20$ — число иррациональное.

3. Логарифмы иррациональных чисел. Логарифм иррационального числа может быть как рациональным, так и иррациональным числом.

Примеры.

1. $\lg \sqrt[5]{100} = \frac{1}{5} \lg 100 = \frac{2}{5}$.

2. $\lg \sqrt{7} = \frac{1}{2} \lg 7$.

Но $\lg 7$ — иррациональное число. Следовательно, и $\lg \sqrt{7} = \frac{1}{2} \lg 7$ — число иррациональное.

4. Характеристика и мантисса. Логарифм любого числа можно записать в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной. В практических вычислениях логарифмы записываются с таким числом десятичных знаков, какое требует степень точности вычислений.

Всякую десятичную дробь можно представить в виде суммы целого числа и положительной дроби, меньшей единицы.

Примеры.

$$37{,}42 = 37 + 0{,}42; \quad -5{,}623 = -6 + 0{,}377; \quad 0{,}23 = 0 + 0{,}23;$$
$$-0{,}8 = -1 + 0{,}2.$$

В дальнейшем будем записывать логарифм любого числа в виде суммы целого числа и положительной десятичной дроби, меньшей единицы. Целесообразность такой записи будет показана ниже (п. 6, примечание). Целая часть логарифма называется его *характеристикой*, а дробная — *мантиссой*.

Логарифмы с положительной характеристикой и характеристикой нуль записываются по-прежнему, например:

$$3{,}72; \quad 0{,}23.$$

Логарифмы с отрицательной характеристикой записываются так: характеристика записывается перед запятой, но знак минус ставится не перед ней, а над ней, например:

$$-2{,}3842 = -3 + 0{,}6158 = \bar{3}{,}6158; \quad -0{,}354 = -1 + 0{,}646 = \bar{1}{,}646.$$

Эта запись показывает, что знак минус относится только к целой части, а не ко всему числу.

5. Нахождение характеристики. Покажем, как по виду числа можно сразу определить характеристику его логарифма.

1) Так как

$$10 < 37{,}42 < 100,$$

то

$$\lg 10 < \lg 37{,}42 < \lg 100,$$

или

$$1 < \lg 37{,}42 < 2.$$

Значит, $\lg 37{,}42$ равен единице с дробью. Характеристика логарифма равна 1.

2) Так как

$$100 < 253 < 1000,$$

то

$$\lg 100 < \lg 253 < \lg 1000,$$

или

$$2 < \lg 253 < 3.$$

Значит, $\lg 253$ равен двум единицам с дробью. Характеристика равна двум.

3) Таким же способом найдем, что характеристика $\lg 57856{,}4$ равна 4.

Во всех примерах характеристика была на единицу меньше числа цифр в целой части числа.

Теорема 3. ***Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр в целой части числа.***

Доказательство. Пусть число M содержит n целых цифр. Наименьшее число, содержащее n цифр, будет единица с $n-1$ нулями, а наименьшее число, содержащее уже $n+1$ цифр, то есть большее числа M, будет единица с n нулями.

Следовательно, можем записать:

$$\underbrace{1000\ldots0}_{(n-1)\text{ нулей}} < M < \underbrace{100\ldots0}_{n\text{ нулей}}.$$

Отсюда, взяв логарифмы этих чисел:

$$n-1 < \lg M < n.$$

Это неравенство показывает, что $\lg M$ содержит $n-1$ целых единиц плюс какая-то положительная дробь, меньшая единицы. Значит, характеристика логарифма равна $n-1$, то есть на единицу меньше числа целых цифр в числе M.

Возьмем теперь числа, меньшие единицы.

1) Так как

$$0{,}1 < 0{,}321 < 1,$$

то

$$\lg 0{,}1 < \lg 0{,}321 < \lg 1,$$

или

$$-1 < \lg 0{,}321 < 0.$$

Значит, $\lg 0{,}321$ равен -1 плюс положительная дробь, меньшая единицы, то есть его характеристика равна -1.

2) Так как

$$0{,}01 < 0{,}0103 < 0{,}1,$$

то

$$-2 < \lg 0{,}0103 < -1.$$

Отсюда видно, что характеристика $\lg 0{,}0103$ равна -2.

Таким же способом найдем, что характеристика $\lg 0{,}005306$ равна -3.

Во всех примерах характеристика логарифма была отрицательная, равная по абсолютной величине числу нулей в данном числе, стоящих до первой значащей цифры.

Теорема 4. ***Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько в числе нулей, стоящих до первой значащей цифры, считая и нуль целых.***

Доказательство. Пусть число M содержит n нулей до первой значащей цифры.

Его можно записать так:

$$M = \underbrace{0{,}00 \ldots 0}_{n \text{ нулей}}a \ldots,$$

где a — первая значащая цифра. Тогда

$$\underbrace{0{,}00 \ldots 0}_{n \text{ нулей}}1 \leqslant 0{,}00 \ldots \quad 0a \ldots < \underbrace{0{,}00 \ldots 0}_{(n-1) \text{ нулей}}1,$$

Отсюда $-n \leqslant \lg M < -(n-1)$.

Значит, $\lg M$ равен $-n$ плюс положительная дробь, меньшая единицы. Его характеристика равна $-n$. Теорема доказана.

Примеры.

$$\lg 3 = 0, \ldots \qquad \lg 0{,}789 = \bar{1}, \ldots .$$
$$\lg 86{,}02 = 1, \ldots \qquad \lg 0{,}01003 = \bar{2}, \ldots .$$
$$\lg 102{,}5 = 2, \ldots \qquad \lg 0{,}00034 = \bar{4}, \ldots .$$

Во всех примерах точками обозначена дробная часть (мантисса) логарифма.

Из приведенных примеров видно, что характеристика числа легко определяется по его виду. Поэтому во всех таблицах логарифмов даны только мантиссы логарифмов.

Пусть $\lg 3{,}6 = a$.

Тогда

$$\lg 36 = \lg (3{,}6 \cdot 10) = \lg 3{,}6 + \lg 10 = a + 1;$$
$$\lg 360 = \lg (3{,}6 \cdot 100) = \lg 3{,}6 + \lg 100 = a + 2;$$
$$\lg 3600 = \lg (3{,}6 \cdot 1000) = \lg 3{,}6 + \lg 1000 = a + 3.$$

Наоборот, при уменьшении числа в 10, 100, 1000 ... раз получим:

$$\lg 0{,}36 = \lg (3{,}6 \cdot 0{,}1) = \lg 3{,}6 + \lg 0{,}1 = a - 1;$$
$$\lg 0{,}036 = \lg (3{,}6 \cdot 0{,}01) = \lg 3{,}6 + \lg 0{,}01 = a - 2;$$
$$\lg 0{,}00036 = \lg (3{,}6 \cdot 0{,}0001) = \lg 3{,}6 + \lg 0{,}0001 = a - 4.$$

Мы видим, что при перенесении в десятичном числе запятой вправо или влево характеристика его логарифма соответственно увеличивается или уменьшается на столько единиц, на сколько цифр перенесена запятая. Это и понятно: перенеся в числе запятую, например, на две цифры вправо, мы увеличиваем на 2 число целых цифр. А тогда по теореме 3 увеличится на 2 и характеристика. Отсюда получаем теорему.

Теорема 5. ***При перенесении в десятичном числе запятой вправо или влево на k цифр его логарифм соответственно увеличится или уменьшится на k единиц.***

Доказательство. Пусть $\lg M = a$.

Тогда

$$\lg (M \quad 10^k) = \lg M + \lg 10^k = a + k;$$
$$\lg (M \quad 10^k) = \lg M - \lg 10^k = a - k.$$

Но умножение и деление на 10^k равносильно перенесению запятой вправо или влево на k цифр. Теорема доказана. Примеры приведены выше.

6. Свойства мантиссы. Из теоремы 5 следует, что при увеличении или уменьшении числа в 10, 100, 1000 и т. д. раз изменяется только его характеристика, мантисса же остается без изменения.

Это свойство мантиссы имеет очень важное практическое значение.

Дело в том, что всякая таблица логарифмов может содержать логарифмы только ограниченного количества чисел. Так, в таблицах В. М. Брадиса приводятся логарифмы (точнее мантиссы логарифмов) только натуральных чисел от 10 до 9999. И все же по этим таблицам можно определить логарифм любого числа.

Покажем это на примерах:

1. Пусть требуется найти $\lg 67\,000$. Этого числа в таблицах В. М. Брадиса нет. Но характеристику логарифма этого числа мы сразу определяем по числу целых цифр (теорема 3). Она равна 4. Для определения мантиссы достаточно найти в таблице мантиссу для числа 67. (Ведь от деления числа на 1000 мантисса его логарифма не меняется.) Найдем, что она равна 0,8261.

2. Пусть требуется найти $\lg 0{,}0307$. По теореме 4 определяем характеристику; она равна -2. В таблице находим мантиссу для числа 307. Она равна 0,4871. Значит $\lg 0{,}0307 = 2{,}4871$.

Подобным же образом мы найдем логарифм любого положительного числа.

Примечание. Свойство мантиссы, пользуясь которым мы могли найти по таблице логарифм любого числа, не сохранилось бы, если бы мы не делали мантиссу всегда положительной.

Покажем это на примере. Пусть $\lg 524 = 2{,}7193$.

Тогда:

$$\lg 52{,}4 = 1{,}7193; \quad \lg 5{,}24 = 0{,}7193;$$
$$\lg 0{,}524 = 0{,}7193 - 1 = -0{,}2807;$$
$$\lg 0{,}0524 = 0{,}7193 - 2 = -1{,}2807.$$

Мы видим, что когда число стало меньше единицы, мантисса его логарифма изменилась. Значит, пришлось бы составлять две таблицы мантисс — одну для чисел, больших единицы, и другую для чисел, меньших единицы.

Условие — писать мантиссу всегда положительной — освобождает от введения второй таблицы. Тогда приведенные выше отрицательные логарифмы запишутся так:

$$\lg 0{,}524 = 0{,}7193 - \overline{1} = \overline{1}{,}7193; \quad \lg 0{,}0524 = \overline{2}{,}7193.$$

7. Нахождение логарифма числа и нахождение числа по его логарифму. Покажем на примерах, как по таблицам найти логарифм данного числа.

1. $x = \lg 8{,}3$.

Характеристика равна 0. В таблице находим число 83 и рядом с ним мантиссу 0,9191. Значит: $\lg 8{,}3 = 0{,}9191$.

Примечание. Если число состоит из одной значащей цифры, например 0,03, то пишем характеристику $\overline{2}$ и в таблице находим мантиссу логарифма 30. Она равна 0,4771. Значит: $\lg 0{,}03 = \overline{2}{,}4771$.

2. $x = \lg 0{,}634$.

Пишем характеристику $\overline{1}$. В первом столбце таблицы находим 63 и в той же строке в столбце за номером 4 находим мантиссу 0,8021. Значит: $\lg 0{,}634 = \overline{1}{,}8021$.

3. $x = \lg 423\,800$.

Характеристика равна 5. В первом столбце находим число 42; в той же строке в столбце за номером 3 находим мантиссу 0,6263. Дальше в той же строке в столбце „поправок" (правая сторона таблицы), в столбце за номером 8 (четвертая цифра данного числа) находим поправку 8, которую и прибавляем к данной мантиссе. Получаем: $\lg 423\,800 = 5{,}6271$.

4. $x = \lg 0{,}0124683$.

Округляем число до четырех значащих цифр. Получим 0,01247. По примеру 3 находим мантиссу логарифма 124 (0,0934) и в столбце поправок за номером 7 находим 25. Значит, $\lg 0{,}0124683 = \overline{2}{,}0959$.

Покажем теперь, как находить по таблицам число, если известен его логарифм.

5. $\lg x = \overline{3}{,}9415$. В строке 87 в столбце за номером 4 находим мантиссу 0,9415. Характеристика $\overline{3}$ указывает, что перед значащими цифрами числа стоит три нуля. Значит, $x = 0{,}00874$.

6. $\lg x = 1{,}2956$. Мантиссы 0,2956 в таблице нет. Находим ближайшую к ней меньшую мантиссу.

В строке 19 в столбце за номером 7 находим 0,2945. До заданной мантиссы не хватает 11. В той же строке в столбце поправок за номером 5 находим 11. Значит, $x = 19{,}75$ (характеристика 1 показывает, что целая часть числа содержит две цифры).

7. $\lg x = 4{,}1725$. В строке 14 в столбце 8 находим 0,1703. Не хватает 22. В той же строке в столбцах поправок числа 22 нет; в столбце 8 находим ближайшее к 22 число 23. В целой части искомого числа должно быть пять цифр (характеристика равна 4). Значит, $x = 14\,880$.

§ 98. Вычисления с помощью таблиц логарифмов.

1. Пусть требуется вычислить выражение:

$$x = \frac{28{,}4^2 \cdot 3{,}946}{170}.$$

Если бы мы знали $\lg x$, то по таблице логарифмов сразу бы нашли и x.

Найдем поэтому $\lg x$. По теоремам § 95 имеем:

$$\lg x = 2 \lg 28{,}4 + \lg 3{,}946 - \lg 170.$$

По таблицам находим:

$$\begin{array}{cll} + & 2 \lg 28{,}4 = 2 \cdot 1{,}4533 = & 2{,}9066 \\ & \lg 3{,}946 = & 0{,}5962 \\ \hline - & & 3{,}5028 \\ & \lg 170 = & 2{,}2304 \\ \hline & & 1{,}2724 \end{array}$$

Итак, $\lg x = 1{,}2724$.

Теперь по данному логарифму находим число:

$$\begin{array}{r} 2718 \\ +\ 6 \\ \hline 2724 \end{array} \qquad + \begin{array}{r} 187 \\ 2 \\ \hline 1872 \end{array}$$

Характеристика равна 1; следовательно, $x = 18{,}72$. Так как вычисления производились приближенно и наименее точное из данных чисел содержит три цифры, то оставляем три цифры и в результате. Получим:

$$x = 18{,}7.$$

2. Пусть требуется вычислить выражение

$$x = \frac{324^3 \cdot 2{,}627}{\sqrt[3]{872{,}6} \cdot 450^2}.$$

Если бы мы стали непосредственно выполнять указанные в выражении действия, то вычисления заняли бы необычайно много времени, особенно нахождение $\sqrt[3]{872{,}6}$. Воспользуемся таблицами логарифмов.

1) Логарифмируем данное выражение.

$$\lg x = 3 \lg 324 + \lg 2{,}627 - \frac{1}{3} \lg 872{,}6 - 2 \lg 450.$$

2) Находим логарифмы данных чисел и производим над ними указанные действия.

$$+\begin{array}{ll} 3 \lg 324 = 3 \cdot 2{,}5105 = & 7{,}5315; \\ \lg 2{,}627 = & 0{,}4194; \\ \hline & 7{,}9509 \end{array} \qquad +\begin{array}{ll} \frac{1}{3} \lg 872{,}6 = \frac{1}{3} \cdot 2{,}9408 = & 0{,}9803 \\ 2 \lg 450 = 2 \cdot \lg 2{,}6532 = & 5{,}3064 \\ \hline & 6{,}2867 \end{array}$$

Складываем отдельно первые два и последние два логарифма (это выполнено выше).

4) Из первой суммы вычитаем вторую:

$$\begin{array}{r} -\,7{,}9509 \\ 6{,}2867 \\ \hline 1{,}6642. \end{array}$$

Итак,

$$\lg x = 1{,}6642.$$

5) По данному логарифму находим число

$$x = 46{,}15.$$

Примечание. Во избежание грубых ошибок при вычислениях с логарифмами очень полезно всегда произвести самопроверку путем предварительной или последующей „прикидки", то есть определения грубо приблизительно величины результата. Для этого данные в выражении числа округляются так, чтобы вычисления можно было произвести устно или путем несложных письменных вычислений. Покажем это на приведенных выше двух примерах.

1. $x = \dfrac{28{,}4^2 \cdot 3{,}946}{170}$.

После округления получим:

$$x = \frac{30^2 \cdot 4}{170}.$$

Вычисляем в уме: $30^2 \cdot 4 = 900 \cdot 4 = 3600$; $3600 : 170 \approx 20$.

Значит, если вычисления с логарифмами произведены верно, то результат должен содержать в целой части две цифры. Вычисления дали $x = 18{,}7$, что дает большую долю уверенности, что вычисления были произведены верно.

2. $x = \dfrac{324^3 \cdot 2{,}627}{\sqrt[3]{872{,}6} \cdot 450^2}$.

После округления получим:

$$x = \frac{300^3 \cdot 3}{\sqrt[3]{1000} \cdot 400^2},$$

или

$$x = \frac{27\,000\,000 \cdot 3}{10 \cdot 160\,000} = \frac{810}{16} \approx 50.$$

Вычисления с логарифмами дали 46,15.

Так как в таблицах даются приближенные логарифмы, то все приведенные выше вычисления являются приближенными. Поэтому и результат является приближенным. Округляя результат, мы применяли правило приближенных вычислений, по которому в результате умножений и делений оставляется столько значащих цифр, сколько их было в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

Рекомендуем учащимся произвести вычисления в примере 1 без таблиц логарифмов и убедиться, что результат получится тот же, но вычисления займут больше времени. Еще бóльшая разница во времени получится для примера 2.

8. Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками. Как видно из предыдущего примера, над логарифмами приходится производить арифметические действия: сложение, вычитание, умножение на число и деление на число. В приведенном примере все логарифмы были положительными и действия над ними выполнялись как обычно. Покажем, как выполняются действия в том случае, если некоторые логарифмы имеют отрицательные характеристики.

Сложение.

$$1)\ \begin{array}{r} \bar{2},3782 \\ +\ \bar{1},2639 \\ \hline \bar{3},6421 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \bar{2},5672 \\ +\ \bar{3},8244 \\ \hline \bar{4},3916 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} \bar{1},8237 \\ +\ 4,6448 \\ \bar{2},9152 \\ \hline 3,3837 \end{array}$$

Эти примеры показывают, что при сложении логарифмов с отрицательными характеристиками складываются отдельно их мантиссы и отдельно их характеристики.

Во втором примере при сложении мантисс получилась одна целая единица. Прибавив ее к -5 (сумма характеристик), получили -4.

В третьем примере сумма характеристик равна $-1+4-2=1$. Прибавив к ней 2 единицы, полученные при сложении мантисс, получили характеристику 3.

Вычитание.

$$1)\ \begin{array}{r} 1,5243 \\ -\ \bar{2},3427 \\ \hline 3,1816 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \bar{3},8736 \\ -\ \bar{2},3818 \\ \hline \bar{1},4918 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{r} \bar{2},4732 \\ -\ \bar{1},7348 \\ \hline \bar{2},7384 \end{array}$$

Вычитаются отдельно характеристика и отдельно мантисса.

В первом примере характеристика равна $1-(-2)=3$; во втором $-3-(-2)=-1$. В третьем примере, чтобы выполнить вычитание мантисс, мы прибавили к мантиссе уменьшаемого единицу, а от характеристики отняли единицу (отчего величина логарифма не изменилась). Характеристика равна $-3-(-1)=-2$.

Умножение.

$$1)\ \begin{array}{r} \bar{2},3843 \\ \times\ \quad 4 \\ \hline \bar{7},5372 \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{r} \bar{1},8341 \\ \times\ \quad 5 \\ \hline \bar{1},1705 \end{array}$$

Умножаются отдельно характеристика и мантисса.

В первом примере характеристика равна $(-2)\cdot 4=-8$ плюс единица, полученная при умножении мантиссы. Итого -7.

Во втором примере характеристика равна $(-1)\cdot 5+4=-1$.

Деление.

Если отрицательная характеристика кратна делителю, то выполняется отдельно деление характеристики и мантиссы.

$$\bar{4},7842 : 2 = \bar{2},3921; \quad \bar{3},1613 : 3 = \bar{1},0538.$$

Если характеристика не кратна делителю, то к ней прибавляется столько отрицательных единиц, чтобы она нацело делилась. Столько же положительных единиц прибавляется к мантиссе.

$$\overset{-2+2}{\bar{4},2346} : 3 = \bar{2},7449; \quad \overset{-1+1}{\bar{2},8321} : 3 = \bar{1},6107.$$

§ 99. Логарифмическая линейка.

При вычислениях, когда требуется точность не выше трех значащих цифр (а в практике такая точность в подавляющем большинстве случаев достаточна) незаменимым пособием является логарифмическая или просто счетная линейка. Ознакомимся с ее устройством и употреблением.

1. Устройство линейки. Линейка в собранном виде показана на чертеже 54 (см. последнюю страницу). Она состоит из трех частей:

1) корпуса, на котором нанесены четыре шкалы и посередине которого по всей длине линейки имеется углубление (паз);

2) узкой линейки — движка, который вставляется в паз корпуса и свободно передвигается в нем вправо и влево;

3) стеклянной пластинки в металлической рамке — бегунка, или визира, который загнутыми вверху и внизу краями рамки входит в боковые пазы корпуса и свободно передвигается в них. Посередине визира сверху вниз нанесена тонкая черта — указатель, или индекс.

2. Логарифмическая шкала. Вторая шкала снизу, нанесенная на корпусе (шкала D), является основной шкалой. Такая же шкала нанесена в нижней части движка (шкала C).

Ознакомимся с ее устройством. Возьмем отрезок AB, длину которого примем за единицу (черт. 55). Будем откладывать на нем отрезки, по длине равные логарифмам первых десяти натуральных чисел. Если логарифмы взять с точностью до 0,01, то получим таблицу:

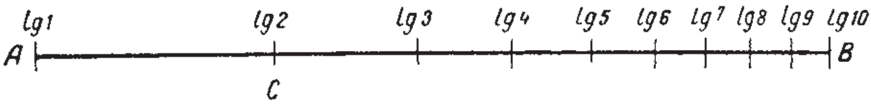
$$\lg 1 = 0; \quad \lg 2 = 0{,}30; \quad \lg 3 = 0{,}48; \quad \lg 4 = 0{,}60; \quad \lg 5 = 0{,}70;$$
$$\lg 6 = 0{,}78; \quad \lg 7 = 0{,}85; \quad \lg 8 = 0{,}90; \quad \lg 9 = 0{,}95; \quad \lg 10 = 1.$$

Отложим соответствующие длины на отрезке AB. Тогда начало отрезка AB — точка A будет изображать $\lg 1 = 0$; точка C, находящаяся от точки A на расстоянии 0,30, будет изображать $\lg 2 = 0{,}30$ и т. д.

Мы получили, правда в очень упрощенном виде, ту самую логарифмическую шкалу, которая составляет основную часть счетной линейки. Чтобы больше приблизить наш чертеж к шкале, изображенной на линейке, проделаем следующее:

1) Уничтожим везде символ lg и оставим только самые числа (черт. 56). Будем помнить, что, например, цифра 7, стоящая у точки D, означает, что длина отрезка $AD \approx \lg 7$.

2) Возьмем логарифмы чисел 1,1; 1,2; 1,3; ... 1,9.



Черт. 55.

Получим:

$$\lg 1{,}1 = 0{,}04; \quad \lg 1{,}2 = 0{,}08; \quad \lg 1{,}3 = 0{,}11 \text{ и т. д.}$$

Отложим соответствующие длины на отрезке AB. Полученные точки расположатся в промежутке от 1 до 2 (черт. 56). Точно так же можно отложить lg 2,1; lg 2,2 ... между 2 и 3; и т. д. до 9,9.

Черт. 56.

В практике обычно употребляются линейки, в которых расстояние между делениями 1 и 10 равно 25 *см*. На него можно нанести и более мелкие деления.

Рассматривая на чертеже 54 основную шкалу, мы видим: промежуток от 1 до 2 имеет 10 крупных делений, соответствующих логарифмам чисел: 1,1; 1,2; ... 1,9. Каждый из промежутков между 1 и 1,1; между 1,1 и 1,2; 1,2 и 1,3 и т. д. имеет 10 мелких делений. Они соответствуют логарифмам чисел: 1,01; 1,02 и т. д.

Говорят, что цена деления от 1 до 2 равна 0,01. Промежутки от 2 до 3 и от 3 до 4 имеют по 50 делений. Значит, цена каждого деления в этих промежутках равна 0,02. Все остальные промежутки: от 4 до 5, от 5 до 6 и т. д. имеют по 20 делений каждый. Значит, цена каждого деления в этих промежутках равна 0,05.

Для пользования линейкой крайне важно приобрести навык в „чтении шкалы". Этот навык состоит в умении достаточно точно решать следующие две задачи:

1) Индекс визира расположен на определенном делении шкалы (или между делениями). Определить, какое число он показывает.

2) Задано определенное число. Отметить индексом визира это число на шкале.

3. Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня. Наиболее легко по логарифмической линейке находить приближенное значение квадрата любого числа. Поставив волосок визира на любое число основной (логарифмической) шкалы, посмотрим, какое число указывает этот волосок на второй сверху шкале. Мы убедимся, что каждый раз волосок показывает на ней точный или приближенный квадрат числа, которое показано волоском на основной шкале, например:

Вторая сверху шкала	x^2	4	9	25	64	9,6	2,25	5,30	35
Основная шкала	x	2	3	5	8	3,1	1,5	2,3	5,9

Таким образом, каждое число второй шкалы сверху является квадратом числа, стоящего точно под ним на основной шкале. Поэтому вторая шкала сверху и называется *шкалой квадратов* (шкала A).

Основная шкала содержит числа от 1 до 10. Как найти квадрат чисел, не входящих в этот промежуток, покажем на примерах.

$$43^2 = 4{,}3^2 \cdot 10^2 \approx 18{,}5 \cdot 100 = 1850;$$

$$295^2 = 2{,}95^2 \cdot 100^2 \approx 8{,}7 \quad 10\,000 = 87\,000;$$

$$0{,}6^2 = 6^2 \cdot (10^{-1})^2 = 36 \cdot 10^{-2} = 0{,}36;$$

$$0{,}63^2 = 6{,}3^2 \cdot 10^{-2} \approx 40 \cdot 0{,}01 = 0{,}4.$$

Значит, каждый раз данное число представляется в виде произведения числа, заключенного между 1 и 10, и степени десяти. Квадрат первого сомножителя находится на линейке, а второго — в уме. Полученные результаты перемножаются.

Теперь понятно, как эти же две шкалы дают возможность найти квадратный корень из любого числа. Если возьмем любое число на верхней шкале (второй сверху), то число, стоящее под ним на основной шкале, даст его квадратный корень, например:

Вторая сверху шкала	x^2	49	41	10	5
Основная шкала	x	7	6,4	3,16	2,24

Легко видеть, что шкала квадратов состоит из двух одинаковых шкал. Левая содержит квадраты меньшие, а правая — бо́льшие десяти.

4. Возведение в куб и извлечение кубического корня. Как на второй шкале сверху нанесены квадраты чисел от 1 до 10, так на первой шкале сверху (шкала K) нанесены кубы тех же чисел. Поставив волосок (индекс) на любое число основной шкалы, на верхней шкале найдем куб этого числа. Например:

Верхняя шкала	x^3	2,2	4,1	8	27	39,3
Основная шкала	x	1,3	1,6	2	3	3,4

Кубы чисел, не входящих в промежуток 1—10, находятся таким же способом, как и квадраты:

$$12{,}3^3 = 1{,}23^3 \cdot 10^3 \approx 1{,}86 \cdot 1000 = 1860;$$

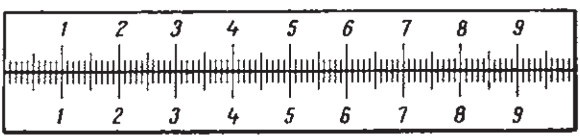
$$0{,}46^3 = 4{,}6^3 \cdot 10^{-3} \approx 97 \cdot 0{,}001 = 0{,}097.$$

Кубические корни находятся так же, как и квадратные. На верхней шкале находим заданное число, а под ним — на основной — его кубичный корень.

Заметим, что верхняя шкала состоит из трех одинаковых шкал. Если заданный куб меньше 10, то его надо искать слева; если между 10 и 100 — то посередине; если между 100 и 1000 — то справа (почему это так, легко сообразить, возведя в куб по линейке числа 2,4 и 6).

Если заданный куб числа больше тысячи (или меньше 1), то его представляют, как и в предыдущих случаях, в виде произведения числа, заключенного между 1 и 1000, и степени десяти.

5. Умножение. Чтобы легче понять, как выполняется умножение двух чисел с помощью счетной линейки, рассмотрим, как можно выполнить сложение двух чисел с помощью обыкновенной линейки.



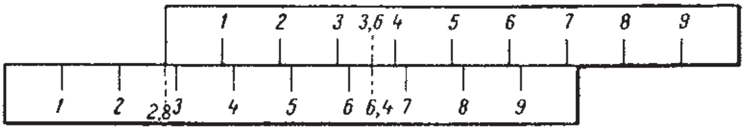
Черт. 57.

Возьмем две линейки с нанесенными на них сантиметровыми и миллиметровыми делениями. У одной линейки деления нанесены на верхнем, у другой на нижнем ребре. Если линейки сдвинуть вплотную друг с другом, то соответствующие деления на них совпадут (черт. 57).

Покажем, как с помощью этих линеек легко выполняется сложение. Пусть требуется сложить 2,8 и 3,6.

Сдвинем верхнюю линейку так, чтобы ее нулевое деление совпало с делением 2,8 нижней линейки. Найдем на верхней линейке второе слагаемое 3,6.

Под этим числом на нижней линейке находится деление 6,4, то есть сумма 2,8 и 3,6 (черт. 58).



Черт. 58.

Точно так же, поместив нулевое деление верхней линейки над делением 1,9 нижней и найдя на верхней линейке число 1,8, под ним найдем на нижней линейке число 3,7. Значит,

$$1,9 + 1,8 = 3,7.$$

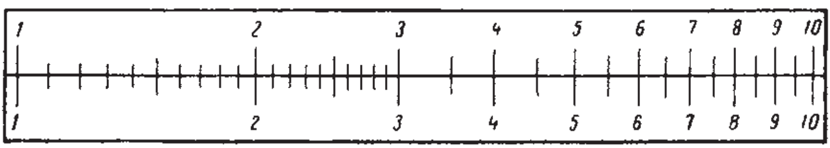
Найдя на верхней линейке 2,6, получим:

$$1,9 + 2,6 = 4,5.$$

И т. д.

Обратимся теперь к логарифмической шкале.

Возьмем две линейки с логарифмической шкалой, причем на одной линейке деления нанесены вверху, на другой внизу (черт. 59).



Черт. 59.

1) Сложим $\lg 2$ и $\lg 3$. Для этого единицу верхней линейки совместим с делением 2 нижней. Найдем на верхней линейке деление 3. Под ним на нижней линейке читаем деление 6 (черт. 60).

Значит,

$$\lg 2 + \lg 3 = \lg 6.$$

По свойству логарифмов отсюда следует:

$$2 \cdot 3 = 6.$$

Сложив отрезок шкалы с меткой 2 и отрезок с меткой 3, мы нашли произведение $2 \cdot 3$.

Две логарифмические шкалы, которыми мы сейчас воспользовались для умножения, и составляют основную часть счетной линейки.

Одна из них нанесена на самой линейке (вторая шкала снизу), другая на движке (см. черт. 54). Передвигая движок вправо и влево, мы можем совместить любое деление каждой шкалы с любым делением другой. Выполним несколько умножений, пользуясь линейкой.

2) Найдем произведение $1{,}37 \cdot 2{,}92$.

Обозначив его через x, получим:

$$\lg x = \lg 1{,}37 + \lg 2{,}92.$$

Сложим эти логарифмы. Поместим единицу шкалы движка над меткой 1,37 нижней шкалы. На шкале движка находим метку 2,92. Под ней читаем метку нижней шкалы 4. Значит:

$$\lg 1{,}37 + \lg 2{,}92 = \lg 4.$$

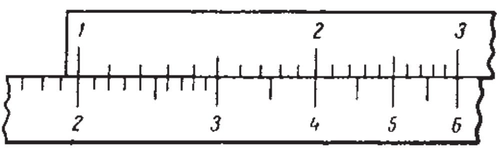
Отсюда

$$1{,}37 \cdot 2{,}92 \approx 4.$$

Проверка умножением дает:

$$1{,}37 \cdot 2{,}92 = 4{,}0004.$$

Так как при умножении, согласно правилу приближенных вычислений, в произведении мы должны оставить лишь три первые



Черт. 60.

цифры, то получим 4,00, то есть то же самое число, которое мы гораздо быстрее нашли с помощью линейки.

3) На логарифмической шкале даны логарифмы только чисел от 1 до 10. Как же быть, если один или оба сомножителя будут больше 10 или меньше 1?

Заметим прежде всего, что, откладывая на линейке логарифмы чисел от 1 до 10, мы фактически откладывали их мантиссы, так как характеристики всех этих чисел равны нулю.

Вспомним, что при увеличении и уменьшении числа в 10, 100 и т. д. раз его мантисса не меняется. Следовательно, например, метка 2 показывает мантиссу не только числа 2, но и чисел: 20; 200; 0,2; 0,02; и т. д. Следовательно, мы можем каждое из данных чисел умножить или разделить на такую степень десяти, чтобы оба числа находились между 1 и 10. Перемножим их с помощью линейки и в произведении перенесем запятую на нужное количество знаков. Покажем это на примерах.

Найти произведение $13{,}7 \cdot 2{,}92$.

Так как $13{,}7 \cdot 2{,}92 = 10 \cdot 1{,}37 \cdot 2{,}92$, то находим с помощью линейки произведение $1{,}37 \cdot 2{,}92 \approx 4$ и умножаем его на 10. Получим 40.

Таким же способом найдем:

$$1{,}37 \cdot 0{,}292 = 0{,}1 \quad 1{,}37 \cdot 2{,}92 = 0{,}1 \cdot 4 \approx 0{,}4;$$

$$13{,}7 \cdot 29{,}2 = 100 \cdot 1{,}37 \cdot 2{,}92 = 100 \cdot 4 \approx 400.$$

И т. д.

Практически поступают обычно так: перемножают с помощью линейки числа, как будто они оба заключены между 1 и 10. По данным сомножителям определяют приблизительно величину произведения и в полученном числе отделяют соответствующее число целых цифр или ставят впереди нужное число нулей.

Так, в первом примере, получив 4,000, „прикидывают", что произведение должно быть больше $13 \cdot 2 = 26$ и меньше $14 \cdot 3 = 42$, то есть целая часть его содержит две цифры. Получаем 40.

4) Найдем произведение $14{,}4 \cdot 2{,}54$.

Находим по линейке $1{,}44 \cdot 2{,}54 \approx 3{,}66$.

Произведение больше $14 \cdot 2 = 28$ и меньше $15 \cdot 3 = 45$, то есть имеет в целой части две цифры. Получим 36,6. (Обычным умножением найдем произведение 36,576. Округляя его, согласно правилу приближенных вычислений, до трех цифр, получим 36,6 — то же число, которое нашли с помощью линейки.)

Таким же образом найдем произведение $1{,}44 \cdot 0{,}254$. Линейка по-прежнему даст число 3,66. Произведение должно быть больше нуля, но меньше $1{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}45$, то есть меньше 1. Значит, произведение равно 0,366.

5) Найдем произведение $x = 3{,}4 \cdot 4{,}3$.

Имеем:

$$\lg x = \lg 3{,}4 + \lg 4{,}3.$$

Поставив метку 1 над меткой 3,4 нижней шкалы (шкалы D), замечаем, что метка 4,3 верхней шкалы (шкалы C) находится за пределами нижней шкалы (шкалы D).

Это и понятно: линейка содержит только логарифмы чисел до 10, а видно на глаз, что произведение $3{,}4 \cdot 4{,}3$ больше 10 и даже 12. Если бы линейка была продолжена и на ней нанесены логарифмы 11, 12 и т. д., то мы без труда нашли бы и искомое произведение.

Но оказывается, что в продолжении линейки нет надобности. Вспомним, что по свойству мантиссы (§ 97) число 11 имеет ту же мантиссу, что и число 1,1, число 12,3 — ту же мантиссу, что и 1,23, и т. д.

Значит, продолжение линейки от 10 до 100 имело бы точь-в-точь такой же вид, как и линейка с делениями от 1 до 10. Поэтому мы просто передвинем нижнюю линейку вправо (или, что то же, верхнюю линейку влево) так, чтобы ее метка 3,4 стояла под концом (то есть под меткой 10) верхней линейки (черт. 61). Находим на верхней линейке деление 4,3 и под ним читаем на нижней линейке метку 1,46. Так как произведение должно быть больше $3 \cdot 4 = 12$ и меньше $4 \cdot 5 = 20$, то искомое произведение $x = 14,6$.

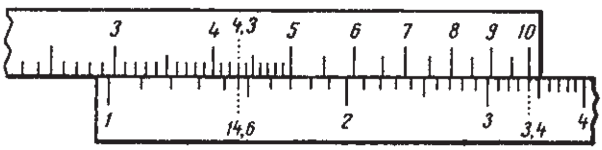
Перемножив данные числа, найдем:

$$3,4 \cdot 4,3 = 14,62,$$

что по округлении до трех цифр дает 14,6 — то же число, которое было найдено по линейке.

6. Деление. Так же просто выполняется с помощью счетной линейки деление чисел. Обратимся сначала опять к двум обыкновенным линейкам (черт. 57).

На чертеже 58 показано сложение чисел 2,8 и 3,6. Получилась сумма 6,4. Но если отметку 6,4 на нижней линейке считать уменьшаемым, а 3,6 на верхней линейке вычитаемым, то метка 2,8

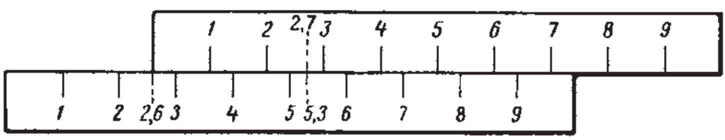


Черт. 61.

нижней линейки, стоящая против нуля верхней, дает разность 6,4 — 3,6.

Еще пример: вычесть 2,7 из 5,3.

Против метки 5,3 нижней линейки ставим метку 2,7 верхней линейки. Против нуля верхней линейки находим метку 2,6 — разность 5,3 — 2,7 (черт. 62).



Черт. 62.

Те же самые операции выполняются на счетной линейке при делении.

На чертеже 60 было показано умножение 2 на 3. Получили 6. Но если считать 6 делимым, 3 делителем, то метка 2 против единицы верхней линейки покажет частное 6 : 3, так как $\lg 6 - \lg 3 = \lg 2$, то есть $6 : 3 = 2$.

Точно так же на чертеже 63 показано, что:

$$\lg 4 - \lg 2{,}9 = \lg 1{,}38,$$

то есть, что

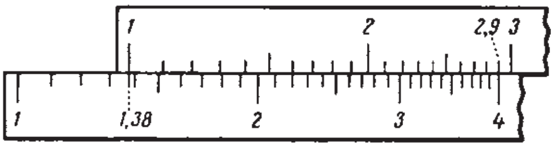
$$4 : 2{,}9 \approx 1{,}38.$$

На чертеже 64 показано, что $3{,}66 \quad 2{,}62 \approx 1{,}39$, а также что

$$\begin{aligned} 36{,}6 \; &: 2{,}62 \approx 13{,}9; \\ 3{,}66 \; &: 0{,}262 \approx 13{,}9; \\ 36{,}6 \; &: 0{,}262 \approx 139; \\ 0{,}366 &: 2{,}62 \approx 0{,}139. \end{aligned}$$

Приведем еще пример: 4,15 : 2,4.

Против метки 4,15 нижней шкалы ставим метку 2,4 верхней.



Черт. 63.

Против метки 1 верхней шкалы читаем метку 1,73 нижней. Значит,

$$4{,}15 : 2{,}4 \approx 1{,}73.$$

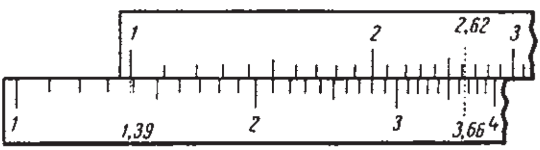
Проверка умножением дает:

$$1{,}73 \cdot 2{,}4 = 4{,}152 \approx 4{,}15.$$

Чтобы найти частное 41,5 : 2,4, находим частное $4{,}15 : 2{,}4 \approx 1{,}73$ и умножаем его на 10. Получим 17,3.

Частное $4{,}15 : 0{,}24 \approx 17{,}3$; $0{,}415 : 2{,}4 \approx 0{,}173$.

Вообще при делении любых чисел поступают обычно так же, как и при умножении: находят частное в предположении, что дели-



Черт. 64.

мое и делитель находятся в промежутке от 1 до 10, в полученном произведении отделяют целую часть или пишут впереди нули в зависимости от приближенной „прикидки“.

Так, в примере $4{,}15:2{,}4$ сразу видно, что целая часть больше нуля, но меньше 10, то есть содержит одну цифру.

Таким же образом найдем:

$$4{,}15:24 \approx 0{,}173,$$

так как $4{,}15:24$ больше нуля, но меньше единицы.

Мы показали применение логарифмической линейки к наиболее простым случаям. Но с помощью линейки легко и быстро вычисляются очень сложные выражения, например:

$$x = \frac{3{,}086 \cdot 0{,}563^2}{86{,}3 \cdot 0{,}456} \text{ и т. д.}$$

Подробное объяснение вычислений на линейке дается в специальных руководствах.

§ 100. Показательные и логарифмические уравнения.

1. Показательные уравнения.

Задача. *Население города составляет* 200 000 *жителей. Через сколько лет число жителей увеличится вдвое, если ежегодный средний прирост составляет* 5%?

Решение. Эта задача совершенно аналогична задаче, приведенной в § 91. Следовательно, можно применить формулу сложных процентов:

$$A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \qquad (1)$$

По условию задачи $a = 200\,000$; $A = 2a = 400\,000$, $p = 5$ и $t =$ неизвестное число. Сделав подстановку и сократив на $a = 200\,000$, получим:

$$2 = \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t,$$

или

$$1{,}05^t = 2. \qquad (2)$$

Получили уравнение, где неизвестное число входит в качестве показателя степени. Решим его.

Из (2) имеем:

$$t \lg 1{,}05 = \lg 2.$$

$$t = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05}.$$

Найдя по таблице $\lg 2$ и $\lg 1{,}05$, получим:

$$t = \frac{0{,}3010}{0{,}0212} = \frac{3010}{212} = \frac{1505}{106} \approx 14{,}2.$$

Итак, население города удвоится через 14,2 лет.

Примечание. Интересно отметить, что искомое число лет совсем не зависит от численности населения, а зависит только от величины процента прироста.

Это видно из того, что в уравнение (2) число жителей (200 000) совсем не входило: оно сократилось, когда в уравнение (1) вместо A подставили $2a$.

Значит, если бы в городе было не 200 000 жителей, а 500 000, 1 000 000 и т. д., то при ежегодном приросте в 5% его население удвоится во всех случаях через 14,2 лет.

Предлагаем учащимся решить эту же задачу при $p = 3$.

Если уравнение содержит неизвестное в показателе степени, то оно называется показательным.

Уравнение (2) является примером показательного уравнения.

Показательные уравнения могут быть самого разнообразного вида, и не существует общего приема для их решения. Покажем на примерах решение наиболее простых показательных уравнений.

Пример 1.

$$a^x = b \tag{3}$$

(a и b — положительные числа, $a \neq 1$).

Логарифмируя обе части уравнения, получим:

$$x \lg a = \lg b.$$

Отсюда

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Итак, уравнение (3) всегда имеет решение и притом единственное (при указанных ограничениях для a и b).

Построим график функции

$$y = a^x, \tag{4}$$

где a — то же самое число, что и в уравнении (3).

Положив $y = b$, получим уравнение (3). Значит, x в этом уравнении является абсциссой той точки графика функции (4), ордината которой равна b.

Отсюда графическое решение уравнения (3).

Строим график функции $y = a^x$. На оси ординат находим точку с ординатой, равной b, и проводим из нее перпендикуляр к оси ординат до пересечения с графиком. Абсцисса точки пересечения и даст значение x.

Уравнение (2) является частным случаем уравнения (3) при $a = 1{,}05$ и $b = 2$.

Пример 2.

$$3^x = \frac{1}{81}. \tag{5}$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (3). Но его можно решить, не прибегая к таблицам логарифмов. Так как $81 = 3^4$, то уравнение (5) можно переписать в таком виде:

$$3^x = \frac{1}{3^4} \quad \text{или} \quad 3^x = 3^{-4}.$$

Но отсюда прямо следует, что $x = -4$.

Пример 3.

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{x-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-8}.$$

Так как

$$\frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \text{а} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-8} = \left(\frac{3}{5}\right)^8,$$

то уравнение можно переписать в таком виде:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^8.$$

Отсюда

$$2x - 4 = 8; \quad x = 6.$$

Пример 4.

$$5^x + 5^{x-2} = 130.$$

Вынесем в левой части 5^{x-2} за скобку

$$5^{x-2}(5^2 + 1) = 130$$

или

$$26 \cdot 5^{x-2} = 130.$$

По сокращении на 26:

$$5^{x-2} = 5.$$

Отсюда

$$x - 2 = 1; \quad x = 3.$$

Пример 5.

$$2^{2x} + 2^{x+2} = 96.$$

Перепишем уравнение так:

$$2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 96 = 0.$$

Положив $2^x = y$, получим:

$$y^2 + 4y - 96 = 0.$$

Отсюда:

$$y_1 = 8; \quad y_2 = -12.$$

Итак, имеем два уравнения:

$$1)\ 2^x = 8; \quad 2)\ 2^x = -12.$$

Из них первое дает: $x = 3$, второе не имеет решений.

2. Логарифмические уравнения. Если в уравнении неизвестное находится под знаком логарифма, то уравнение называется *логарифмическим*.

Приведем примеры решения простейших логарифмических уравнений.

Пример 1.

$$2 \lg x = 2 - \lg 25. \qquad (1)$$

Уравнения такого вида решаются просто потенцированием. Так как $2 = \lg 100$, то имеем:

$$2 \lg x = \lg 100 - \lg 25. \qquad (2)$$

$$\lg x^2 = \lg \frac{100}{25}.$$

Отсюда

$$x^2 = \frac{100}{25} = 4.$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2.$$

Уравнению удовлетворяет только $x_1 = 2$, так как $\lg(-2)$ не имеет смысла. Отсюда видим, что уравнение $x^2 = 4$ неравносильно уравнениям (1) и (2). Оно имеет два решения, а уравнения (1) и (2) одно.

Пример 2.

$$2 \lg (x - 1) - \lg (3x - 5) = 0.$$

Так как $0 = \lg 1$, то можем написать:

$$\lg (x-1)^2 - \lg (3x - 5) = \lg 1,$$

или

$$\lg \frac{(x-1)^2}{3x-5} = \lg 1.$$

Отсюда

$$\frac{(x-1)^2}{3x-5} = 1.$$

Решив это уравнение, найдем:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 3.$$

Полученные решения надо проверить подстановкой в данное уравнение. Если при подстановке какого-либо корня под знаком логарифма получится отрицательное число или нуль, то этот корень надо отбросить как посторонний.

Пример 3.

$$\lg x + \lg (x - 4) = \lg 3 + \lg (2 - x).$$

Потенцируя, получим:

$$x(x-4) = 3(2-x), \quad \text{или} \quad x^2 - x - 6 = 0,$$

откуда $x_1 = -2$; $x_2 = 3$.

Проверка показывает, что оба корня не удовлетворяют данному уравнению, так как при $x=-2$ теряют смысл выражения $\lg x$ и $\lg(x-4)$, а при $x=3$ теряют смысл выражения $\lg(x-4)$ и $\lg(2-x)$. Значит, данное уравнение не имеет решений.

В этом мы могли бы убедиться и не решая уравнения.

В самом деле выражение $\lg(x-4)$ требует, чтобы x был больше четырех, а выражение $\lg(2-x)$ — чтобы x был меньше двух. Очевидно, не существует числа, удовлетворяющего обоим этим условиям одновременно.

Пример 4.

$$\frac{\lg(x^3-7x^2+17x+6)}{\lg(x-2)}=3.$$

По освобождении от знаменателя получим:

$$\lg(x^3-7x^2+17x+6)=\lg(x-2)^3.$$

Отсюда

$$x^3-7x^2+17x+6=x^3-6x^2+12x-8,$$

или

$$x^2-5x-14=0.$$

Получаем: $x_1=-2$; $x_2=7$. Первый корень является посторонним. Единственное решение данного уравнения $x=7$.

§ 101. Краткие исторические сведения.

Возьмем две прогрессии:

$$\begin{array}{l} -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \dots \\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ \dots \end{array} \qquad (1)$$

Покажем, что умножение и деление членов геометрической прогрессии можно свести к сложению и вычитанию соответствующих членов первой, арифметической, прогрессии.

Пусть, например, надо найти произведение $\frac{1}{4}\cdot 8$. В первой прогрессии этим числам соответствуют члены -2 и 3. Сложив их, получим 1. Члену 1 первой прогрессии соответствует число 2 во второй. Значит $\frac{1}{4}\cdot 8=2$.

Еще пример: $\frac{1}{2}\cdot 16$. В первой прогрессии этим числам соответствуют -1 и 4. Сложив их, найдем: $-1+4=3$. Под числом 3 первой прогрессии находим число 8 второй. Значит: $\frac{1}{2}\cdot 16=8$.

Пусть надо разделить 8 на $\frac{1}{4}$. В первой прогрессии находим числа 3 и -2. Вычитаем второе из первого. Получим: $3-(-2)=5$. Под числом 5 находим 32. Значит: $8:\frac{1}{4}=32$.

Понятно, почему получается такое соответствие: числа второй прогрессии являются степенями двух, а числа первого ряда — соответствующие показатели степени.

Перемножая числа второго ряда, то есть степени, мы складываем показатели степеней, а при делении вычитаем их. Так, приведенные выше примеры можно было бы записать следующим образом:

$$\frac{1}{4}\cdot 8 = 2^{-2}\cdot 2^{3} = 2^{1} = 2;$$

$$\frac{1}{2}\cdot 16 = 2^{-1}\cdot 2^{4} = 2^{3} = 8;$$

$$8 : \frac{1}{4} = 2^{3} : 2^{-2} = 2^{5} = 32.$$

Применяя в вычислениях таблицы логарифмов, мы по существу заменяем умножение и деление степеней десяти сложением и вычитанием их показателей. Покажем это на простейших примерах.

Вспомним, что десятичный логарифм любого числа есть показатель степени, в которую надо возвести 10, чтобы получить данное число.

Напишем две последовательности:

$$\begin{array}{cccccc} 0; & 0{,}3010; & 0{,}4771; & 0{,}6021; & 0{,}6990; & 0{,}7782; \\ 1 = 10^{0}; & 2 = 10^{0{,}3010}; & 3 = 10^{0{,}4771}; & 4 = 10^{0{,}6021}; & 5 = 10^{0{,}6990}; & 6 = 10^{0{,}7782}; \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0{,}8451; & 0{,}9031; & 0{,}9542; & 1; \\ 7 = 10^{0{,}8451}; & 8 = 10^{0{,}9031}; & 9 = 10^{0{,}9542}; & 10^{1}. \end{array}$$

Во второй последовательности записаны натуральные числа в виде степеней десяти, а в первой соответствующие показатели степени, то есть десятичные логарифмы этих чисел.

Пусть требуется 4 умножить на 2. Складываем соответствующие числа первой последовательности (логарифмы двух и четырех)

$$0{,}6021 + 0{,}3010 = 0{,}9031.$$

Против числа 0,9031 первой последовательности находим во второй последовательности число 8. Значит, $4\cdot 2 = 8$. Точно так же для деления, например 10 на 2. Вычитаем 0,3010 из 1. Получим 0,6990. Это число находится над пятью. Значит, $10:2=5$.

Возьмем более сложный случай. Пусть требуется найти произведение $x = 482{,}7\cdot 0{,}0516$.

По таблицам находим: $\lg 482{,}7 = 2{,}6836$; $\lg 0{,}0516 = \bar{2}{,}7126$. Значит,

$$482{,}7\cdot 0{,}0516 = 10^{2{,}6836}\cdot 10^{\bar{2}{,}7126} = 10^{1{,}3962}.$$

Это равенство показывает, что логарифм искомого числа равен 1,3962. По таблице находим, что он соответствует числу 24,9. Значит,

$$482{,}7\cdot 0{,}0516 = 24{,}9.$$

Это соотношение между степенями и соответствующими показателями было подмечено еще Архимедом (III в. до нашей эры). Приведенные выше две последовательности (I) взяты из сочинения „Всеобщая арифметика" немецкого математика Штифеля (еще раньше у французского математика Шюке они были даны только для натуральных показателей).

Штифель, приводя эти последовательности указывает:

1) Сложению в арифметических прогрессиях соответствует умножение в геометрических.

2) Вычитанию в арифметических прогрессиях соответствует деление в геометрических.

Подобное же соотношение он устанавливает между умножением и делением на число в арифметических прогрессиях и возведением в степень и извлечением корня в геометрических.

Но ни один из математиков того времени не смог правильную идею о замене умножения сложением, деления вычитанием и т. д. довести до практического применения при умножении и делении любых чисел. Так, приведенная выше таблица Штифеля давала возможность свести к сложению и вычитанию только целые степени двух. Поэтому умножению, например, 3 на 7 таблица не могла помочь.

Нужно было составить такие таблицы, чтобы вторая последовательность включала в себя хотя бы все натуральные числа. Такие таблицы и были составлены независимо друг от друга шотландским математиком Непером (1614 г.) и швейцарским математиком Бюрги (1620 г.).

Непер составил таблицу логарифмов синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0 до 90° с промежутком в 1°. Этим он шел прежде всего навстречу нуждам астрономов, которым приходилось производить громадное количество сложных вычислений, причем главным образом приходилось иметь дело с тригонометрическими функциями углов. Применение таблиц логарифмов во много раз упростило и сократило эти вычисления, и недаром знаменитый астроном Лаплас говорил, что изобретение логарифмов вдвое удлинило жизнь астрономов. Бюрги в своей таблице взял геометрическую прогрессию со знаменателем 1,0001. Поэтому числа таблицы возрастали очень медленно, и соседние числа незначительно разнились друг от друга.

Заметим, что и у Непера и у Бюрги основание системы логарифмов не было равно 10.

Первую таблицу десятичных логарифмов чисел от 1 до 1000 издал в 1617 г. английский математик Бригс.

Десятичные логарифмы чисел от 1 до 100 000 издал голландский математик Влакк в 1628 г.

Слово „логарифм“ (происходит от греческих слов „логос“ — слово, отношение и „аритмос“ — число) введено Непером уже в самом названии его сочинения: „Описание удивительных таблиц логарифмов“.

Термин „характеристика“ введен Бригсом, „мантисса“ — Эйлером. Обозначение „log“ встречается уже у знаменитого астронома Кеплера (1624 г.).

Изобретение логарифмов имело громадное теоретическое и практическое значение. Французский математик Лагранж называл изобретателей логарифмов „истинными благодетелями человечества“.

ГЛАВА XI.

ФУНКЦИИ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ. ПРОИЗВОДНАЯ.

§ 102. Обзор ранее изученных функций.

В настоящей главе будут рассмотрены некоторые функции и их свойства.

Предварительно вспомним о тех функциях, с которыми приходилось уже встречаться в предыдущих главах.

1. Функции $y = x^n$. В предыдущих главах были рассмотрены функции $y = x^2$ и $y = x^3$. Графики этих функций даны на чертежах 65 и 66, где добавлены еще графики функций $y = x^4$ и $y=x$. Все эти функции являются частными случаями так называемой *степенной* функции $y = x^n$ при $n = 1, 2, 3, 4$.

Отметим свойства степенной функции, общие для любого натурального показателя.

1) При $x = 0$ функция $y = x^n = 0$. Значит, графики всех функций вида $y = x^n$ проходят через начало координат.

2) При изменении x от 0 до ∞ значения y тоже возрастают от 0 до ∞, причем с увеличением показателя это возрастание становится более быстрым: график функции круче поднимается вверх.

Следующие свойства уже относятся только к функциям с четным или только с нечетным показателем.

3) При отрицательных значениях x степенная функция с четным показателем принимает положительные, а с нечетным показателем— отрицательные значения.

Действительно, при $x < 0$ имеем (§ 19, п. 3):

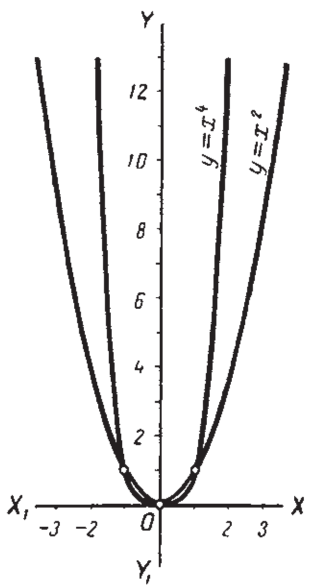
$$x^{2n} > 0; \quad x^{2n+1} < 0. \tag{1}$$

Графически это значит, что график функции с четным показателем весь, кроме точки (0; 0), расположен выше оси абсцисс (все его ординаты положительны), то есть расположен в 1-й и 2-й четвертях (черт. 65). График функции с нечетным показателем весь, кроме точки (0; 0), расположен в 1-й и 3-й четвертях (ординаты каждой точки графика или обе положительны, или обе отрицательны, черт. 66).

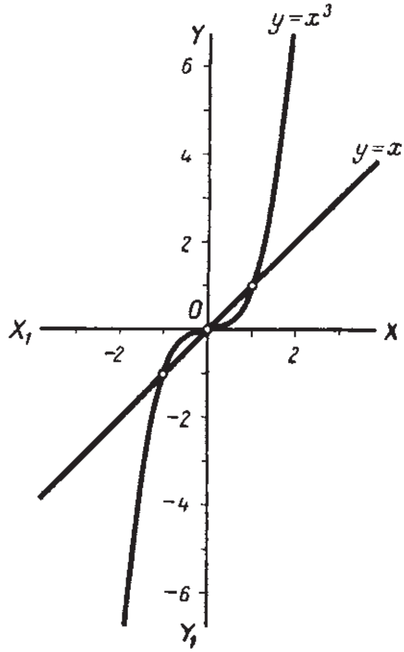
4) При увеличении x от $-\infty$ до $+\infty$ значения функции с нечетным показателем увеличиваются тоже от $-\infty$ до $+\infty$.

5) При увеличении x от $-\infty$ до нуля значения функции с четным показателем убывают от $+\infty$ до нуля, а при увеличении x от 0 до $+\infty$ увеличиваются от 0 до $+\infty$.

6) График функции с четным показателем симметричен относительно оси ординат, а график функции с нечетным показателем симметричен относительно начала координат.



Черт. 65.



Черт. 66.

2. Функция $y=\sqrt[n]{x}$. Из функций этого вида ранее уже были рассмотрены функции $y\sqrt{x}$ и $y=\sqrt[3]{x}$. На чертеже 67 даны графики этих функций.

Как было выяснено (§ 10 и 26), эти графики могли быть получены поворотом на 180° около биссектрисы первого координатного угла графиков функций $y=x^2$; $y=x^3$. На графиках видно, что

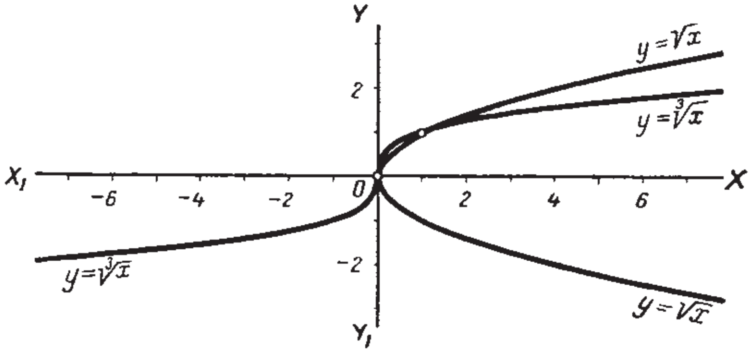
1) Оба графика проходят через начало координат (при $x=0$ $\sqrt{x}=0$ и $\sqrt[3]{x}=0$).

2) При увеличении x от 0 до ∞ значения обеих функций увеличиваются от 0 до ∞.

Покажем теперь существенное различие между этими двумя функциями.

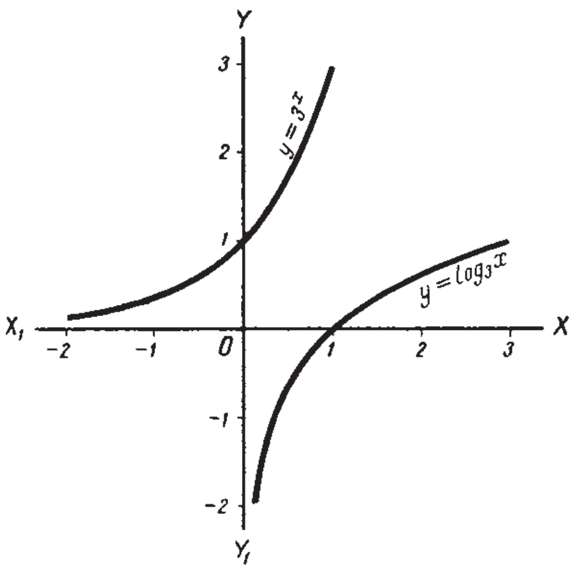
$y=\sqrt{x}$. При $x<0$ выражение $\sqrt{x}$ не имеет смысла. Следовательно, x в данной функции может принимать только положительные значения и значение нуль. (Говорят, что функция определена на множестве неотрицательных значений аргумента.)

Пусть $x=4$. Тогда, беря арифметический корень, получим $\sqrt{4}=2$. Но мы знаем, что фактически $\sqrt{4}$ имеет два значения



Черт. 67.

$\sqrt{4}=\pm 2$. Графически это значит, что для каждого положительного значения абсциссы x будем иметь два значения ординаты y и в соответствии с этим получим на графике две точки, симметричные относительно оси абсцисс (вспомним, что график функции $y=x^2$ симметричен относительно оси ординат).

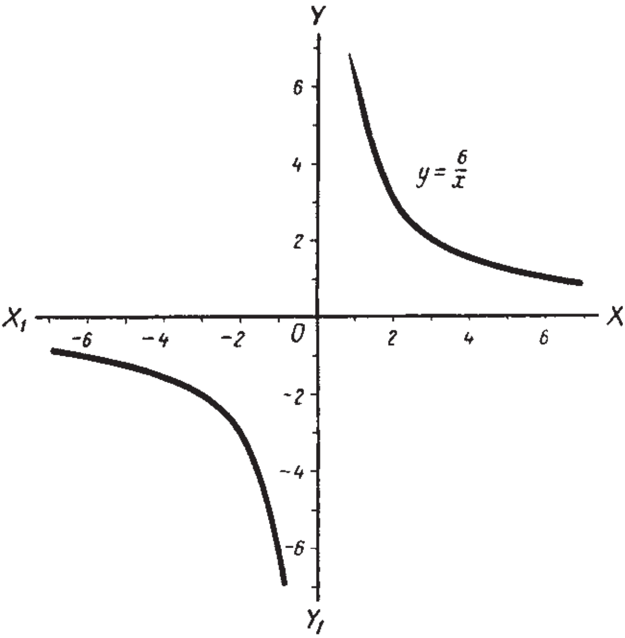


Черт. 68.

Сказанное относительно функции $y=\sqrt{x}$ целиком относится к функции $y=\sqrt[n]{x}$ с любым натуральным четным показателем n.

В отличие от функции $\sqrt{x}$ функция $y=\sqrt[3]{x}$ допускает для x и отрицательные значения. Значит, x может принимать любые значения от $-\infty$ до $+\infty$. Каждая точка графика функции $y=\sqrt[3]{x}$ имеет или обе положительные, или обе отрицательные координаты, причем если $\sqrt[3]{a}=b$, то $\sqrt[3]{-a}=-b$. Значит, график расположен симметрично относительно начала координат. Сказанное о функции $y=\sqrt[3]{x}$ относится и к функции $y=\sqrt[n]{x}$ с любым натуральным нечетным показателем n.

3. Функции $y=a^x$ и $y=\log a^x$. Свойства показательной функции $y=a^x$ и обратной ей логарифмической $y=\log_a x$ были рассмотрены в § 91, 93 и 94.



Черт. 69.

Напомним их (считаем $a>1$).

1) Функция $y=a^x$ определена на множестве действительных чисел, функция $y=\log_a x$ определена только на множестве положительных чисел.

2) Обе функции возрастающие.

3) При всех значениях x функция a^x положительна. Функция $\log_a x$ при $x>1$ положительна; при $x=1$ равна нулю; при $x<1$ отрицательна.

Все эти свойства легко установить, рассматривая график обеих функций (на чертеже 68 даны графики обеих функций при $a=3$).

4. Функция $y=\frac{a}{x}$. Эта функция была рассмотрена в § 23 для $a=1$. Ее отличительная особенность от всех предыдущих функций заключается в том, что ее график, называемый гиперболой, состоит из двух не связанных между собой ветвей. (На черт. 69 дан график функции $y=\frac{6}{x}$.) Когда значения x увеличиваются от $-\infty$ до нуля (оставаясь меньше его), значения функции отрицательны и уменьшаются, увеличиваясь безгранично по абсолютной величине. Когда значения x увеличиваются от нуля (оставаясь больше его) до ∞, значения функции уменьшаются, приближаясь к нулю, но оставаясь все время больше его. При $x=0$ функция теряет смысл. График функции „разрывается“ при $x=0$.

§ 103. Обозначение функций.

В предыдущем параграфе были рассмотрены функции, в которых функциональная зависимость выражалась различно, например:

$$y=kx;$$

$$y=a^x.$$

Все эти функции (по самому определению функциональной зависимости) имеют одно общее свойство: каждому значению переменного x соответствует определенное значение переменного y.

В математике это общее свойство всех функций принято коротко записывать так:

$$y=f(x). \qquad (1)$$

(Читается: „y — функция от x“, или: y равно эф от x.)

Буква f показывает, что между переменными x и y существует некоторая функциональная зависимость.

Если одновременно рассматривается несколько различных функций, то они обозначаются различными буквами, например:

$$f(x)=ax^2;$$

$$\varphi(x)=ax^2+bx+c;$$

$$F(x)=\frac{1}{x} \text{ и т. п.}$$

Иногда функции записываются с помощью одной и той же буквы, но с различными „индексами“, например:

$$f_1(x)=x^2-1; \quad f_2(x)=x^2+1 \text{ и т. д.}$$

Значение функции $f(x)$ при $x=a$ обозначается так:

$$f(a).$$

Пусть, например,

$$f(x)=\frac{x-1}{2}.$$

Тогда

$$f(1)=\frac{1-1}{2}=0; \quad f(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}; \quad f(0{,}3)=\frac{0{,}3-1}{2}=-0{,}35.$$

Таким же образом, для функции $f(x)=2^x$ будем иметь:

$$f(1)=2; \quad f(-2)=2^{-2}=\frac{1}{4}; \quad f(0)=1 \text{ и т. п.}$$

§ 104. Элементарное исследование некоторых функций.

Если задана функция, то относительно ее может быть поставлен ряд вопросов для выяснения характерных особенностей этой функции, например:

1) Какие значения аргумента являются для данной функции допустимыми (установить область определения функции)?

2) Какие значения может принимать функция (установить область изменения функции)?

3) Какой вид имеет график функции (построение графика)?

4) При каких значениях аргумента функция обращается в нуль (график имеет общие точки с осью абсцисс)?

5) Не является ли функция монотонно возрастающей или убывающей? И т. д. Конечно, могут быть поставлены и другие вопросы. Например, если функция не является монотонной, то можно поставить вопрос — при каких значениях x она возрастает и при каких убывает (установить промежутки монотонности). Если в выражение функции входят, например, буквенные коэффициенты (параметры), то можно поставить вопрос, как изменяются те или иные свойства функции и ее график при различных значениях параметров и т. п.

Ответить на эти и подобные им вопросы — и значит исследовать данную функцию.

Приведем несколько примеров элементарного исследования функций.

1. $\boldsymbol{y=kx+b}$. С этой функцией мы уже неоднократно встречались раньше. Напомним ее основные свойства.

1) Аргумент может принимать любые действительные значения.

2) Если $k>0$, то при увеличении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция тоже увеличивается от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, при $k>0$ функция $y=kx+b$ — возрастающая.

Наоборот, при $k<0$ функция будет убывающей; при увеличении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

3) Графиком функции является прямая. При $k>0$ она с увеличением x поднимается вверх, при $k<0$ — опускается вниз.

4) При $k=0$ функция принимает вид

$$y=b.$$

Значит, при любом значении абциссы x ордината y графика имеет одно и то же значение b. Это значит, что графиком функции $y=b$ является прямая, параллельная оси абсцисс и отстоящая от нее на расстояние $|b|$ (выше оси абсцисс, если $b>0$; ниже, если $b<0$, и совпадающая с ней, если $b=0$).

5) Решив уравнение $kx+b=0$, найдем $x=-\frac{b}{k}$. Значит, функция обращается в нуль при $x=-\frac{b}{k}$ (график пересекает ось абсцисс в точке $\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$.

2. $y=2^{\sqrt{x}}$.

1) Для аргумента x допустимыми являются только неотрицательные значения x, то есть $x\geqslant 0$.

2) При $x_1<x_2$ будет $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$ (§ 4), а следовательно, и $2^{\sqrt{x_1}}<2^{\sqrt{x_2}}$. Значит, данная функция монотонно возрастающая.

При $x=0$ функция принимает наименьшее значение, равное единице $(2^{\sqrt{0}}=2^0=1)$.

4) При неограниченном увеличении x функция также увеличивается неограниченно.

5) Чтобы построить график функции, дадим аргументу несколько числовых значений и для сравнения вычислим значения функций 2^x и $2^{\sqrt{x}}$.

x	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	9
2^x	1	1,10	1,41	2	4	16	512
$2^{\sqrt{x}}$	1	1,30	1,63	2	2,66	4	8

Из этой таблицы видим, что точки (0; 1) и (1; 2) принадлежат обоим графикам. При значениях x между нулем и единицей график функции $2^{\sqrt{x}}$ лежит выше, а при значениях x, бóльших единицы — ниже графика функции 2^x.

При этом значения функции $2^{\sqrt{x}}$ (при $x>1$) растут гораздо медленнее чем значения функции 2^x. Графики обеих функций даны на чертеже 70.

3. $y=\sin kx$. Исследуем эту функцию при $k=2$.

$$y=\sin 2x.$$

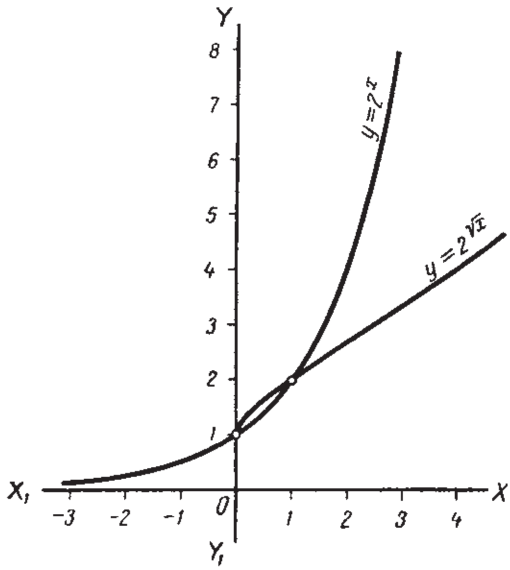
1) Для аргумента x допустимым является все множество действительных чисел.

2) Так как $-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$ при любом α, то функция может принимать значения только от -1 до $+1$.

3) При любом произвольном значении x будем иметь:

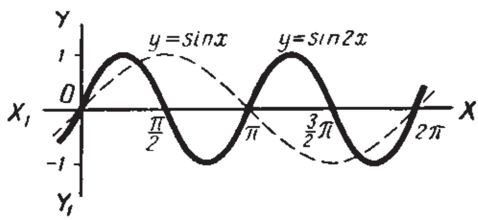
$$\sin 2(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x.$$

Значит, функция $y = \sin 2x$ периодическая с периодом π. (Можно доказать, что π является наименьшим периодом для этой функции.)



Черт. 70.

График функции дан на чертеже 71. Он представляет собой синусоиду, но только ее звенья как бы сжаты вдвое по сравнению



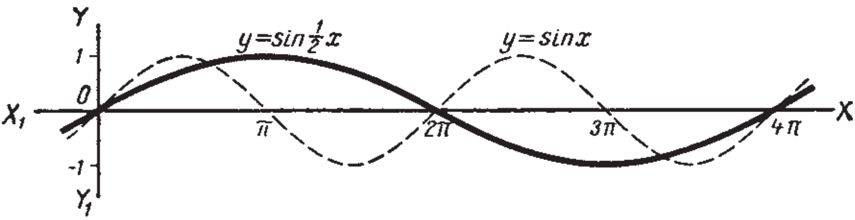
Черт. 71.

с графиком функции $y = \sin x$. Из этого примера можно вывести заключение, что вообще при $k > 1$ график функции $y = \sin kx$

будет представлять собой синусоиду, звенья которой сжаты в k раз. Период функции будет равен $\frac{2\pi}{k}$.

Наоборот, если возьмем, например, функцию

$$y = \sin \frac{1}{2} x,$$



Черт. 72.

то можно показать, что ее наименьший период будет равен 4π. График представляет собой синусоиду, звенья которой растянуты в 2 раза по сравнению с графиком функции $y = \sin x$ (черт. 72).

§ 105. Графический способ решения уравнений.

В § 70 был показан графический способ решения систем уравнений второй степени. Он заключался в том, что строились графики обоих уравнений. Координаты каждой точки пересечения этих графиков давали одно из решений системы. Число точек пересечения определяло и число решений системы.

Графический способ дает возможность найти корни (точные или приближенные) таких уравнений с одним неизвестным, которые не поддаются решению обычным алгебраическим способом.

Пусть дано уравнение

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{1}$$

где символами $f_1(x)$ и $f_2(x)$ кратко обозначены левая и правая части уравнения.

Обозначив каждую часть через y, будем иметь:

$$\begin{aligned} y &= f_1(x), \\ y &= f_2(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Получили систему уравнений, равносильную уравнению (1). Действительно, каждое решение уравнения (1) является и решением системы (2) и обратно.

Но систему (2) мы можем решить графически, построив графики уравнений (2) и найдя координаты их точек пересечения. Абсциссы этих точек и будут корнями уравнения (1).

Приведем примеры.

Пример 1.

$$a^x = kx. \qquad (3)$$

Решим это уравнение при $a = 2$ и $k = 4$.

Имеем:

$$2^x = 4x. \qquad (4)$$

Обозначив правую и левую части через y, получим систему:

$$\begin{cases} y = 2^x, \\ y = 4x. \end{cases} \qquad (5)$$

Построим графики этих уравнений.

График первого — это график показательной функции; график второго — прямая, проходящая через начало координат. Построив их на одном чертеже (черт. 73), увидим, что они пересекаются в двух точках: абсцисса одной равна 4, а другой равна приблизительно 0,3.

При $x = 4$ подстановка в (4) дает:

$$2^4 = 16, \ 4 \cdot 4 = 16, \text{ то есть } 16 = 16.$$

Подстановка $x = 0{,}3$ в правую часть уравнения (4) дает:

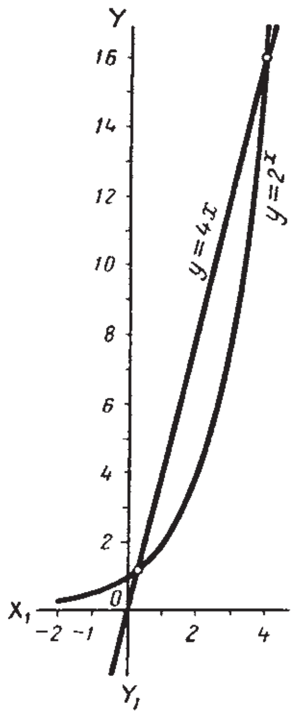
$$4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2.$$

Вычислив $2^{0,3}$ (с помощью таблиц логарифмов,) найдем $2^{0,3} \approx 1{,}23$. Разность левой и правой части равна 0,03. Более точное значение $x = 0{,}31$ дало бы в левой части 1,23, в правой 1,24, то есть разность в 0,01.

Таким же образом решается уравнение (3) и при других значениях a и k.

Например, при $a = 2$ и $k = 2$ получили бы два решения:

$$x_1 = 1 \text{ и } x_2 = 2.$$



Черт. 73.

Значит, графики функций $y = 2^x$ и $y = 2x$ пересекаются в двух точках (1; 2) и (2; 4). Можно увидеть на чертеже 73, что график функции $y = 2^x$ проходит через эти точки. Координаты этих же точек удовлетворяют и уравнению $y = 2x$.

Может случиться, что графики функций $y = a^x$ и $y = kx$ будут иметь лишь одну общую точку. Тогда уравнение имеет единственное решение. Если графики не имеют ни одной общей точки, уравнение не имеет решений.

Например, не имеет решений уравнение $2^x = x$, что легко установить, проведя мысленно на чертеже 73 график функции $y = x$. Таким же способом можно решить и уравнения, например, такого вида:

$$a^x = mx + n; \quad a^x = mx^2 + nx + p \text{ и т. п.}$$

В первом уравнении графиком правой части будет прямая, во втором парабола.

Пример 2. $$\log_a x = kx. \tag{6}$$

Решим это уравнение при $a = 2$ и $k = \frac{1}{2}$.

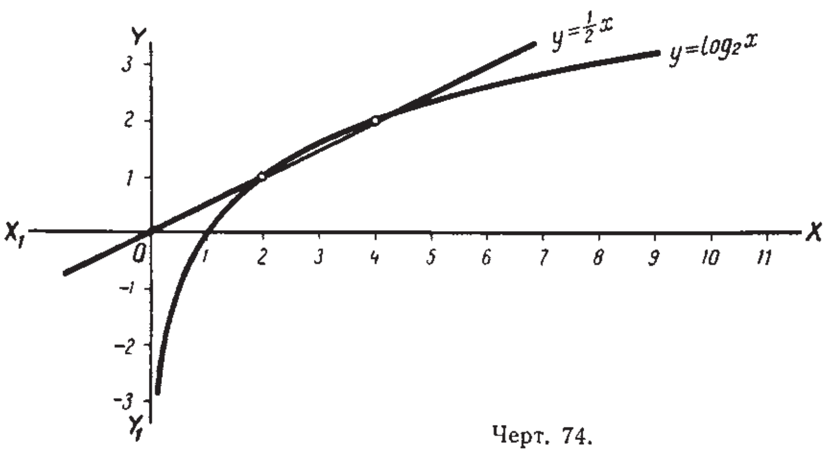
Будем иметь:

$$\log_2 x = \frac{1}{2} x. \tag{7}$$

Обозначим:

$$\begin{cases} y = \log_2 x, \\ y = \frac{1}{2} x. \end{cases}$$

Получили систему уравнений. Построив графики, определим абсциссы точек их пересечения. Получим: $x_1 = 2$; $x_2 = 4$. Из чер-



Черт. 74.

тежа 74 видно, что более двух найденных решений уравнение (7) иметь не может.

Уравнение (6) при различных значениях a и k может иметь два, или одно решение, или не иметь решений. Например, уравнение $\lg x = x$ не имеет решений.

Пример 3. $$\sin x = kx. \tag{8}$$

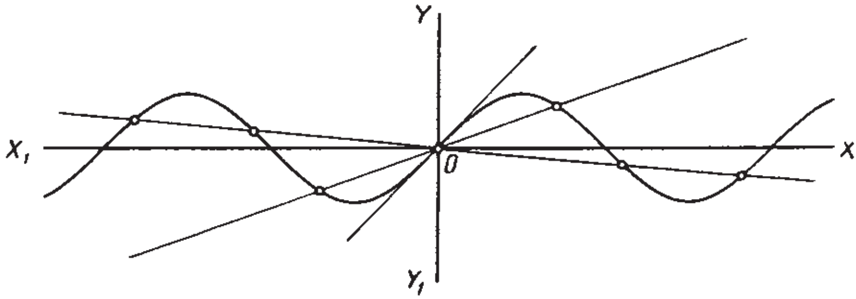
Решения этого уравнения найдутся как абсциссы точек пересечения графиков функций:

$$y = \sin x \text{ и } y = kx.$$

Уравнение (8) существенно отличается от уравнений (3) и (6) следующими особенностями.

1) Оно всегда имеет хотя бы одно решение. Таким решением будет $x=0$, так как и синусоида и прямая $y=kx$ проходят через начало координат.

2) Если уравнение (8), кроме корня $x=0$, имеет еще какой-либо корень $x=a$, то оно имеет и корень $x=-a$.



Черт. 75.

Действительно, из (8) имеем по умножении обеих частей на -1: $-\sin x=-kx$, или $\sin(-x)=k(-x)$,
а это равенство показывает, что если x — какой-либо корень уравнения (8), то и $-x$ является его корнем.

3) Уравнение (8) может иметь и три, и пять, и вообще какое угодно нечетное число решений. Это легко видно из чертежа 75. Чем меньшие значения будем давать угловому коэффициенту k, тем более будет прямая $y=kx$ наклонена к оси абсцисс и тем более звеньев синусоиды она будет пересекать, то есть тем более будет иметь общих точек с синусоидой.

Примеры.

а) $\sin x=x$.

Уравнение имеет единственное решение: $x=0$ (черт. 75). Действительно, из тригонометрии мы знаем, что при любом положительном x имеет место неравенство $\sin x<x$. Значит, никакое положительное значение x не может удовлетворять уравнению (8).

Но ему не может удовлетворить и никакое отрицательное значение x так как тогда по предыдущему оно имело бы и положительный корень $-x$, чего, как мы только что убедились, быть не может.

Отсюда следует, что уравнение (8) имеет единственное решение $x=0$ и при любом $k>1$, так как тогда при $x>0$ будет $x<kx$, а значит, и подавно $\sin x<kx$.

б) $\sin x = \frac{1}{2} x$.

Построив графики $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2} x$ (черт. 75), найдем три решения:

$$x_1 \approx -1{,}9; \quad x_2 = 0; \quad x_3 \approx 1{,}9$$

§ 106. Понятие о пределе функции.

В главе VIII было введено понятие предела переменной величины, а именно: если переменная величина приближается к некоторой постоянной величине так, что абсолютная величина разности между ними становится и при дальнейшем изменении переменной остается меньше любого положительного числа, то постоянная величина называется пределом переменной.

Пусть дана некоторая функция

$$y = f(x),$$

и пусть переменная x изменяется так, что приближается к некоторому пределу a.

$$x \to a \quad \text{или} \quad \lim x = a.$$

Как будет вести себя при этом переменная y? Рассмотрим несколько примеров.

Возьмем функции:

$$1)\ y = 8 - x; \qquad 2)\ y = \frac{1}{3 - x}.$$

Пусть аргумент x изменяется так, что приближается к пределу, равному 3, оставаясь все время меньше его.

$$x \to 3.$$

Покажем, что тогда переменная $y = 8 - x$ стремится к пределу, равному 5. Представим эту функцию в таком виде:

$$y = 5 + (3 - x), \text{ или } y - 5 = 3 - x.$$

Так как $x \to 3$, то по определению предела переменной разность $3 - x$ по мере приближения x к трем, сделается и при дальнейшем изменении x останется меньше сколь угодно малого положительного числа. Но эта разность равна $y - 5$.

Отсюда следует, что 5 является пределом y. Это записывается так:

$$y \to 5 \text{ при } x \to 3, \text{ или } \lim_{x \to 3} y = 5$$

Запись эта показывает, что когда x приближается к своему пределу, равному трем, переменная y тоже приближается к пределу, равному 5. Этот предел мы могли найти подставив $x = 3$ в функцию $y = 8 - x$.

Возьмем теперь функцию

$$y = \frac{1}{3 - x}.$$

Рассмотрим значения этой функции при некоторых значениях x, близких к 3.

x	2,9	2,99	2,999	2,999999
$3-x$	0,1	0,01	0,001	0,000001
$y=\frac{1}{3-x}$	10	100	1000	1000000

Видим, что по мере приближения x к трем величина y неограниченно увеличивается. Значит, в этом случае y становится бесконечно большой величиной. Согласно § 74 это мы можем записать так:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{3-x} = \infty .$$

Если $x \to 3$, все время оставаясь больше трех, то функция $y = 8 - x$ и в этом случае будет иметь пределом число 5. Действительно, в этом случае выражение $3 - x$, будучи отрицательным, становится по абсолютной величине меньше любого положительного числа. Согласно определению $y = 5 + (3 - x)$ будет иметь пределом 5.

Что касается функции $y = \frac{1}{3-x}$, то если $x \to 3$ и все время остается больше трех, то знаменатель, а следовательно, и y будут отрицательными. По мере приближения x к трем величина y будет, оставаясь отрицательной, неограниченно увеличиваться по абсолютной величине. Это записывается так:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{3-x} = -\infty.$$

Рассмотрим еще пример. Пусть переменная x увеличивается неограниченно, что можно записать так:

$$x \to \infty .$$

Как будут при этом вести себя функции

$$y = x^2; \quad y = \frac{2x+3}{x}; \quad y = \sin x?$$

Так как при $x > 1$ всегда $x^2 > x$ (§ 35), то при неограниченном увеличении x будет неограниченно увеличиваться и x^2 и мы можем записать:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty .$$

Функцию $y = \frac{2x+3}{x}$ мы можем записать так:

$$y = 2 + \frac{3}{x}, \text{ или } y - 2 = \frac{3}{x} .$$

При неограниченном увеличении x величина $\frac{3}{x}$ делается меньше любого положительного числа. Отсюда по определению следует, что число 2 является пределом y.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x} = 2.$$

Наконец, функция $y = \sin x$ при неограниченном увеличении x будет бесконечное число раз принимать всевозможные значения от -1 до $+1$.

Например, при x, равном π, 2π, ... 15π, 1000π и т. д. y будет равен нулю; при x равном $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi\ldots$ и т. д. y будет равен 1 или -1. Значит, при неограниченном увеличении x функция $y = \sin x$, оставаясь ограниченной, не стремится ни к какому пределу.

Из всех приведенных примеров можно сделать такой вывод.

Если аргумент стремится к пределу a (конечному, или бесконечному), то функция:

1) может иметь своим пределом некоторое конечное число b

$$\lim_{x \to a} f(x) = b;$$

2) может увеличиваться неограниченно по абсолютной величине

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \infty.$$

3) может не иметь никакого предела.

Если две или несколько функций имеют пределы при $x \to a$, то к ним, как к переменным величинам, применимы все свойства о пределах, изложенные в § 76, например:

если

$$\lim_{x \to a} f(x) = m \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = n,$$

то

$$\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} \varphi(x) = m + n.$$

§ 107. Скорость прямолинейного равномерного движения

Задача. *Велосипедист, двигаясь равномерно, в t_1 часов находился от города на расстоянии s_1 километров, а в t_2 часов на расстоянии s_2 километров. Определить скорость движения велосипедиста.*

Решение. За $(t_2 - t_1)$ часов велосипедист проехал $(s_2 - s_1)$ километров.

Следовательно, его скорость v равна:

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \qquad (1)$$

Более подробно можно рассуждать так: когда время движения увеличилось на $(t_2 - t_1)$ часов, пройденный путь увеличился на $(s_2 - s_1)$ километров. Чтобы определить постоянную скорость надо увеличение пути, или, как говорят, приращение пути, разделить на приращение времени.

Получим то же выражение (1).

В физике скорость прямолинейного равномерного движения вычисляется по формуле:

$$v = \frac{s}{t}, \qquad (2)$$

где s — пройденный путь от начала движения, t — время, в течение которого этот путь пройден. Очевидно, что эта формула является частным случаем формулы (1), когда $t_1 = 0$; следовательно, и $s_1 = 0$.

§ 108. Скорость прямолинейного неравномерного движения.

1. Скорость равномерно ускоренного движения. Если тело движется неравномерно, то его скорость — величина переменная. В этом случае мы можем вычислить среднюю скорость, разделив пройденный путь на время, в течение которого этот путь пройден. Истинная скорость движения тела в каждый данный момент будет, как правило, больше или меньше найденной средней скорости, и это отклонение может быть значительным.

Пусть тело движется равномерно ускоренно. Из физики мы знаем, что в этом случае путь s, пройденный телом, вычисляется по формуле:

$$s = \frac{at^2}{2}, \qquad (1)$$

где t — время движения, выраженное, допустим, в часах, a — постоянное число, а s — путь в километрах.

Скорость движения все время меняется (в данном случае увеличивается).

Как определить, какую скорость имеет тело в каждый данный момент?

Начнем с числового примера. Пусть $a = 6$, то есть путь, пройденный телом, движущимся равномерно ускоренно вычисляется согласно (1) по формуле:

$$s = 3t^2. \qquad (2)$$

Найдем скорость, которую приобрело тело по истечении 5 часов.

Вычислим сначала среднюю скорость, которую имело тело, двигаясь от 5 до 8 часов. Для этого:

1) Вычислим путь, пройденный телом за 5 часов

$$s_1 = 3 \cdot 5^2 = 75.$$

2) Вычислим путь, пройденный телом за 8 часов

$$s_2 = 3 \cdot 8^2 = 192.$$

3) Найдем приращение пути

$$s_2 - s_1 = 192 - 75 = 117.$$

4) Найдем приращение времени

$$t_2 - t_1 = 8 - 5 = 3.$$

5) Разделим приращение пути на приращение времени

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{117}{3} = 39.$$

Итак, средняя скорость движения тела за указанный промежуток времени была равна 39 *км* в час.

Эта средняя скорость дает некоторое приближенное представление о скорости тела по истечении 5 часов. Можно предвидеть, что если будем уменьшать промежуток времени, за который мы вычисляли среднюю скорость, то эта средняя скорость будет тем ближе к истинной скорости в момент $t = 5$, чем меньший промежуток будет взят.

Найдем среднюю скорость за небольшой промежуток времени от $t = 5$ до $t = 5 + h$.

1) Путь, пройденный телом за 5 часов:

$$s_1 = 3 \cdot 5^2 = 75.$$

2) Путь, пройденный телом за $5 + h$ часов:

$$s_2 = 3(5 + h)^2 = 3(25 + 10h + h^2) = 75 + 30h + 3h^2.$$

3) Приращение пути:

$$s_2 - s_1 = 30h + 3h^2.$$

4) Отношение приращения пути к приращению времени (то есть средняя скорость):

$$\frac{s_2 - s_1}{h} = 30 + 3h.$$

Итак, средняя скорость оказалась равной $30 + 3h$. Здесь ясно видно, что величина средней скорости зависит от промежутка времени h, за который мы ее вычисляем. Будем теперь уменьшать величину приращения h, приближая ее к нулю: $h \to 0$.

Найдем предел, к которому будет стремиться отношение $\frac{s_2 - s_1}{h}$ при $h \to 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{s_2 - s_1}{h} = \lim_{h \to 0} (30 + 3h) = \lim_{h \to 0} 30 +$$

$$+ \lim_{h \to 0} 3 \cdot \lim_{h \to 0} h = 30 + 3 \cdot 0 = 30.$$

Итак,

$$\lim_{h \to 0} \frac{s_2 - s_1}{h} = 30.$$

Вот этот предел мы и будем считать скоростью движения тела в момент $t = 5$.

Определение. **Скоростью в данный момент t называется предел средней скорости за промежуток от t до $t+h$, когда $h \to 0$.**

2. Вывод общей формулы. Выведем для равномерно ускоренного движения формулу, позволяющую вычислить скорость в любой момент времени.

1) Путь s, пройденный телом за время t, выражается формулой

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

2) Дадим времени t приращение, равное h, и вычислим путь, пройденный за время $t+h$

$$s_1 = \frac{a(t+h)^2}{2} = \frac{at^2}{2} + ath + \frac{ah^2}{2}$$

3) Найдем приращение пути

$$s_1 - s = ath + \frac{ah^2}{2}.$$

4) Найдем среднюю скорость, то есть отношение приращения пути к приращению времени

$$\frac{s_1 - s}{h} = at + \frac{ah}{2}$$

5) Найдем предел средней скорости при $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{s_1 - s}{h} = \lim_{h \to 0} at + \lim_{h \to 0} \frac{ah}{2} = at + 0 = at.$$

Эта величина по определению и выражает скорость v в момент t

$$v = at.$$

Взяв $a = 6$ и $t = 5$, найдем $v = 6 \cdot 5 = 30$ — ту самую величину, которую мы ранее вычислили для этих значений a и t.

3. Ускорение. Прямолинейное равномерно ускоренное движение определяется как такое движение, когда скорость его увеличивается в каждую единицу времени на одну и ту же величину. Эта величина называется ускорением.

Таким образом, ускорение в равномерно ускоренном движении является постоянным числом. Его мы можем определить так же, как определяли скорость равномерного движения.

Скорость v_1 в момент t_1 равна

$$v_1 = at_1.$$

Дадим t произвольное приращение h и найдем скорость v_2 в момент $t_1 + h$

$$v_2 = a(t_1 + h) = at_1 + ah.$$

Найдем приращение скорости

$$v_2 - v_1 = ah$$

Разделим приращение скорости на приращение времени

$$\frac{v_2 - v_1}{h} = a.$$

Переходим к пределу при $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{v_2 - v_1}{h} = \lim_{h \to 0} a = a.$$

Итак, коэффициент a в формуле равномерно ускоренного движения равен ускорению.

4. Произвольное переменное движение. Все, что выше сказано о скорости и ускорении равномерно ускоренного движения, можно целиком отнести к любому переменному движению. Только ускорение, в зависимости от вида формулы движения, может быть и не постоянным, а переменным.

Покажем это на примере.

Пусть тело движется по закону, выраженному формулой:

$$s = 2t^3 - 5t.$$

Найдем его скорость.

Дадим t приращение h и вычислим s_1

$$s_1 = 2(t + h)^3 - 5(t + h) = 2t^3 + 6ht^2 + 6h^2t + 2h^3 - 5t - 5h.$$

Приращение пути:

$$s_1 - s = 6ht^2 + 6h^2t + 2h^3 - 5h.$$

Отношение приращения пути к приращению времени (средняя скорость):

$$\frac{s_1 - s}{h} = 6t^2 + 6ht + 2h^2 - 5.$$

Предел отношения — скорость в момент t при $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{s_1 - s}{h} = 6t^2 + 0 + 0 - 5 = 6t^2 - 5.$$

Итак,

$$v = 6t^2 - 5.$$

Предлагаем учащимся таким же путем из этой формулы найти ускорение a и убедиться, что оно равно $12t$, то есть является переменной величиной.

§ 109. Понятие о производной.

Понятие скорости играет важную роль не только в движении, но и в многочисленных процессах, совершающихся в природе, в технике, в производстве, в быту.

Везде, где приходится иметь дело с изменением той или иной величины, можно, а часто и необходимо ставить вопрос о скорости этого изменения.

Так, можно говорить о скорости охлаждения нагретого тела, о скорости разложения воды на кислород и водород, о скорости роста растения, созревания плодов и пр.

Обычно изменение наблюдаемой величины и скорость этого изменения зависят от некоторой другой величины (или других величин), которую мы вправе поэтому назвать аргументом, а наблюдаемую величину функцией этого аргумента.

Здесь мы поставим вопрос о скорости изменения таких величин, зависимость которых от некоторой другой величины может быть выражена формулой.

Другими словами, будем изучать скорость изменения функций.

Пусть дана функция

$$y = f(x). \tag{1}$$

Поставим вопрос о скорости изменения этой функции в зависимости от значения x. (Рассматривая, например, график функции $y = x^2$, замечаем, что при бóльших значениях $|x|$ график поднимается вверх круче, то есть функция изменяется быстрее, чем при небольших значениях x.)

Будем поступать так же, как и при нахождении скорости равномерно ускоренного движения (§ 108).

Дадим аргументу x произвольное приращение h.

Функция (1) примет тогда новое значение y_1, которое мы можем обозначить так (§ 103):

$$y_1 = f(x + h). \tag{2}$$

Приращение функции будет равно

$$f(x + h) - f(x). \tag{3}$$

Тогда отношение приращения функции к приращению аргумента даст *средпюю скорость* изменения функции:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{4}$$

Пусть теперь $h \to 0$. Если при этом дробь $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ стремится к некоторому пределу, то этот предел и будем считать скоростью изменения функции (1) при данном x. Обозначив этот предел через y', будем иметь:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

В математике этот предел имеет особое название; он называется производной от функции $f(x)$ по x.

Определение. **Производной функции $y = f(x)$ по x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента x, когда приращение аргумента стремится к нулю.**

Производную от функции $y = f(x)$ мы обозначили через y'. Можно ее обозначить и так: $f'(x)$. Употребляются и другие обозначения.

Итак, производная от функции выражает скорость ее изменения. Эта скорость может оказаться постоянным числом и может зависеть от аргумента x. Приведем примеры.

Пример 1. Возьмем линейную функцию

$$f(x) = kx + b.$$

Найдем ее производную. Дадим x произвольное приращение h.

Новое значение функции будет:

$$f(x+h) = k(x+h) + b = kx + kh + b.$$

Приращение функции равно

$$f(x+h) - f(x) = kh.$$

Отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k.$$

Переходим к пределу при $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} k = k.$$

Итак,

$$f'(x) = k.$$

Производная функция $kx + b$ оказалась равной постоянному числу — коэффициенту при x.

Пример 2. Возьмем квадратный трехчлен

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Найдем так же, как и в предыдущем примере, его производную.

$$f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c.$$

Или

$$f(x+h) = ax^2 + 2ahx + ah^2 + bx + bh + c.$$

Отсюда

$$f(x+h)-f(x)=2ahx+ah^2+bh;$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2ax+ah+b;$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2ax+0+b.$$

Итак,

$$f'(x)=2ax+b.$$

Как видим, здесь производная, то есть скорость изменения функции, является величиной переменной, зависящей от аргумента x.

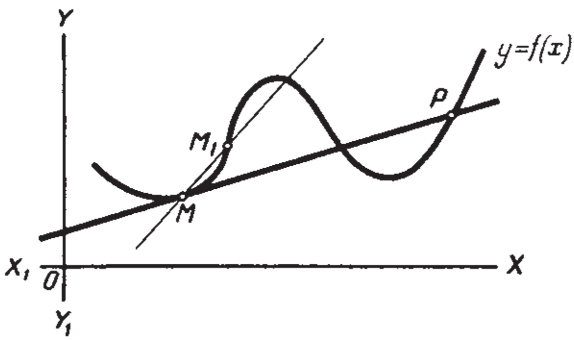
Из этих примеров мы можем вывести общее правило для нахождения производной.

Процесс нахождения производной состоит из следующих последовательных операций:

1. Даем аргументу произвольное приращение.
2. Находим значение функции при новом значении аргумента.
3. Находим приращение функции, вычитая ее прежнее значение из нового.
4. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента, деля первое на второе.
5. Находим предел отношения, когда приращение аргумента стремится к нулю.

§ 110. Геометрический смысл производной.

1. Касательная к кривой. Пусть дана какая-либо кривая $y=f(x)$ (черт. 76). Отметим на ней две точки M и M_1 и проведем через них секущую MM_1. Будем перемещать по кривой точку M



Черт. 76.

по направлению к точке M. Секущая MM_1 будет тогда поворачиваться вокруг точки M_1 и, когда точка M_1 сольется с точкой M, секущая примет некоторое положение MP. Прямую MP назовем касательной к данной кривой в точке M.

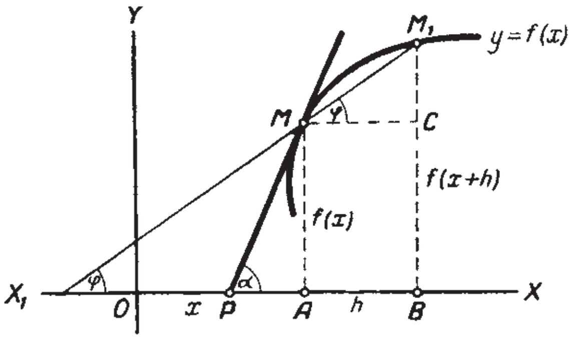
Определение. **Касательной к кривой в точке M называется предельное положение секущей, проходящей через точку M и другую точку кривой, когда эта вторая точка неограниченно приближается к M.**

Это определение касательной не совпадает с определением, которое в геометрии давалось для касательной к окружности. Там касательная к окружности определялась как прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. Определение же, данное выше, допускает, что касательная может иметь с кривой и другие общие точки. Так на чертеже 76 касательная MP имеет с кривой еще общую точку P. Таким образом, новое определение касательной шире прежнего (прежнее определение является его частным случаем).

2. Геометрический смысл производной. Пусть дана функция

$$y = f(x) \tag{1}$$

и ее график (черт. 77). Отметим на графике точку M с координатами x и $y = f(x)$. Дадим аргументу x приращение h и отметим на графике точку M_1 с абсциссой $x + h$. Ее ордината будет равна



Черт. 77.

$f(x + h)$. Проведем прямую MM_1 и перпендикуляр MC к ординате M_1B.

Обозначим угол, образуемый секущей MM_1, с положительным направлением оси абсцисс через φ. Тогда и $\angle CMM_1 = \varphi$.

Из треугольника MCM_1 имеем:

$$\frac{M_1C}{MC} = \operatorname{tg} \varphi. \tag{2}$$

Но

$$M_1C = M_1B - CB = f(x + h) - f(x),$$

$$MC = AB = h.$$

Делая подстановку в равенство (2), получим:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Будем теперь точку M_1 неограниченно приближать к M (следовательно, точка B будет приближаться к точке A, то есть $h \to 0$).

В пределе секущая MM_1 займет (по определению, данному выше) положение касательной MP. Пределом для угла φ будет угол α касательной с положительным направлением оси абсцисс.

Следовательно,

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha.$$

Но предел левой части равен $f'(x)$. Значит

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Тангенс угла, который прямая образует с положительным направлением оси абсцисс, называется **у г л о в ы м к о э ф ф и ц и е н т о м** этой прямой (§ 58). Следовательно, полученное равенство можно сформулировать так:

Производная функция $f'(x)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке его с абсциссой, равной x.

§ 111. Производная суммы.

Пусть данная функция является алгебраической суммой двух функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Тогда производные левой и правой части этого равенства должны быть равны. Найдем эти производные.

1) Дадим аргументу x приращение h. Получим:

$$f(x+h) = f_1(x+h) + f_2(x+h).$$

2) Вычтем из нового значения функции прежнее

$$f(x+h) - f(x) = [f_1(x+h) + f_2(x+h)] - [f_1(x) + f_2(x)].$$

Или, применив переместительный и сочетательный законы сложения:

$$f(x+h) - f(x) = [f_1(x+h) - f_1(x)] + [f_2(x+h) - f_2(x)].$$

3) Делим обе части полученного равенства на приращение аргумента

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h}.$$

4) Переходим к пределу при $h \to 0$, причем к правой части применим теорему о пределе суммы. Получим:

$$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

Весь ход рассуждений останется тем же самым, если взять не два, а три, четыре, вообще любое конечное число слагаемых.

Итак, мы показали, что для нахождения производной от суммы нескольких функций можно найти производные отдельно от каждого слагаемого и взять сумму найденных производных. Коротко это правило можно выразить в виде следующей теоремы.

Теорема. ***Производная суммы равна сумме производных, взятых от каждого слагаемого.***

Доказательство приведено выше.

§ 112. Производная произведения.

Докажем теорему.

Теорема. ***Производная произведения двух функций равна первому сомножителю, умноженному на производную второго, плюс второй сомножитель, умноженный на производную первого.***

Доказательство. Пусть дана функция

$$f(x)=f_1(x)f_2(x). \tag{1}$$

Требуется доказать, что

$$f'(x)=f_1(x)f_2'(x)+f_2(x)f_1'(x). \tag{2}$$

1) Даем аргументу приращение h, получим:

$$f(x+h)=f_1(x+h)f_2(x+h). \tag{3}$$

2) Вычитаем (1) из (3)

$$f(x+h)-f(x)=f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x)f_2(x).$$

3) Делим на h

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x)f_2(x)}{h}.$$

Для перехода к пределу преобразуем правую часть полученного равенства, вычтя и прибавив в числителе выражение:

$$f_1(x+h)f_2(x).$$

Получим:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x+h)f_2(x)+f_1(x+h)f_2(x)-f_1(x)f_2(x)}{h},$$

или

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f_1(x+h)\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}+f_2(x)\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h},$$

4) Переходя к пределу при $h \to 0$ и применяя теоремы о пределах, получим:

$$f'(x) = f_1(x) f_2'(x) + f_2(x) f_1'(x),$$

то есть равенство (2).

Пример

$$y = 5x(2x - 3).$$

$$y' = (5x)'(2x - 3) + 5x(2x - 3)'.$$

Приняв во внимание пример 1 в § 109, найдем:

$$(5x)' = 5; \qquad (2x - 3)' = 2.$$

Тогда

$$y' = 5(2x - 3) + 5x \cdot 2 = 10x - 15 + 10x = 20x - 15.$$

Для проверки выполним в данной функции умножение. Получим

$$y = 10x^2 - 15x.$$

Приняв во внимание пример 2 в § 109, получим:

$$y' = 20x - 15,$$

то есть то же выражение, что и выше.

§ 113. Производная степени с натуральным показателем.

Учитывая примеры 1 и 2 в § 109, можем написать:

$$(x)' = 1 = x^0; \tag{1}$$

$$(x^2)' = 2x. \tag{2}$$

Найдем еще производную функции x^3. Мы можем найти ее по общему правилу (§ 109), воспользовавшись формулой куба суммы. Но гораздо быстрее найдем ее, воспользовавшись теоремой предыдущего параграфа.

Представим x^3 как произведение $x^2 \cdot x$. Тогда по теореме § 112 будем иметь:

$$(x^3)' = x^2(x)' + x(x^2)' = x^2 \cdot 1 + x \cdot 2x = 3x^2.$$

Итак, производная x^3 равна $3x^2$.

Рассматривая производные функции x, x^2 и x^3, замечаем, что все они составлены по одному образцу: показатель степени аргумента умножен на степень того же аргумента, пониженную на единицу.

Докажем, что такой же вид имеет производная любой натуральной степени от аргумента.

Теорема.

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем теорему способом математической индукции. Мы видим, что для $n=1$ (а также для $n=2$ и $n=3$) равенство (3) справедливо. Допустим, что оно справедливо для $n=k$, то есть

$$(x^k)' = kx^{k-1}. \tag{4}$$

Докажем, что в таком случае оно будет справедливо и для $n=k+1$, то есть

$$(x^{k+1})' = (k+1)\,x^k. \tag{5}$$

Воспользуемся теоремой о производной произведения

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = x^k (x)' + x\,(x^k)'.$$

На основании равенств (1) и (4) получим:

$$(x^{k+1})' = x^k \;\; 1 + x \cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)\,x^k,$$

то есть равенство (5).

Теорема верна для показателя единицы и верна для любого показателя $k+1$, если верна для k. Отсюда по принципу математической индукции заключаем, что теорема верна для любого натурального показателя.

§ 114. Производная целой рациональной функции.

Целой рациональной функцией от одного переменного x называется многочлен:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{1}$$

Этот многочлен представляет собой сумму одночленов.

Чтобы найти производную многочлена, найдем сначала производную одночлена.

1. Производная одночлена вида ax^n.

Теорема. $(ax^n)' = nax^{n-1}$.

Доказательство. Учитывая пример 1 § 109 и теорему о производной степени, получим:

$$(ax^n)' = (ax \cdot x^{n-1})' = ax\,(x^{n-1})' + x^{n-1}(ax)' =$$
$$= (n-1)\,ax^{n-1} + ax^{n-1} = nax^{n-1}.$$

Теорема доказана.

2. Производная многочлена.

Теорема. *Если*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{2}$$

то

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1. \qquad (3)$$

Доказательство. Предоставляем учащимся применить теорему о производной суммы (§ 111) и о производной одночлена (п. 1).

§ 115. Предел отношения $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

Докажем теорему.

Теорема. ***Предел отношения*** $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ ***при*** α, ***стремящемся к нулю, равен единице.***

Надо доказать:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Возьмем окружность с радиусом $R = 1$ (черт. 78).

Отложим на ней дугу $AB = \alpha$ (в радианах). Построим линии синуса и тангенса угла α.

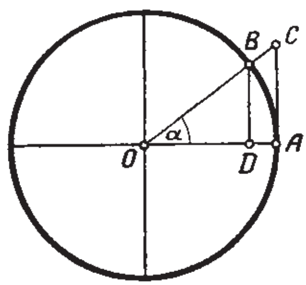
Из чертежа находим:

$$\text{пл. } \triangle DBO < \text{пл. сектора } AOB < \text{пл. } \triangle OAC; \qquad (1)$$

$$\text{пл. } \triangle ODB = \frac{1}{2}OD\cdot DB = \frac{1}{2}\cos\alpha\cdot\sin\alpha;$$

$$\text{пл. сектора } AOB = \frac{1}{2}R\ \ AB = \frac{1}{2}\alpha;$$

$$\text{пл. } \triangle OAC = \frac{1}{2}OA\cdot AC = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$$



Черт. 78.

Делая подстановку в (1), получим:

$$\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Разделим все члены неравенств на $\frac{1}{2}\sin\alpha$.

$$\cos\alpha < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

Переходим к пределу при $\alpha\to 0$.

Воспользуемся достаточно очевидной теоремой, которую примем без доказательства: если переменная величина при всех ее изменениях заключена между двумя другими, имеющими один и тот же предел, то и эта переменная имеет тот же предел.

Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\cos\alpha} = 1$, то на основании приведенной теоремы можем написать:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1. \qquad (4)$$

Так как

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\sin\alpha}},$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \lim\frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Примечание. Заметим, что теорема верна и для отрицательных значений α.

Действительно:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

§ 116. Производные функций $\sin mx$ и $\cos mx$.

Теорема о пределе отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ поможет нам легко найти производные функций $\sin mx$ и $\cos mx$.

Теорема 1. **$(\sin mx)' = m\cos mx$.**

Доказательство. Пусть дана функция

$$f(x) = \sin mx.$$

1) Даем x приращение h. Получим:

$$f(x+h) = \sin m(x+h).$$

2) Найдем приращение функции

$$f(x+h) - f(x) = \sin m(x+h) - \sin mx.$$

3) Делим на h

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin m(x+h) - \sin mx}{h}.$$

К числителю правой части применим формулу разности синусов

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2\cos m\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{mh}{2}}{h},$$

или, умножив числитель и знаменатель на $\frac{m}{2}$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m\cos m\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{mh}{2}}{\frac{mh}{2}}.$$

4) Переходим к пределу при $h\to 0$, используя теорему о пределе произведения и теорему о пределе отношения $\frac{\sin x}{x}$.

Получим:

$$f'(x) = m \cos mx,$$

что и требовалось доказать.

В частности при $m = 1$ имеем: $(\sin x)' = \cos x$.

Теорема 2. $(\cos mx)' = -m \sin mx$.

Доказательство. Пусть дана функция

$$f(x) = \cos mx.$$

Производим последовательно те же операции, что и при нахождении производной от $\sin mx$.

$$f(x+h) = \cos m(x+h).$$

$$f(x+h) - f(x) = \cos m(x+h) - \cos mx =$$
$$= -2 \sin \frac{m(x+h) + mx}{2} \sin \frac{m(x+h) - mx}{2};$$

$$f(x+h) - f(x) = -2 \sin m\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{mh}{2};$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{2 \sin m\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{mh}{2}}{h};$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -m \sin m\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{mh}{2}}{\frac{mh}{2}};$$

$$f'(x) = -m \sin mx,$$

что и требовалось доказать.

В частности при $m = 1$ имеем:

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

§ 117. Возрастание и убывание функций.

Возьмем функцию

$$y = 2x. \qquad (1)$$

Эта функция возрастает во всей области ее определения. Действительно, для любых значений аргумента x имеем: если $x_2 > x_1$, то и $2x_2 > 2x_1$, то есть $y_2 > y_1$. Наоборот, функция $y = -2x$ убывает во всей области ее определения, так как если $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, то есть $y_2 < y_1$.

Функция может возрастать при одних и убывать при других значениях аргумента. Так, функция $y = x^2$ убывает при отрицательных и возрастает при положительных значениях аргумента x.

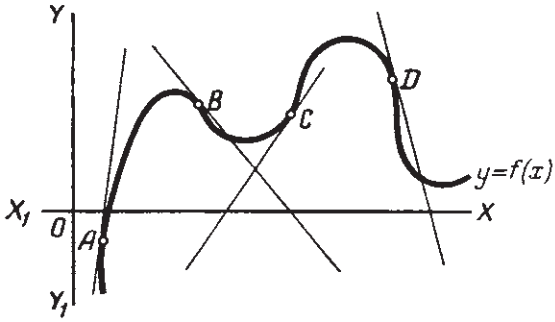
Пусть кривая на чертеже 79 является графиком некоторой функции $y = f(x)$. В точках A, B, C, D графика проведены касательные к кривой. Замечаем, что там, где угол, который образует касательная с положительным направлением оси абсцисс, острый, функция возрастает, а где этот угол тупой, функция убывает. То же наблюдаем, например, на графике функции $y = x^2$.

Тангенс острого угла положителен, а тупого отрицателен.

Но мы знаем (§ 110), что тангенс угла касательной к кривой с осью абсцисс равен значению производной функции в точке касания. Следовательно, можно сделать такой вывод:

Если производная функции в данной точке положительна, то функция в этой точке возрастает, если отрицательна, то функция убывает.

Мы установили признак возрастания и убывания функции, рассматривая графики функции. В курсах высшей математики этот



Черт. 79.

признак строго доказывается. Пользуясь этим признаком, мы можем, уже не обращаясь к графику, определить, возрастает или убывает данная функция при тех или иных значениях аргумента.

Пример.

1. $y = 2x^2 - 5x + 1$. Ее производная: $y' = 4x - 5$.

Возьмем $x = 3$. Делая подстановку, найдем:

$4 \cdot 3 - 5 = 7 > 0$. Значит, при $x = 3$ функция возрастает.

Пусть $x = 1$, тогда $4 \cdot 1 - 5 = -1 < 0$. Значит, при $x = 1$ функция убывает.

§ 118. Максимум и минимум функции.

Рассматривая чертеж 80, замечаем, что ординаты кривой, то есть значения y, сначала возрастали и достигли в точке M наибольшего значения. Затем ординаты убывали, достигнув в точке N наименьшего значения, затем вновь стали возрастать.

Значение функции в точке M называется **максимумом**, а значение ее в точке N — **минимумом** функции.

Определение. **Если при всех значениях x, достаточно близких к a, имеет место неравенство**

$$f(x) < f(a),$$

то функция $y = f(x)$ имеет при $x = a$ максимум.

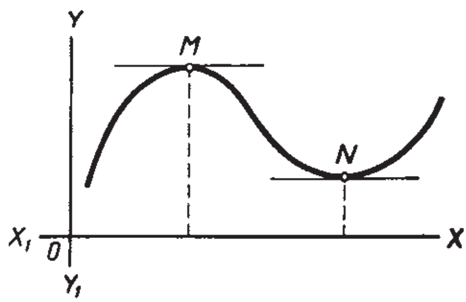
Если при всех значениях x, достаточно близких к a, имеет место неравенство

$$f(x) > f(a),$$

то функция $y = f(x)$ имеет при $x = a$ минимум.

Функция может не иметь ни максимума, ни минимума. Такова, например, функция $y = kx + b$. Функция может иметь несколько и даже бесконечно много максимумов и минимумов. Такова, например, функция $y = \sin x$. При x равном $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$, ... и т. д. она имеет максимальное значение, равное 1; при x равном $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{2}$, ... и т. д. имеет минимальное значение, равное -1.

Из чертежа 80 видим, что в точках максимума и минимума касательная параллельна оси абсцисс. А это значит, что ее угол с осью абсцисс равен нулю, то есть равна нулю производная функции в этой точке ($\operatorname{tg} 0° = 0$). Значит:



Черт. 80.

если функция имеет при $x = a$ максимум или минимум, то ее производная при $x = a$ равна нулю.

Заметим, что обратное положение было бы неверно: производная может быть равной нулю и при таких значениях x, при которых функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Значит, равенство нулю производной — необходимое условие существования максимума или минимума, но недостаточное.

В точке максимума функция переходит от возрастания к убыванию, а в точке минимума от убывания к возрастанию. Но функция возрастает, когда ее производная положительна, и убывает, когда ее производная отрицательна.

Отсюда следует:

Функция имеет при $x = a$ максимум, если ее производная при переходе через $x = a$ меняет знак плюс на минус. Функция имеет при $x = a$ минимум, если ее производная при переходе через $x = a$ меняет знак минус на плюс.

Из всего сказанного вытекает следующее правило для нахождения максимумов и минимумов функции.

1. Находим производную функции, приравниваем ее нулю и решаем полученное уравнение.

2. Каждый найденный корень x_i испытываем, подставляя в производную значения немного меньшие, а затем бóльшие корня.

Если производная при этом меняет знак плюс на минус, то функция при $x=x_i$ имеет максимум.

Если производная меняет знак минус на плюс, то фунция при $x=x_i$ имеем минимум.

Если производная не меняет знак, то функция при $x=x_i$ не имеет ни максимума, ни минимума.

3. Вычисляем значения функции при тех значениях x, при которых она имеет максимум или минимум.

Примеры.

1. $f(x)=x^3-4x^2+5x-1$.

1) Находим производную

$$f'(x)=3x^2-8x+5.$$

2) Решаем уравнение

$$3x^2-8x+5=0.$$

$$x_1=1; \quad x_2=\frac{5}{3}.$$

3) Испытываем корень $x_1=1$. Даем x значения $\frac{1}{2}$ и $\frac{4}{3}$ $\Big($одно значение меньше 1, другое — между 1 и $\frac{5}{3}\Big)$. Подставим их в $f'(x)$.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=3\cdot\frac{1}{4}-8\cdot\frac{1}{2}+5=1\frac{3}{4}>0.$$

$$f'\left(\frac{4}{3}\right)=3\cdot\frac{16}{9}-8\cdot\frac{4}{3}+5=-\frac{1}{3}<0.$$

При $x=1$ функция имеет максимум.

Вычислим его.

$$f(1)=1^3-4\cdot1^2+5\cdot1-1=1.$$

4) Испытываем корень $x_2=\frac{5}{3}$. Значение, меньшее $\frac{5}{3}$, мы уже брали. Возьмем еще $x=2$.

$$f'(2)=3\cdot4-8\cdot2+5=1>0.$$

При $x=\frac{5}{3}$ функция имеет минимум. Вычислим его.

$$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{125}{27}-4\quad\frac{25}{9}+5\cdot\frac{5}{3}-1=\frac{23}{27}.$$

2. $f(x) = x^4 - 18x^2 + 5$.

1) Находим производную

$$f'(x) = 4x^3 - 36x.$$

2) Решаем уравнение

$$x^3 - 9x = 0.$$

Находим

$$x_1 = -3; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 3.$$

Так как

$$-4 < -3 < -1 < 0 < 1 < 3 < 4,$$

то вычисляем

$$f'(-4); \quad f'(-1); \quad f'(1); \quad f'(4).$$

Получим:

$$f'(-4) = -112; \quad f'(-1) = 32; \quad f'(1) = -32; \quad f'(4) = 112.$$

При $x = -3$ и $x = 3$ функция имеет минимум, при $x = 0$ — максимум.

§ 119. Задачи на максимум и минимум.

Решение очень многих практических задач приводит к определению максимума или минимума некоторой функции. Приведем примеры наиболее простых задач.

Задача 1. *Периметр прямоугольного участка равен* 200 *м. Каковы должны быть длина и ширина этого участка, чтобы он охватил наибольшую площадь?*

Решение. Обозначим искомую длину участка через x метров. Тогда ширина его будет $(100 - x)$ метров. Площадь будет равна

$$S = f(x) = x(100 - x) = 100x - x^2.$$

Требуется узнать, при каком значении x величина площади участка будет наибольшей. Другими словами, требуется определить, при каком значении x функция $S = f(x)$ имеет максимум.

Находим производную

$$f'(x) = 100 - 2x.$$

Решаем уравнение

$$100 - 2x = 0; \quad x = 50.$$

Подставим в $f'(x)$ значения $x = 40$ и $x = 60$.

$$f'(40) = 100 - 80 = 20 > 0;$$

$$f'(60) = 100 - 120 = -20 < 0.$$

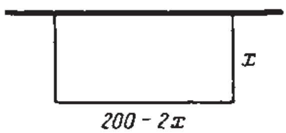
Значит, при $x = 50$ функция имеет максимум.

Ответ. Наибольшая площадь будет, когда длина равна 50 *м*, а следовательно, ширина равна $100 - 50 = 50$ (*м*). Другими словами, при данном периметре наибольшую площадь будет иметь квадрат.

Изменим несколько условие задачи 1.

Задача 2. *Прямоугольный участок одной стороной прилегает к стене дома. Длина забора 200 м. При каких размерах прямоугольника он охватит наибольшую площадь* (черт. 81)?

Решение. Пусть ширина участка x метров. Тогда его длина будет равна $(200-2x)$ метров, а площадь $S=f(x)=x(200-2x)=$ $=200x-2x^2$. Требуется определить, при каком значении x получится наибольшая площадь.



Черт. 81.

Находим производную

$$f'(x)=200-4x.$$

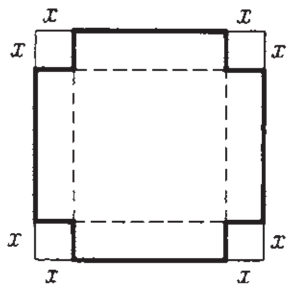
Решаем уравнение

$$200-4x=0; \quad x=50.$$

Подстановка в производную значений $x=40$ и $x=60$ показывает, что при $x=50$ функция имеет максимум.

Ответ. Ширина участка 50 *м*, а длина $200-2\cdot 50=100$ (*м*).

Задача 3. *Из квадратного листа жести со стороной* 10 *см требуется изготовить открытую коробку, вырезав по углам равные квадраты и загнув вертикально получившиеся выступы. Как велики должны быть вырезаемые квадраты, чтобы коробка имела наибольший объем* (черт. 82)?



Черт. 82.

Решение. Обозначим искомую сторону вырезаемых квадратов через x. Тогда длина и ширина полученной коробки будут равны $(10-2x)$ *кв. см*, площадь дна $(10-2x)^2$ *кв. см*, а объем коробки $V=(10-2x)^2x$ *куб. см.*

Требуется узнать, при каком значении x функция

$$f(x)=(10-2x)^2x=4x^3-40x^2+100x$$

будет иметь максимум.

Находим производную

$$f'(x)=12x^2-80x+100.$$

Решаем уравнение

$$12x^2-80x+100=0,$$

или, по сокращении на 4,

$$3x^2-20x+25=0.$$

Получим:

$$x_1=5; \quad x_2=\frac{5}{3}.$$

Первое решение явно непригодно, так как если отрезать квадраты со стороной в 5 *см*, то от листа ничего не останется.

Если мы все же подвергнем испытанию этот корень, подставив в производную $x=4$ и $x=6$, то получим:

$$f'(4)=-28<0; \quad f'(6)=52>0.$$

Значит, при $x=5$ функция имеет минимум.

Действительно, объем V тогда будет равен нулю.

Испытываем корень $x=\frac{5}{3}$, подставив в производную $x=1$ и $x=2$.

$$f'(1)=12-80+100=32>0;$$

$$f'(2)=12\cdot 4-80\cdot 2+100=-12<0.$$

При $x=\frac{5}{3}$ функция имеет максимум.

Ответ. Коробка будет иметь наибольший объем, когда сторона вырезаемых квадратов равна $\frac{5}{3}$ *см*.

§ 120. Краткие исторические сведения.

В § 110 было показано, что значение производной функции в точке x равно тангенсу касательной, проведенной к кривой в точке с абциссой x. С этой задачей проведения касательной к кривой в данной ее точке практически часто приходится встречаться при решении, например, различных задач механики. Эти задачи уже приводили такие крупнейшие математики начала XVII в., как Ферма и Декарт. Имея заданную точку и угол наклона (или тангенс этого угла) прямой к оси x, легко провести и самую прямую.

К понятию производной приводили и поиски наибольших и наименьших значений площадей, объемов, нагрузки и т. п. (например, при постройке каналов, плотин, судостроении и пр.).

Решение указанных двух задач для отдельных функций требовало создания единого метода, пригодного для возможно широкого класса функций. Это и было выполнено двумя великими математиками — Ньютоном (1643—1727) и Лейбницем (1646—1716). Первый в 1666 г. в своей работе по небесной механике ввел производную (у Ньютона она называлась „флюксией“), как величину, определяющую скорость движения точки (см. § 108). Лейбниц в 1684 г. опубликовал работу „Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления“. Так была создана новая ветвь математической науки — дифференциальное исчисление, которое занимается нахождением производных данной функции и изучением их свойств. Элементы этой науки и были изложены в главе XI.

Заметим, что Ньютоном и Лейбницем была создана и дисциплина, которую можно назвать обратной по отношению к первой. В ней по данной производной от некоторой неизвестной функции требуется определить самую функцию. Эта дисциплина называется интегральным исчислением. Интегральное исчисление имеет огромное применение в науке, технике, в практических приложениях (определение площадей, объемов и пр.).

ГЛАВА XII.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

§ 121. Понятие о комплексных числах.

Введение отрицательных и дробных чисел полностью разрешило вопрос о действиях вычитания и деления. Оба эти действия (кроме деления на нуль) стали выполнимыми для любых чисел.

Не совсем так обстоит дело с извлечением корня. Введение иррациональных чисел разрешило этот вопрос не полностью. Именно стало выполнимым извлечение корня натуральной степени из любого положительного числа (и нуля) и корня нечетной степени из отрицательного числа. Извлечение корня четной степени из отрицательного числа по-прежнему осталось невыполнимым. Выражение, например, $\sqrt{-3}$ осталось не имеющим смысла.

Такое положение создает большие неудобства для математики и суживает возможности ее практических применений.

Естественно поставить задачу: нельзя ли еще расширить множество чисел, ввести такие новые числа, чтобы стало выполнимым и извлечение корня четной степени из отрицательного числа. Тогда вопрос об извлечении корня будет решен полностью.

Поставим сначала вопрос об извлечении квадратного корня из отрицательного числа.

Так как $\sqrt{9} = \pm 3$, то определим $\sqrt{-9}$ как произведение $\sqrt{9}$ и некоторого числа, которое обозначим через i.

Значит, согласно определению, будем иметь:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i.$$

Условимся над числом $\sqrt{-9}$ и произведением $\pm 3i$ производить действия по тем же правилам, какие были установлены для действительных чисел. Возведем в квадрат обе части этого равенства.

Получим:

$$(\sqrt{-9})^2 = (\pm 3i)^2 = (\pm 3)^2 \cdot i^2,$$

или

$$-9 = 9i^2.$$

Разделив обе части на 9, получим:

$$-1 = i^2.$$

Итак, введенное нами число i является числом, квадрат которого равен -1. Оно называется мнимой единицей.

Пользуясь мнимой единицей, мы можем теперь записать квадратный корень из любого отрицательного числа, например:

$$\sqrt{-25}=\pm 5i; \quad \sqrt{-7}=\pm\sqrt{7}i; \quad \sqrt{-1}=\sqrt{1}\cdot i=\pm 1\cdot i.$$

Как и раньше, множитель 1 писать не будем.

Значит,

$$\sqrt{-1}=\pm i.$$

Введем теперь числа более общего вида, частным случаем которых будут числа, приведенные выше.

Определение 1. **Комплексным числом называется число вида $a+bi$, где a и b — любые действительные числа, а i — число, квадрат которого равен -1.**

Примеры комплексных чисел:

$$2+3i; \quad 1-i; \quad 0+\sqrt{3}i; \quad 2{,}3-0\cdot i.$$

Число a называется действительной частью комплексного числа, число b — коэффициентом при мнимой части, а все выражение bi — просто мнимой частью комплексного числа.

Определение 2. **Комплексное число, у которого коэффициент при мнимой части равен нулю, считается равным действительному числу a.**

$$a+0\cdot i=a.$$

Таким образом, все действительные числа входят как часть в множество комплексных чисел.

Примеры.

$$1{,}3-0\cdot i=1{,}3; \quad 5+0\cdot i=5; \quad 0+0\cdot i=0.$$

Определение 3. **Комплексное число, у которого коэффициент при мнимой части не равен нулю, называется мнимым.**

Примеры.

$$5-2i; \quad 7+i; \quad 0-8i=-8i.$$

Таким образом, все множество комплексных чисел разбивается на две группы (говорят: на два подмножества):

1) Действительные числа при $b=0$.

2) Мнимые числа при $b\neq 0$.

Определение 4. **Если в мнимом числе действительная часть равна нулю, то число называется чисто мнимым.**

Примеры.

$$2i; \quad -\sqrt{3}i; \quad i; \quad -i; \quad 0{,}17i.$$

Значит, чисто мнимые числа составляют часть множества мнимых чисел.

В течение всего курса приходилось иметь дело с различными множествами чисел: целыми, дробными, иррациональными и т. д. Соотношения между ними можно изобразить в виде следующей схемы:

- Комплексные числа
  - Действительные
    - Рациональные
      - Целые
        - Положительные
        - Нуль
        - Отрицательные
      - Дробные
        - Положительные
        - Отрицательные
    - Иррациональные
      - Положительные
      - Отрицательные
  - Мнимые
    - Чисто мнимые

Из схемы видно, что, например, целые положительные числа входят как часть в множество целых чисел, множество целых чисел входит как часть в множество рациональных чисел и т. д.

Определение 5. **Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны в отдельности их действительные части и коэффициенты при мнимой части.**

$$a+bi=c+di, \text{ если } a=c \text{ и } b=d.$$

Для мнимых чисел соотношения „больше" и „меньше" не определяются. Поэтому, если два мнимых числа не равны, то вопрос — которое из них больше — не имеет смысла.

§ 122. Геометрическое представление комплексных чисел.

Мы знаем (§ 14), что действительные числа изображаются геометрически точками на числовой оси; каждому действительному числу соответствует определенная точка на числовой оси. И обратно: каждая точка числовой оси изображает определенное действительное число. Значит, действительные числа заполняют всю числовую ось.

Для изображения комплексных чисел служит вся плоскость. Мы знаем, что каждая точка плоскости определяется двумя ее координатами.

Пусть на плоскости дана точка $M(a; b)$. Эту точку мы и будем считать изображением комплексного числа $a+bi$.

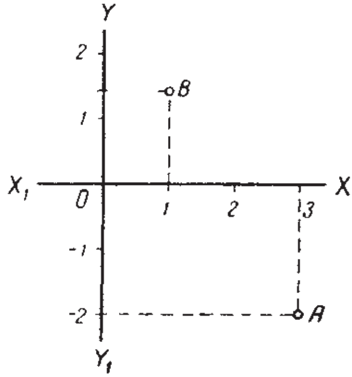
Таким образом, точка $A(3; -2)$ изображает комплексное число $3-2i$; точка $B(1; \sqrt{2})$ изображает число $1+\sqrt{2}i$ и т. д. (черт. 83).

Значит, каждой точке плоскости соответствует определенное комплексное число. И обратно: каждому комплексному числу $a+bi$ соответствует на плоскости определенная точка, именно точка с абсциссой a и ординатой b.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Числу $a+0 \cdot i=a$ соответствует точка $(a; 0)$. Эта точка лежит на оси абсцисс. Значит, все действительные числа по-прежнему располагаются на числовой оси, именно — на оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс называют также действительной осью.

2) Чисто мнимому числу $0+bi=bi$ соответствует точка с координатами $(0; b)$, то есть точка, лежащая на оси ординат. Поэтому ось ординат называют также мнимой осью.



Черт. 83.

3) Числам $a+bi$ и $a-bi$ соответствуют точки $(a; b)$ и $(a; -b)$, т. е. точки, имеющие одинаковые абсциссы и противоположные ординаты. Значит, они расположены симметрично относительно оси абсцисс. Такие числа называются сопряженными.

Определение. **Два комплексных числа, отличающиеся только знаком коэффициента при мнимой части, называются сопряженными.**

Сопряженные числа $a+0i$ и $a-0i$ равны одному и тому же числу a. Значит, действительное число является сопряженным самому себе.

Примеры.

$$1+7i \text{ и } 1-7i; \quad 8 \text{ и } 8; \quad -\sqrt{3}i \text{ и } \sqrt{3}i; \quad i \text{ и } -i.$$

§ 123. Модуль комплексного числа.

Пусть точка A (черт. 84) является изображением комплексного числа $a+bi$. Определим расстояние этой точки от начала координат. Из треугольника OBA имеем:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Так как r выражает расстояние, то понятно, что корень из a^2+b^2 берется арифметический. Число $\sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем комплексного числа $a+bi$.

Примечание. Так как $(-a)^2 = a^2$, то формула справедлива для любой точки плоскости независимо от знака ее координат.

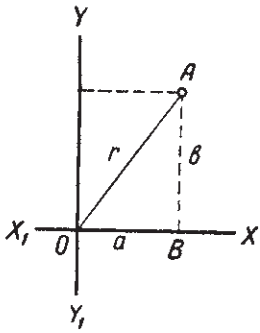
Определение. **Модулем комплексного числа называется арифметический квадратный корень из суммы квадратов его коэффициентов.**

Модуль числа $a + bi$ обозначается так:

$$|a + bi|.$$

Пример.

$$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$



Черт. 84.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Согласно определению модуля,

$$|5 + 12i| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$|5 - 12i| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Вообще

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$|a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Сопряженные числа имеют равные модули.

2) Определим модули нескольких действительных чисел.

$$|5| = |5 + 0i| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5; \quad |\sqrt{6}| = \sqrt{6 + 0} = \sqrt{6}.$$

$$|-3| = |-3 + 0 \cdot i| = \sqrt{9 + 0} = 3;$$

$$|-\sqrt{5}| = |-\sqrt{5} + 0 \cdot i| = \sqrt{5 + 0} = \sqrt{5}.$$

Вообще

$$|a| = |a + 0 \cdot i| = \sqrt{a^2 + 0} = |a|.$$

Модуль действительного числа равен его абсолютной величине.

Теперь понятно, почему для обозначения модуля комплексного числа и абсолютной величины действительного числа употребляется один и тот же знак: $| \quad |$.

Для действительных чисел оба эти понятия совпадают. Часто и модуль мнимого числа называют его абсолютной величиной.

§ 124. Действия над комплексными числами.

В § 121 мы условились производить над мнимыми числами вида bi действия по тем же правилам, какие были установлены для действительных чисел. Распространим теперь это условие на действия с любыми комплексными числами.

Действия над комплексными числами производятся по правилам действий над многочленами, считая число $a+bi$ суммой числа a и произведения чисел b и i.

Заметим, что при всех действиях с комплексными числами мы на основании равенства $i^2=-1$ можем выражение i^2 заменить числом -1.

Исходя из приведенного условия, определим первые четыре арифметические действия над комплексными числами.

1. Сложение. Выполним несколько сложений комплексных чисел по правилу сложения двучленов.

1. $(2+5i)+(7-3i)=2+5i+7-3i=9+2i.$

2. $(-3-4i)+(5+i)=-3-4i+5+i=2-3i.$

Вообще

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i.$$

Определение. **Суммой двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$.**

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Для сложения комплексных чисел остаются справедливыми переместительный и сочетательный законы:

$$(a+bi)+(c+di)=(c+di)+(a+bi)$$

$$[(a+bi)+(c+di)]+(m+ni)=(a+bi)+[(c+di)+(m+ni)].$$

Предлагаем учащимся проверить справедливость этих тождеств, выполнив сложение в левой и правой части каждого.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Найдем, согласно определению, сумму двух действительных чисел.

$$5+11=(5+0\cdot i)+(11+0\cdot i)=$$
$$=(5+11)+(0+0)i=16+0\cdot i=16.$$

Вообще

$$a+b=(a+0\cdot i)+(b+0\cdot i)=(a+b)+(0+0)i=$$
$$=(a+b)+0i=a+b.$$

Отсюда видим, что новое определение сложения для действительных чисел дает тот же результат, что и раньше.

2) Сложим два сопряженных числа.

$$(a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)i=2a.$$

Значит, сумма двух сопряженных чисел всегда равна действительному числу.

2. Вычитание.

Примеры.

1. $(6-3i)-(2+4i)=6-3i-2-4i=4-7i$.
2. $(-3+i)-(1-7i)=-3+i-1+7i=-4+8i$.

Вообще

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i.$$

Определение. **Разностью двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a-c)+(b-d)i$**

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Примечание. Так как вычитание определяется как действие, обратное сложению, то правило вычитания можно вывести из правила сложения.

Вычесть $c+di$ из $a+bi$ — значит найти такое число, которое, будучи сложено с вычитаемым $c+di$, даст уменьшаемое $a+bi$.

Обозначим это искомое число через $x+yi$.

$$(a+bi)-(c+di)=x+yi.$$

Отсюда по определению вычитания должно быть:

$$(x+yi)+(c+di)=a+bi.$$

Произведя в левой части сложение, получим:

$$(x+c)+(y+d)i=a+bi.$$

Но тогда, по определению равенства комплексных чисел (§ 121), должно быть

$$x+c=a \quad \text{и} \quad y+d=b.$$

Отсюда

$$x=a-c; \quad y=b-d.$$

Делая подстановку полученных выражений вместо x и y, будем иметь:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

то есть то самое выражение, которое дано выше в определении вычитания.

3. Умножение. Выполним несколько умножений комплексных чисел по правилу умножения двучленов (заменяя i^2 числом -1).

1. $(2+5i)(3+4i)=2\cdot3+2\cdot4i+5i\cdot3+5i\cdot4i=2\cdot3+$ $+2\cdot4i+5\cdot3i+5\cdot4i^2=(2\cdot3-5\cdot4)+(2\cdot4+5\cdot3)i=-14+23i$.
2. $(3-2i)(4+i)=3\cdot4+3\cdot i-2i\cdot4-2i\cdot i=[3\cdot4-(-2)\cdot1]+$ $+[3+(-2)\cdot4]i=14-5i$.

Вообще

$$(a+bi)(c+di)=ac+a\,di+bci+b\,di^2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Определение. **Произведением двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется число $(ac-bd)+(ad+bc)i$.**

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Для умножения комплексных чисел остаются в силе переместительный и сочетательный законы и распределительный закон по отношению к сложению (в приведенных выше примерах мы фактически уже пользовались ими).

$$(a+bi)(c+di)=(c+di)(a+bi). \quad (1)$$

$$[(a+bi)(c+di)](m+ni)=(a+bi)[(c+di)(m+ni)]. \quad (2)$$

$$[(a+bi)+(c+di)](m+ni)=(a+bi)(m+ni)+(c+di)(m+ni). \quad (3)$$

Для примера докажем справедливость последнего тождества (3).

Произведем сложения и умножения отдельно в левой и правой частях.

$$[(a+bi)+(c+di)](m+ni)=[(a+c)+(b+d)i](m+ni)=$$
$$=[(a+c)m-(b+d)n]+[(a+c)n+(b+d)m]i.$$
$$(a+bi)(m+ni)+(c+di)(m+ni)=[(am-bn)+(an+bm)i]+$$
$$+[(cm-dn)+(cn+dm)i]=(am-bn+cm-dn)+(an+bm+cn+dm)i.$$

Но для действительных чисел законы умножения справедливы. Поэтому последний результат можно записать в таком виде:

$$[(a+c)m-(b+d)n]+[(a+c)n+(b+d)m]i.$$

В обеих частях получили одно и то же число. Значит, тождество (3) справедливо. Так же доказывается справедливость тождеств (1) и (2).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Перемножим по введенному здесь правилу два действительных числа a и b.

$$ab=(a+0\cdot i)(b+0\cdot i)=(ab-0\cdot 0)+(a\cdot 0+0\cdot b)i=ab.$$

Отсюда видим, что умножение действительных чисел по новому правилу дает тот же результат, что и раньше.

2) Перемножим два сопряженных числа $a+bi$ и $a-bi$.

$$(a+bi)(a-bi)=[a\cdot a-b(-b)]+[a(-b)+b\cdot a]i=$$
$$=(a^2+b^2)+0\cdot i=a^2+b^2.$$

Произведение двух сопряженных комплексных чисел равно действительному числу — квадрату их модуля.

3) Возведем в квадрат число $3i$.

$$(3i)^2=(0+3i)(0+3i)+(0\cdot 0-3\cdot 3)+(0\cdot 3+3\cdot 0)i=-9.$$

Таким же способом найдем, что $(-3i)^2=-9$.

Значит,

$$(\pm 3i)^2=-9.$$

Отсюда

$$\sqrt{-9}=\pm 3i.$$

Получили то же самое равенство, которое мы по определению записали в § 121.

Таким образом, присоединение к действительным числам мнимых чисел сделало возможным извлечение квадратного корня из отрицательного числа.

4. Деление. Пусть требуется разделить комплексное число $a+bi$ на $c+di$. Представим частное в виде дроби.

$$\frac{a+bi}{c+di}.$$

Преобразуем эту дробь так, чтобы знаменатель был действительным числом. Для этого числитель и знаменатель умножим на $c-di$ — число, сопряженное с знаменателем.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Определение. **Частным от деления числа $a+bi$ на число $c+di$ называется число $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.**

$$(a+bi)\quad(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{1}$$

Примечание. Так как деление определяется как действие, обратное умножению, то правило деления можно вывести из правила умножения. Разделить число $a+bi$ на $c+di$ — значит найти такое число, которое, будучи умножено на делитель $c+di$, даст делимое $a+bi$.

Обозначим это искомое число через $x+yi$.

$$(a+bi):(c+di)=x+yi. \tag{2}$$

Отсюда

$$(c+di)(x+yi)=a+bi,$$

или

$$(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi.$$

Отсюда, по определению равенства комплексных чисел, должно быть:

$$cx-dy=a;$$
$$dx+cy=b.$$

Решив эту систему, найдем:

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Подставив эти значения в равенство (2), получим (1).

§ 125. Извлечение корня из комплексных чисел.

В предыдущем параграфе было показано, что введение комплексных чисел сделало возможным извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Но можно доказать, что и из любого комплексного числа можно извлечь квадратный корень, причем он, как и в случае действительных чисел, будет иметь два значения. Мы приведем здесь лишь окончательную формулу, позволяющую сразу написать оба квадратных корня из комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$ (предполагается $b>0$).

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \tag{1}$$

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right] \tag{2}$$

Примеры.

1. $\sqrt{5+12i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{5^2+12^2}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{5^2+12^2}-5}{2}}\right]=$

$=\pm\left[\sqrt{\frac{13+5}{2}}+i\sqrt{\frac{13-5}{2}}\right]=\pm(3+2i).$

2. $\sqrt{3-4i}=\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}+3}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{3^2+4^2}-3}{2}}\right]=$

$=\pm\left[\sqrt{\frac{5+3}{2}}-i\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right]=\pm(2-i).$

Легко проверить правильность полученных результатов, возведя их в квадрат (то есть умножив каждое число само на себя).

В более подробных курсах алгебры доказывается, что из всякого комплексного числа можно извлечь корень любой натуральной степени, причем каждый корень имеет столько значений, каков показатель корня.

Примечание. Предлагаем учащимся в виде упражнения вывести формулы (1) и (2), положив $\sqrt{a+bi}=x+yi$, а $\sqrt{a-bi}=x-yi$ и возведя оба равенства в квадрат.

§ 126. Решение уравнений.

Введение мнимых чисел значительно расширило возможности в области решения уравнений. Очень часто бывает, что уравнение не имеет действительных корней и, следовательно, является неразрешимым. Но оно может иметь мнимые корни и после введения мнимых чисел становится разрешимым.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Квадратные уравнения. В § 49 было установлено, что квадратное уравнение имеет два различных корня, если его дискриминант положителен, два равных корня, если дискриминант равен нулю, и не имеет решений, если дискриминант отрицателен.

Рассмотрим этот последний случай.

Пусть дано уравнение

$$x^2-4x+29=0.$$

Дискриминант $D=4^2-4\cdot 29<0$; следовательно, уравнение не имеет действительных корней. Но посмотрим, может быть этому уравнению удовлетворяют какие-либо мнимые числа.

Будем решать уравнение по формуле:

$$x=2\pm\sqrt{4-29}=2\pm\sqrt{-25}.$$

Но, как мы знаем, $\pm\sqrt{-25}=\pm\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=\pm 5i$. Следовательно, получим:

$$x=2\pm 5i.$$

Получили для x два мнимых значения.

Проверим подстановкой, удовлетворяют ли эти мнимые числа данному уравнению.

$$(2+5i)^2-4(2+5i)+29=4+20i+25i^2-8-20i+29.$$

Так как $i^2=-1$, то после замены получаем;

$$4+20i-25-8-20i+29=0.$$

Итак,

$$(2+5i)^2-4(2+5i)+29=0,$$

то есть число $2+5i$ действительно является корнем данного уравнения.

Таким же способом убедимся, что и $2-5i$ тоже является корнем данного уравнения.

Следовательно, общая формула решения квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

в случае $D=b^2-4ac<0$ дает для x два мнимых значения.

Таким образом, после введения мнимых чисел вывод, сделанный в § 49, мы должны заменить следующим:

Всякое квадратное уравнение имеет два решения (действительных или мнимых).

В частности для уравнения $x^2+1=0$ будем иметь решения

$$x=\pm\sqrt{-1}=\pm i.$$

Заметим, что теорема Виета остается верной и для мнимых корней, что легко проверить, вычислив x_1+x_2 и x_1x_2 и для того случая, когда $b^2-4ac<0$.

2. Двучленные уравнения. Двучленным уравнением называется уравнение вида

$$ax^n+b=0,$$

где a и b — любые не равные нулю числа, n — натуральное число. Решим несколько наиболее простых из этих уравнений.

Пример 1.

$$x^3-1=0.$$

Разложим левую часть на множители.

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

Отсюда

$$x-1=0;\quad x_1=1;$$

$$x^2+x+1=0;\quad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, данное уравнение имеет три решения — одно действительное и два мнимых.

Пример 2.

$$x^3+1=0.$$

Имеем

$$(x+1)(x^2-x+1)=0.$$

Отсюда

$$x+1=0; \quad x_1=-1.$$

$$x^2-x+1=0; \quad x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Решим еще двучленное уравнение четвертой степени.

Пример 3.

$$x^4-1=0.$$

Имеем

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)=0.$$

Отсюда

$$x-1=0; \quad x_1=1.$$

$$x+1=0; \quad x_2=-1.$$

$$x^2+1=0; \quad x_{3,4}=\pm i.$$

Итак, уравнение имеет четыре решения.

Предлагаем учащимся решить уравнение $x^6-1=0$ и показать, что оно имеет шесть корней.

§ 127. Краткие исторические сведения.

Мнимые числа завоевали себе место в математике еще с бо́льшим трудом, чем отрицательные (ч. 1, § 29) и иррациональные (ч. 2, § 18).

Как уже было сказано (§ 53), квадратные уравнения и способы их решения были известны уже древним математикам. Понятно, что среди этих уравнений встречались и такие, решение которых приводило к извлечению квадратного корня из отрицательного числа (уравнения, дискриминант которых $D<0$). Такие уравнения считались не имеющими решений (такими они считались и в настоящей книге до введения мнимых чисел в главе XII).

В XVI в. итальянский математик Кардано показал, что, соблюдая известные правила действий с квадратными корнями из отрицательных чисел, можно получить в результате действительное число. Вот один из его примеров.

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40.$$

Действительно, применяя современные обозначения, будем иметь по правилу умножения

$$(5+\sqrt{15}i)(5-\sqrt{15}i)=5^2+15=40$$

(сомножители — сопряженные числа).

Но потребность в умении оперировать с квадратными корнями из отрицательных чисел с особенной силой выявилась, когда тот же Кардано опубликовал (1545 г.) формулу (носящую с тех пор его имя) решения кубического уравнения вида

$$x^3+px+q=0. \tag{1}$$

Приведем эту формулу

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{2}$$

Применим ее к решению уравнения

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{3}$$

Получим:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}},$$

или

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}. \tag{4}$$

Получили „невозможное“ решение. Между тем уравнение (3) имеет три действительных корня:

$$x_1 = 4; \quad x_2 = -2 + \sqrt{3}; \quad x_3 = -2 - \sqrt{3},$$

в чем легко убедиться подстановкой этих корней в данное уравнение.

Более того, Кардан показал, что всегда, когда под знаком квадратного корня в формуле (2) оказывается отрицательное число, уравнение (1) имеет все три корня действительные.

Таким образом, пришлось распространить формальные правила действий и на квадратные корни из отрицательных чисел числа вида $\sqrt{-a}$, где $a > 0$.

Так, итальянский математик XVI в. Бомбелли предлагает доказать равенство

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4. \tag{5}$$

Это то же самое выражение (4), то есть корень уравнения (3).

Пользуясь современным обозначением, это равенство можно доказать так:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} = \sqrt[3]{(2 + i)^3} = 2 + i;$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{(2 - i)^3} = 2 - i.$$

Сложив найденные результаты, получим 4.

(Равенства $2 \pm 11i = (2 \pm i)^3$ можно проверить возведением в куб правой части или преобразованием левой части: $2 + 11i = 8 + 12i - 6 - i = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = (2 + i)^3$, аналогично преобразовывается $2 - 11i$.)

Вычисление выражения (4) дало только один корень 4. Но дело в том, что каждый из кубичных корней, входящих в формулу, имеет три значения (§ 125). Комбинируя их надлежащим образом, получим два остальных корня: $-2 \pm \sqrt{3}$.

Но все же к новым числам долгое время даже математики относились с большим недоверием, называя их „невозможными“, „воображаемыми“, „мнимыми“ (imaginaires — первая буква этого слова и взята для обозначения мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$). Последнее название так и укрепилось за ними в науке, хотя, как увидим ниже, теперь комплексные числа настолько прочно вошли в науку и технику, что их реальность ясна не менее, чем реальность натуральных чисел.

Геометрическое представление комплексных чисел (§ 122) и связанное с ним представление этих чисел с помощью тригонометрических функций значительно способствовали более прочному внедрению их в математику и ее приложения.

Термин „комплексные (то есть сложные, составные) числа“ был введен немецким математиком Гауссом (1777—1855).

Огромный вклад в теорию комплексных чисел сделал знаменитый Эйлер (1707—1783).

В XIX в. с развитием науки и техники непрерывно расширялась область применения комплексных чисел. Комплексные числа занимают существенное место в аэромеханике, гидромеханике, электротехнике, атомной физике и в других науках. Среди математических наук одно из важнейших мест занимает „теория функций комплексного переменного“, изучающая функции, аргументом которых является комплексное число.

ГЛАВА XIII.

НЕРАВЕНСТВА. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ.

§ 128. Сравнение чисел. Понятие о неравенстве.

1. Сравнение чисел. Для любых двух действительных чисел a и b справедливо одно и только одно из трех следующих соотношений: $a > b$; $a = b$; $a < b$.

В § 16 было дано правило сравнения действительных чисел, основанное на представлении этих чисел в виде десятичной дроби.

Здесь мы дадим более удобное правило, которым и будем пользоваться в дальнейшем. Это правило основывается на знаке разности $a - b$.

1) Если $a - b > 0$, то $a > b$.

Действительно, если $a - b > 0$, то значит разность $a - b$ равна некоторому положительному числу $m > 0$.

$$a - b = m.$$

Отсюда
$$a = b + m.$$

Это равенство и показывает, что $a > b$.

2) Если $a - b = 0$, то $a = b$.

В справедливости этого правила легко убедиться, прибавив к обеим частям равенства $a - b = 0$ число b. Получим $a = b$.

3) Если $a - b < 0$, то $a < b$.

Действительно, из условия $a - b < 0$ следует, что разность $a - b$ равна некоторому отрицательному числу.

$$a - b = -m \quad (m > 0).$$

Прибавив к обеим частям по b и по m, получим:

$$a + m = b.$$

Это равенство и показывает, что $a < b$.

Справедливы и обратные положения.

1) Если $a > b$, то $a - b > 0$.

2) Если $a = b$, то $a - b = 0$.

3) Если $a < b$, то $a - b < 0$.

Эти три положения легко доказываются от противного, что предоставляем учащимся.

2. Неравенства.

Определение. **Два алгебраических выражения, соединенные знаком „больше“ или „меньше“, образуют неравенство.**

Примеры.

$$5 > -2; \quad 4 + a < 6 + a; \quad x - 5 > 3; \quad a + b > a.$$

Из приведенных примеров первые два безусловно верны; первое из них просто числовое неравенство, второе верно при любом значении a. Такие неравенства называются тождественными, или безусловными.

Третье и четвертое неравенства верны не при любых значениях букв. Легко проверить, что третье неравенство верно лишь при $x > 8$, а четвертое только при положительных значениях b ($b > 0$). Такие неравенства называются условными, или неравенствами, содержащими неизвестное.

Если два неравенства оба имеют знак $>$ или оба знак $<$, то они называются неравенствами одинакового смысла. Если же одно имеет знак $>$, а другое $<$, то они называются неравенствами противоположного смысла.

Иногда неравенство при некоторых значениях входящих в него букв становится равенством. Например, известно, что сумма двух взаимно-обратных положительных чисел больше двух, что можно записать так:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2. \tag{1}$$

Но если $a = b$, то каждое слагаемое становится равным 1 и тогда

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2.$$

В таких случаях ставится двойной знак $\geqslant$ или $\leqslant$, являющийся соединением знаков неравенства и равенства. Значит, неравенство (1) правильнее записать так:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Знак $\geqslant$ читается „больше, или равно“, или „не меньше“. Знак $\leqslant$ — „меньше, или равно“, или „не больше“

§ 129. Основные свойства неравенств.

Докажем некоторые свойства неравенств. Они были показаны на примерах в первой части курса (§ 69).

Теорема 1. ***Если $a > b$ и m — любое действительное число, то $a + m > b + m$.***

Доказательство. Возьмем разность $(a+m)-(b+m)=$ $=a+m-b-m=a-b$. Так как по условию $a-b>0$ (§ 128), то имеем:

$$(a+m)-(b+m)>0.$$

Отсюда следует (§ 128):

$$a+m>b+m.$$

Так как вычесть число m все равно, что прибавить $-m$, то словами это свойство можно выразить так.

Если к обеим частям неравенства прибавить или из них вычесть одно и то же число, то получится неравенство того же смысла, что и данное.

Теорема 2. ***Если $a>b$ и $m>0$, то $am>bm$.***

Доказательство. Возьмем разность

$$am-bm=(a-b)m.$$

По условию $a-b>0$, $m>0$.
Произведение положительных чисел положительно. Значит,

$$am-bm>0.$$

Отсюда

$$am>bm.$$

Так как разделить на m все равно, что умножить на $\frac{1}{m}$, то словами это свойство можно выразить так.

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится неравенство того же смысла, что и данное.

Теорема 3. ***Если $a>b$ и $m<0$, то $am<bm$.***

Доказательство. Возьмем разность

$$am-bm=(a-b)m.$$

По условию $a-b$ — число положительное, а m — отрицательное. Произведение их отрицательно. Значит:

$$am-bm<0.$$

Отсюда

$$am<bm.$$

Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то получится неравенство противоположного смысла.

Теорема 4. ***Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.***

Доказательство. По условию

$$a - b > 0 \quad \text{и} \quad b - c > 0,$$

то есть обе эти разности положительны.

Но сумма положительных чисел всегда положительна. Значит,

$$(a - b) + (b - c) > 0.$$

По раскрытии скобок и приведении подобных членов получим:

$$a - c > 0.$$

Отсюда

$$a > c.$$

Это свойство неравенств называется транзитивностью.

Предлагается учащимся доказать это свойство, записанное в таком виде: если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

§ 130. Действия над неравенствами.

1. Сложение.

Теорема 1. ***Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.***

Доказательство.

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Но по условию $a - b > 0$ и $c - d > 0$ (так как $a > b$ и $c > d$). Следовательно:

$$(a + c) - (b + d) > 0.$$

Отсюда

$$a + c > b + d.$$

Словами это свойство можно выразить так.

Если сложить два неравенства одинакового смысла, то получится неравенство того же смысла.

2. Вычитание.

Теорема 2. ***Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.***

Доказательство.

$$(a - c) - (b - d) = a - c - b + d = (a - b) + (d - c).$$

Но по условию $a - b > 0$ и $d - c > 0$. Следовательно,

$$(a - c) - (b - d) > 0.$$

Отсюда

$$a - c > b - d.$$

Предлагается учащимся таким же способом доказать, что если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$.

Если из неравенства вычесть неравенство противоположного смысла, то получится неравенство того же смысла, что и уменьшаемое.

3. Умножение.

Теорема 3. ***Если $a > b$ и $c > d$, где a, b, c и d — положительные числа, то $ac > bd$.***

Доказательство.

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + (c - d)b.$$

Но числа $a - b$, c, $(c - d)$, b — положительные. Значит: $(a - b)c + (c - d)b > 0$.

Следовательно,

$$ac - bd > 0.$$

Отсюда

$$ac > bd.$$

Если перемножить два неравенства одинакового смысла, в которых обе части положительны, то получится неравенство того же смысла.

4. Деление.

Теорема 4. ***Если $a > b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$***

Доказательство.

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{cd}.$$

Так как $a > b$ и $d > c$, то по теореме 3 $ad > bc$, то есть $ad - bc > 0$. А так как $cd > 0$, то дробь $\frac{ad - bc}{cd} > 0$ и значит

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{d} > 0.$$

Отсюда

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

Предлагается учащимся таким же способом доказать, что если $a < b$ и $c > d$ (a, b, c и d положительны), то $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Если неравенство разделить на неравенство противоположного смысла, то получится неравенство того же смысла, что и делимое (предполагается, что обе части в обоих данных неравенствах положительны).

§ 131. Доказательство неравенств.

Пусть дано некоторое неравенство и указано множество допустимых значений для входящих в него букв. Требуется доказать справедливость этого неравенства при всех допустимых значениях его букв. Такие задачи называются задачами на доказательство неравенств.

Способы доказательства неравенств могут быть самыми разнообразными в зависимости от вида и особенностей доказываемых неравенств. Но для сравнительно простых неравенств некоторые приемы применяются довольно часто. Приведем несколько примеров.

Докажем следующее положение:

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительным первым членом не меньше ее учетверенного второго члена.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$a;\ aq;\ aq^2;\ aq^3;\ \ldots$$

равна $\frac{a}{1-q}$ (§ 87). Второй член ее равен aq.

Значит, требуется доказать справедливость неравенства

$$\frac{a}{1-q} \geqslant 4aq. \tag{1}$$

Доказательство будем основывать на свойствах неравенств (§ 129).

Так как a по условию положительно, то на него можно разделить обе части неравенства (1). Получим:

$$\frac{1}{1-q} \geqslant 4q. \tag{2}$$

Так как в убывающей прогрессии $|q| < 1$, то $1-q > 0$.

Следовательно, умножив обе части неравенства (2) на $1-q$, получим:

$$1 \geqslant 4q - 4q^2. \tag{3}$$

Перенесем все члены в левую часть.

$$1 - 4q + 4q^2 \geqslant 0, \tag{4}$$

или

$$(1-2q)^2 \geqslant 0. \tag{5}$$

Если $1 \neq 2q$, то в левой части имеем положительное число и, следовательно,

$$(1-2q)^2 > 0$$

Если же $1 = 2q$, то в левой части имеем нуль и тогда

$$(1-2q)^2 = 0.$$

Из справедливости неравенства (5) следует справедливость (4), которое является тем же неравенством (5), только записанным в другом виде. Перенеся в верном неравенстве (4) два последних слагаемых в правую часть, получим верное неравенство (3).

Разделив обе части этого неравенства на положительное число $1-q$, получим верное неравенство (2) и, наконец, умножив обе части последнего неравенства на положительное число a, получим верное неравенство (1), которое и требовалось доказать.

Замечание. Придя от неравенства (1), которое нужно доказать, к очевидному неравенству (5), мы показали, что из (1) вытекает (5); но это еще не значит, что и обратно — из (5) вытекает (1).

Так из равенства $a=b$ вытекает равенство $a^2=b^2$; но обратное заключение было бы неправильным: если $a^2=b^2$, то a может быть не равно b (например, $5^2=(-5)^2$, но $5 \neq -5$). Вот почему в доказательстве, придя к очевидному неравенству (5), мы, переходя от него к (4), (3) и т. д., показали, что из (5) вытекает (1).

Доказательство было бы гораздо короче, если бы мы прямо взяли верное неравенство (5) и от него пришли к (1). Но дело в том, что далеко не всегда легко определить — какое именно верное неравенство надо взять, чтобы от него прийти к тому, которое доказывается.

2. Докажем неравенство, которое приводилось в § 128.

Сумма двух положительных взаимно-обратных чисел не меньше двух.

Если одно из данных чисел обозначить через $\frac{a}{b}$, то обратным ему будет число $\frac{b}{a}$.

Значит, требуется доказать:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2 \quad (a>0;\ b>0). \tag{6}$$

Применим тот же способ доказательства, что и в предыдущей задаче, то есть приведем левую часть к квадрату разности.

Умножив обе части на положительное число ab, получим:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab. \tag{7}$$

Перенеся $2ab$ в левую часть, получим:

$$a^2+b^2-2ab \geqslant 0, \tag{8}$$

или

$$(a-b)^2 \geqslant 0. \tag{9}$$

Но это неравенство справедливо.

При $a \neq b$ имеем $(a-b)^2>0$; при $a=b$ $(a-b)^2=0$.

Переходя от верного неравенства (9) к (8) и т. д., докажем справедливость неравенства (6), причем при $a \neq b$ имеем знак неравенства, при $a=b$ — знак равенства.

3. Известно следующее положение:

Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Если данные числа a и b ($a > 0$, $b > 0$), то их среднее арифметическое равно $\frac{a+b}{2}$, а среднее геометрическое $\sqrt{ab}$.

Значит, требуется доказать, что $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. (10)

Предлагается учащимся доказать это неравенство двумя способами:

1) Таким же способом, как доказывались неравенства (1) и (6), то есть приведя левую часть к квадрату разности.

2) Приведя неравенство (10) к неравенству вида (6), уже доказанному.

Часто для доказательства неравенств применяется способ математической индукции. Пример такого доказательства дан в § 19.

§. 132. Неравенства с одним неизвестным. Равносильность неравенств.

Неравенствами с одним неизвестным называются неравенства вида:

$$f(x) > \varphi(x);$$
$$f(x) < \varphi(x),$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторые данные функции от аргумента x. (В частности одна из этих функций может быть многочленом нулевой степени относительно x, то есть постоянным числом.)

Решить неравенство — значит найти все значения неизвестного x, которые удовлетворяют неравенству (то есть при которых неравенство является верным).

Два неравенства называются равносильными, если все решения каждого из них являются решениями и другого.

Так, например, неравенства

$$x - 1 > 3 \text{ и } 5 < x + 1$$

равносильны, так как решениями обоих являются значения x, большие четырех, и только эти значения.

Теорема 1. ***Если одно неравенство равносильно второму, а это второе неравенство равносильно третьему, то и первое неравенство равносильно третьему.***

Действительно, все решения первого неравенства являются решениями и второго, а все решения второго являются решениями и третьего. Значит, все решения первого неравенства являются решениями и третьего.

Таким же способом докажем, что все решения третьего неравенства являются решениями и первого.

Неравенства, содержащие неизвестное, решаются так же, как и уравнения: от данного неравенства переходят к другому более простому, от него к третьему и т. д., пока не придут к простейшему неравенству вида $x > a$ или $x < a$, которое и дает решения данного неравенства.

При этом важно, чтобы каждое новое неравенство было равносильно предыдущему.

Нижеследующие теоремы и устанавливают преобразования, которые мы можем выполнять над неравенствами, не нарушая их равносильность.

Теорема 2. ***Если к обеим частям неравенства прибавим один и тот же многочлен относительно неизвестного, то получим неравенство, равносильное данному.***

Доказательство. Пусть дано неравенство

$$f(x) > \varphi(x). \qquad (1)$$

Прибавим к обеим частям многочлен от x, который коротко обозначим через $m(x)$ (в частности $m(x)$ может быть и постоянным числом). Получим неравенство

$$f(x) + m(x) > \varphi(x) + m(x). \qquad (2)$$

Докажем, что неравенства (1) и (2) равносильны. Доказательство разобьем на две части.

1) Докажем, что каждое решение неравенства (1) является решением и неравенства (2).

Пусть $x = a$ является одним из решений неравенства (1). Это значит, что подстановка $x = a$ в это неравенство даст верное числовое неравенство

$$f(a) > \varphi(a). \qquad (3)$$

Многочлен $m(x)$ после подстановки в него вместо x числа a будет равен некоторому определенному числу $m(a)$. Прибавим к обеим частям числового неравенства (3) число $m(a)$. Согласно теореме 1 § 129, получим верное неравенство

$$f(a) + m(a) > \varphi(a) + m(a).$$

Но, подставив a вместо x в неравенство (2), получим как раз неравенство (2).

Значит, $x = a$ является решением и неравенства (2).

Так как было взято произвольное решение неравенства (1), то из предыдущих рассуждений следует, что всякое решение неравенства (1) является решением и неравенства (2).

2) Докажем, что и обратно — каждое решение неравенства (2) является решением и неравенства (1).

Пусть $x = b$ является одним из решений неравенства (2). Это значит, что подстановка $x = b$ в это неравенство даст верное числовое неравенство

$$f(b) + m(b) > \varphi(b) + m(b). \tag{4}$$

Отняв от обеих частей этого неравенства число $m(b)$, получим (§ 129, теорема 1) верное неравенство

$$f(b) > \varphi(b). \tag{5}$$

Но, подставив b вместо x в неравенство (1), мы получим как раз неравенство (5).

Значит, $x = b$ является решением и неравенства (1).

Отсюда следует, что всякое решение неравенства (2) является решением и неравенства (1).

Итак, мы доказали, что все решения каждого из неравенств (1) и (2) являются решениями и другого. Согласно определению, отсюда следует, что неравенства (1) и (2) равносильны. Теорема доказана.

Примечание. Все приведенные рассуждения останутся совершенно теми же, если бы вместо неравенства $f(x) > \varphi(x)$ было взято неравенство $f(x) < \varphi(x)$. Поэтому мы можем считать, что теорема доказана для обоих неравенств.

Следствие. ***Каждый член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, переменив его знак на противоположный.***

Пример.

$$7x - 8 > 22 - 3x.$$

Прибавив к обеим частям по $3x$, получим согласно доказанной теореме равносильное неравенство

$$7x - 8 + 3x > 22.$$

Член $3x$ перешел в другую часть с противоположным знаком.

Теорема 3. ***Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному.***

Доказательство. Пусть дано неравенство

$$f(x) > \varphi(x). \tag{6}$$

Умножив обе части его на положительное число m, получим неравенство

$$mf(x) > m\varphi(x). \tag{7}$$

Докажем, что неравенства (6) и (7) равносильны.

1) Пусть $x = a$ — одно из решений неравенства (6).

Тогда имеем:

$$f(a) > \varphi(a).$$

Умножив обе части этого неравенства на положительное число m, получим (§ 129, теорема 2) верное неравенство

$$mf(a) > m\varphi(a). \qquad (8)$$

Но, подставив a вместо x в неравенство (7), получим как раз неравенство (8).

Значит, $x = a$ является решением и неравенства (7).

Ввиду произвольности выбора одного из решений неравенства (6) доказано, что каждое решение неравенства (6) является решением и неравенства (7).

2) Пусть $x = b$ — одно из решений неравенства (7). Тогда имеем

$$mf(b) > m\varphi(b),$$

Разделив обе части этого неравенства на положительное число m, получим верное неравенство

$$f(b) > \varphi(b). \qquad (9)$$

Но, подставив b вместо x в неравенство (6), получим как раз неравенство (9).

Значит, $x = b$ является решением и неравенства (6).

Отсюда следует, что каждое решение неравенства (7) является решением и неравенства (6).

Итак, мы доказали, что все решения каждого из неравенств (6) и (7) являются решениями и другого. Отсюда следует, что неравенства (6) и (7) равносильны.

Теорема 4. ***Если обе части неравенства умножим на одно и то же отрицательное число и переменим знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.***

Требуется доказать, что неравенство

$$f(x) > \varphi(x)$$

и

$$mf(x) < m\varphi(x) \qquad (m < 0)$$

равносильны.

Предлагаем учащимся доказать эту теорему по образцу доказательства предыдущей. (Примечание к теореме 2 относится также и к теоремам 3 и 4.)

На этих трех теоремах мы и будем в дальнейшем основываться при решении неравенств.

§ 133. Неравенства первой степени

Неравенством первой степени с одним неизвестным называется неравенство вида

$$ax+b>0 \ (1) \text{ или } ax+b<0, \ (2)$$

где x — неизвестное, а a и b — постоянные числа ($a \neq 0$).

Так как умножением всех членов неравенства (2) на -1 оно приводится к виду (1), то в дальнейшем мы рассмотрим решение только неравенств вида (1).

Перенеся в нем свободный член b в правую часть, получим равносильное неравенство

$$ax > -b. \qquad (3)$$

Далее могут представиться следующие случаи:

1) $a>0$. Тогда, разделив обе части неравенства (3) на положительное число a, получим равносильное неравенство

$$x > -\frac{b}{a}. \qquad (4)$$

Неравенству (4), а следовательно, и (1), удовлетворяют все значения x, большие $-\frac{b}{a}$.

Геометрически это значит, что неравенству (1) удовлетворяют на числовой оси абсциссы всех точек, лежащих правее точки $A\left(-\frac{b}{a}\right)$.

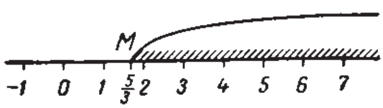
Пример.

$$3x-5>0.$$

Решение.

$$3x>5; \quad x>\frac{5}{3}.$$

Данному неравенству удовлетворяют абсциссы всех точек, лежащих правее точки $M\left(\frac{5}{3}\right)$ (черт. 85).



Черт. 85.

Черт. 86.

2) $a<0$. Тогда, разделив обе части неравенства (3) на отрицательное число a, получим равносильное неравенство

$$x < -\frac{b}{a}. \qquad (5)$$

Неравенству (5), а следовательно, и неравенству (1) удовлетворяют все значения x, меньшие $-\frac{b}{a}$.

Геометрически это значит, что неравенству (1) удовлетворяют абсциссы всех точек, лежащих левее точки $A\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Пример.

$$-3x+12>0;$$

$$-3x>-12; \quad x<4 \text{ (черт. 86).}$$

§ 134. Системы неравенств первой степени с одним неизвестным.

Если два или несколько неравенств рассматриваются совместно, то есть ищутся значения неизвестного, удовлетворяющие всем этим неравенствам, то говорят, что эти неравенства составляют систему.

Решить систему неравенств — это значит найти все значения неизвестного, которые удовлетворяют всем данным неравенствам.

Пример 1. Дана система

$$\begin{cases} 5x-17>2x+4, \\ 7-x<3x-5. \end{cases} \qquad (1)$$

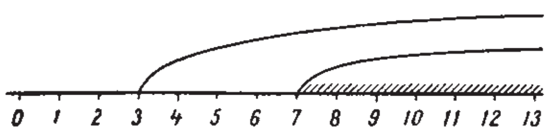
Решив первое из этих неравенств, найдем:

$$x>7.$$

Решив второе неравенство, найдем:

$$x>3.$$

Значит, системе удовлетворяют те значения x, которые одновременно больше трех и больше семи. Очевидно, что такими являются



Черт. 87.

все числа, бо́льшие семи, и только они. Значит, решения системы определяются неравенством $x>7$ (черт. 87).

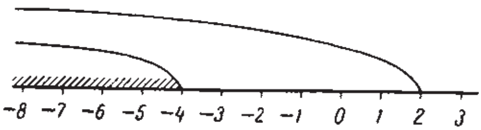
Пример 2.

$$\begin{cases} -3x+6>0, \\ -2x-8>0. \end{cases}$$

Решив оба неравенства, найдем:

$$x<2; \quad x<-4.$$

Решением системы будет $x<-4$ (черт. 88).



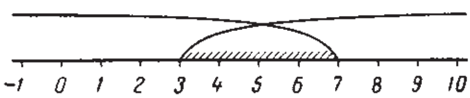
Черт. 88.

Пример 3.

$$\begin{cases} 5x-15>0, \\ -3x+21>0. \end{cases}$$

Отсюда

$$x>3; \; x<7.$$



Черт. 89.

Решением системы будут значения x, заключенные между 3 и 7 (черт. 89).

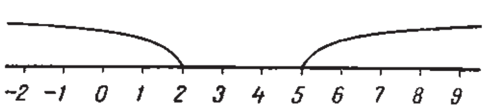
Пример 4.

$$\begin{cases} 3x-15>0, \\ -2x+\ 4>0. \end{cases}$$

Отсюда

$$x>5; \quad x<2.$$

Система решений не имеет: не существует числа, которое одновременно было бы меньше 2, но больше 5 (черт. 90).



Черт. 90.

Пример 5.

$$\begin{cases} 6x - 12 > 0, \\ -5x + 10 > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$x > 2; \ x < 2.$$

Система решений не имеет.

§ 135. Об исследовании уравнений.

Задача 1. *Решить уравнение*

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = 0. \quad (1)$$

Решение. Установим сначала, какие числовые значения для неизвестного являются допустимыми.

Мы видим, что при $x = 2$ и при $x = -2$ уравнение теряет смысл.

Значит, допустимыми для x являются любые значения, кроме $x = \pm 2$.

Предполагая, что $x \neq \pm 2$, умножаем все члены уравнения на $x^2 - 4$. После сокращения получим:

$$(x-2) + (x+2) - 4 = 0. \quad (2)$$

Отсюда $x = 2$.

Но значение $x = 2$ не является допустимым для уравнения (1). Отсюда заключаем, что уравнение (1) решений не имеет.

Уравнение (2) оказалось неравносильным данному. Нетрудно усмотреть причину этого. Для уравнения (2) являются допустимыми любые значения неизвестного.

Значит, множество допустимых значений неизвестного в уравнении (2) шире, чем в (1). Найденный корень $x = 2$ как раз принадлежит расширенному множеству, но не принадлежит множеству допустимых значений x для уравнения (1).

Задача 2. *Решить уравнение*

$$x - \frac{2(mx-3)}{m^2} = \frac{5}{m} - \frac{4}{m^2}. \quad (3)$$

Решение. Так как уравнение имеет буквенный коэффициент, или, как говорят, параметр, то надо установить допустимые значения не только для неизвестного, но и для параметра. Легко видеть, что:

1) для x допустимыми являются любые значения,

2) для m — любые значения, кроме $m = 0$.

Предполагая, что $m \neq 0$, умножаем все члены на m^2 и приводим уравнение к нормальному виду.

$$m^2x - 2(mx-3) = 5m - 4;$$

$$m(m-2)x = 5(m-2). \quad (4)$$

Исследуем теперь, при каких значениях параметра m уравнение не будет иметь решений, при каких будет и сколько.

Значение $m=0$ нами уже исключено.

При $m=2$ уравнение (4) примет вид:

$$0\cdot x=0.$$

Но это уравнение является тождеством; ему удовлетворяют любые значения x.

При $m\neq 0$ и $m\neq 2$ можно обе части уравнения (4) разделить на не равное нулю число $m-2$. Получим

$$mx=5;\quad x=\frac{5}{m}.$$

Значит, при любом значении m, не равном нулю и двум, уравнение имеет единственное решение.

Иногда при задании уравнения могут быть поставлены различные условия, например: решение должно быть положительным, целым, меньше некоторого числа и т. п. Тогда нужно провести дополнительное исследование — при каких значениях параметра неизвестное удовлетворяет этим условиям.

Например, для уравнения (4) положительные решения будут при $m>0$; целые при $m=\pm 1$ и $m=\pm 5$.

Задача 3. *Бригада косцов должна была скосить a гектаров луга. Но два косца были переведены на другую работу, и поэтому каждому косцу пришлось скосить на $\frac{1}{2}$ га больше предположенного. Сколько косцов было в бригаде первоначально?*

Решение. Для неизвестного допустимыми являются только целые положительные значения, бóльшие двух. Для параметра a — положительные значения, бóльшие $\frac{1}{2}$.

Обозначив первоначальное число косцов через x, получим уравнение

$$\frac{a}{x-2}-\frac{a}{x}=\frac{1}{2}.$$

Здесь $x-2\neq 0$ и $x\neq 0$. Приведя уравнение к нормальному виду, получим:

$$x^2-2x-4a=0.$$

Отсюда

$$x=1\pm\sqrt{1+4a};$$

$$x_1=1+\sqrt{1+4a};\quad x_2=1-\sqrt{1+4a}.$$

Второй корень отбрасываем, как отрицательный. (При $a>0$ подкоренное выражение, а следовательно, и корень из него, больше 1.)

Так как x должен быть натуральным числом, то $\sqrt{1+4a}$, а следовательно, и $1+4a$ должно быть натуральным числом.

Отсюда новое ограничение для допустимых значений параметра a: выражение $4a$ должно быть натуральным числом.

Кроме того, чтобы x было целым, необходимо, чтобы подкоренное выражение было точным квадратом, то есть

$$1+4a=k^2,$$

где k — натуральное число.

Отсюда

$$a=\frac{k^2-1}{4}.$$

Давая k значения 2, 3, ..., будем получать для каждого значения параметра единственное решение, что можно представить в виде таблицы:

k	2	3	4	5	6	...
a	$\frac{3}{4}$	2	$3\frac{3}{4}$	6	$8\frac{3}{4}$	
x	3	4	5	6	7	

В приведенных примерах мы показали решение уравнений и задач с исследованием. Из этих примеров видно, что исследование решения уравнения или задачи заключается в основном в следующем:

1. Установить допустимые значения для неизвестного.
2. Установить допустимые значения для параметров (если они есть).
3. Найти решения уравнения (или установить, что их нет) при всех допустимых значениях параметров.
4. Установить, какие из этих решений удовлетворяют всем условиям задачи.

§ 136. Исследование уравнений первой степени с одним неизвестным.

Если дано уравнение, то по его виду устанавливаются допустимые значения неизвестного и параметров (если они есть) и затем уравнение приводится к нормальному виду.

Нормальный вид уравнения первой степени с одним неизвестным

$$ax=b, \tag{1}$$

где a и b или числовые коэффициенты, или выражения, содержащие буквы (параметры).

Дальше решение идет в таком порядке:

1. Устанавливаются значения параметров, при которых коэффициент при x обращается в нуль.

Тогда уравнение примет вид:

$$0 \cdot x = b. \tag{2}$$

2. Вычисляются соответствующие значения b.

Здесь могут быть два случая:

а) При значениях параметров, обращающих a в нуль, обращается в нуль и b. Тогда уравнение примет вид:

$$0 \cdot x = 0. \tag{3}$$

Оно удовлетворяется любыми (допустимыми) значениями x.

б) При значениях параметров, обращающих a в нуль, b не равно нулю. Тогда уравнение примет вид:

$$0 \cdot x = k \qquad (k \neq 0). \tag{4}$$

Ясно, что при любом x левая часть уравнения (4) равна нулю и поэтому не может быть равна k. Уравнение не имеет решений.

3. При всех остальных значениях параметров $a \neq 0$. Делят обе части уравнения на a и получают

$$x = \frac{b}{a}$$

— единственное решение для каждой системы значений параметров.

Итак, уравнение $ax = b$:

имеет единственное решение, когда $a \neq 0$;

не имеет решения, когда $a = 0$, а $b \neq 0$;

удовлетворяется любым значением x, когда $a = 0$ и $b = 0$.

Посмотрим, какой геометрический смысл имеют все эти три случая.

Уравнение (1) можно переписать так:

$$ax - b = 0. \tag{5}$$

Обозначив левую часть через y, получим линейную функцию

$$y = ax - b. \tag{6}$$

Графически эта функция представляет прямую, образующую с осью абсцисс угол α, тангенс которого равен a.

$$\operatorname{tg} \alpha = a.$$

Если какое-либо значение $x = m$ является корнем уравнения (5), то из (6) видно, что при этом значении абсциссы x ордината $y = 0$.

Значит, точка $(m; 0)$ лежит на прямой $y = ax - b$. Другими словами, в этой точке прямая $y = ax - b$ пересекает ось абсцисс.

1) Пусть $a \neq 0$. Тогда прямая $y = ax - b$ пройдет через точку $(0; -b)$ оси ординат и образует с осью абсцисс угол, тангенс которого равен a. Значит, прямая пересечет ось абсцисс.

Уравнение (5) имеет единственное решение:

$$x = \frac{b}{a}.$$

2) Пусть $a = 0$, а $b \neq 0$. Уравнение (6) прямой примет вид: $y = -b$.

Прямая пройдет через точку $(0; -b)$ и будет параллельна оси абсцисс (так как $\operatorname{tg} \alpha = a = 0$, то $\alpha = 0°$). Значит, прямая $y = ax - b$ и ось абсцисс не имеют общей точки: уравнение не имеет решений.

3) Пусть $a = 0$ и $b = 0$. Уравнение (6) примет вид: $y = 0$.

Но это уравнение оси абсцисс. Значит, прямая (6) и ось абсцисс совпадут; уравнению удовлетворяет любое значение x.

Пример решения уравнения с исследованием был дан в предыдущем параграфе. Приведем еще один пример.

Задача 1. *Решить уравнение*

$$ax + \frac{2ax}{a+1} = 4 + \frac{8}{a+1}. \qquad (1)$$

Для x допустимыми являются любые значения. Для a — любые значения, кроме $a = -1$. Приведя уравнение к нормальному виду, получим:

$$a(a+3)x = 4(a+3). \qquad (2)$$

Коэффициент при x обращается в нуль при $a = 0$ и $a = -3$. Рассмотрим оба эти случая.

1) $a = 0$. Уравнение (2) примет вид: $0 \cdot x = 12$.

(Проверить подстановкой в уравнение (1) $a = 0$).

Значит, при $a = 0$ уравнение не имеет решений.

2) $a + 3 = 0$. Уравнение (2) примет вид: $0 \cdot x = 0$.

(Проверить подстановкой в уравнение (1) $a = -3$).

Уравнение является тождеством, то есть удовлетворяется любыми значениями x.

Решим теперь полученное уравнение при всех остальных значениях параметра a.

3) $a \neq 0$, $a + 3 \neq 0$. Разделив обе части уравнения (2) на $a(a+3)$, найдем

$$x = \frac{4}{a}.$$

Для всякого значения a (не равного 0 и -3) получим единственное решение. Поставим несколько дополнительных вопросов.

При каких значениях a решение положительно?

Ответ. При $a > 0$.

При каких значениях a решение будет целым?

Ответ. При $a = \pm 1$; ± 2; ± 4.

При каких значениях a решение будет натуральным числом?

Ответ. При $a = 1;\ 2;\ 4$.

Если к уравнению привело решение задачи, то на значения неизвестного и параметров могут быть наложены дополнительные ограничения.

Задача 2. *Куплено m книг стоимостью в 8 руб. и в 3 руб. Сколько куплено тех и других книг в отдельности, если за всю покупку уплачено 42 руб.?*

Решение. Обозначив число книг стоимостью в 8 руб. через x, получим уравнение

$$8x + 3(m - x) = 42.$$

По смыслу задачи для x допустимыми являются только натуральные значения, меньшие m. Для m допустимы любые натуральные значения, бо́льшие единицы. Решив уравнение, найдем:

$$x = \frac{42 - 3m}{5}.$$

Ограничим допустимые значения для m.

1) Так как $x > 0$ и целое, то должно быть $\frac{42 - 3m}{5} \geqslant 1$; откуда $42 - 3m \geqslant 5$ и $m \leqslant 12$.

2) Так как x должно быть меньше m, то имеем:

$$\frac{42 - 3m}{5} < m;\ 42 - 3m < 5m;\ 42 < 8m;\ m > 5.$$

3) Так как x — натуральное число, то $42 - 3m$ должно нацело делиться на 5, а так как $42 - 3m = 3(14 - m)$, то $14 - m$ должно делиться на 5. Значит, может быть только $m = 4$ и $m = 9$. Но первое значение отпадает, так как $m > 5$ (п. 2).

Итак, для параметра m оказалось допустимым единственное значение $m = 9$. Тогда имеем: $x = 3$; $m - x = 9 - 3 = 6$. Куплено 3 книги по 8 руб. и 6 книг по 3 руб.

§ 137. Исследование системы уравнений первой степени.

Системой уравнений первой степени называется совокупность уравнений вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{1}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — известные числа, а x и y — неизвестные, причем каждое из них обозначает одно и то же число в обоих уравнениях.

Предположим, что ни один из коэффициентов при неизвестных не равен нулю.

Умножив первое из уравнений на b_2, а второе на b_1 и вычтя второе из первого, получим:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x = c_1b_2 - c_2b_1. \qquad (2)$$

Умножив первое уравнение на a_2, второе на a_1 и вычтя первое из второго, получим:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,y = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (3)$$

Система уравнений (2) и (3) равносильна системе (1) (ч. 1, § 80). Но каждое из уравнений (2) и (3) — первой степени с одним неизвестным. Значит, их можно исследовать, как показано в § 136.

1) Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогда каждое из уравнений (2) и (3) имеет единственное решение:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \qquad (4)$$

Эти значения x и y и являются единственным решением системы (1). Предлагаем учащимся убедиться в этом, подставив найденные значения x и y в уравнения (1).

2) Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но хотя бы один из свободных членов уравнений (2) и (3), например $c_1b_2 - c_2b_1$, не равен нулю.

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$0 \cdot x = k \qquad (k \neq 0).$$

Мы знаем, что такое уравнение не имеет решений. Покажем, что такой же вид примет и уравнение (3), то есть в нем $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$. Допустим противное: пусть $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$.

Тогда

$$a_1c_2 = a_2c_1; \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}. \qquad (5)$$

Но из равенства $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ следует:

$$a_1b_2 = a_2b_1; \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) вытекает:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

а отсюда следует, что

$$c_1b_2 = c_2b_1; \quad c_1b_2 - c_2b_1 = 0,$$

что противоречит условию. Отсюда следует, что $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, а так как $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то и уравнение (3) не имеет решений. Отсюда следует, что не имеет решений и система (1).

3) Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и хотя бы один из свободных членов уравнений (2) и (3) например,

$$c_1b_2 - c_2b_1 = 0. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$0 \cdot x = 0.$$

В этом случае и уравнение (3) имеет такой же вид, то есть

$$a_1c_2 - a_2c_1 = 0. \tag{8}$$

Действительно, если бы было $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$, то, по доказанному в п. 2, тогда и $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, что противоречит условию.

Из равенств (7) и (8) следует:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Обозначив величину этих отношений через k, будем иметь:

$$a_1 = ka_2; \quad b_1 = kb_2; \quad c_1 = kc_2.$$

Подставив эти значения в первое из уравнений системы (1), получим:

$$ka_2x + kb_2y = kc_2$$

или, разделив на k:

$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Оказывается, что в этом случае одно из уравнений получается из другого путем умножения его на некоторое число k. Значит, фактически мы имеем здесь одно уравнение с двумя неизвестными, которое, как известно (ч. 1, § 73), имеет бесчисленное множество решений.

Дав, например, неизвестному x произвольное значение, подставим его в одно из уравнений (1) и найдем значение y. Получим одно решение системы (1).

Взяв другое значение x, получим второе решение системы (1) и т. д.

Посмотрим, какой геометрический смысл имеют три рассмотренных случая.

Мы уже знаем (ч. 1, § 81), что каждое решение системы (1) дает координаты точек пересечения прямых — графиков каждого из уравнений.

Представим уравнения системы (1) в таком виде:

$$y = -\frac{a_1x}{b_1} + \frac{c_1}{b_1}, \tag{9}$$

$$y = -\frac{a_2x}{b_2} + \frac{c_2}{b_2}.$$

Значит, первое уравнение геометрически изобразится прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный $\frac{c_1}{b_1}$, и имеющей угловой коэффициент $-\frac{a_1}{b_1}$ $\left(\text{то есть } \operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_1}{b_1}\right)$.

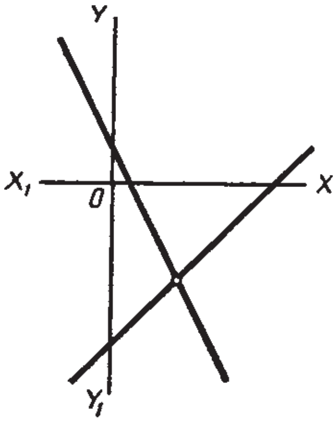
График второго уравнения — прямая, отсекающая на оси ординат отрезок $\frac{c_2}{b_2}$ и имеющая угловой коэффициент, равный $-\frac{a_2}{b_2}$ $\left(\text{то есть } \operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_2}{b_2}\right)$.

1) Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

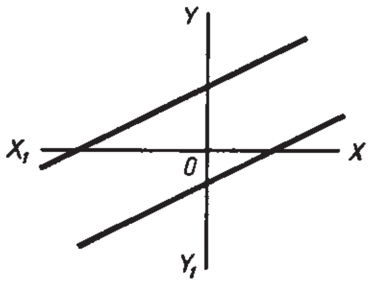
Отсюда

$$a_1b_2 \neq a_2b_1; \quad \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}; \quad -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}.$$

Значит, в этом случае угловые коэффициенты прямых — графиков уравнений (9) — различны (то есть они имеют различный наклон к оси абсцисс), и, следовательно, прямые непременно пересекутся (конечно, в одной точке) (черт. 91). Система (1) имеет единственное решение.



Черт. 91.



Черт. 92.

2) Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$.

Из первого условия имеем:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}; \quad -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}.$$

Значит, угловые коэффициенты обеих прямых (9) равны, то есть прямые одинаково наклонены к оси абсцисс.

Из второго условия имеем:

$$\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}.$$

Значит, прямые (9) проходят через различные точки оси ординат.

Из первого и второго условий следует, что прямые — графики уравнений системы (1) — параллельны между собой, то есть не имеют точки пересечения (черт. 92). Система (1) не имеет решений.

3) Пусть $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ и $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$.

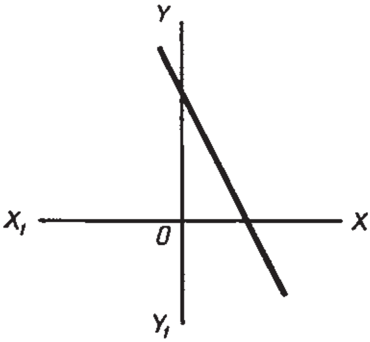
Из первого условия вытекает (см. п. 2), что угловые коэффициенты прямых — графиков уравнений (9) — равны.

Из второго условия следует, что

$$\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2},$$

то есть что обе прямые проходят через одну и ту же точку на оси ординат.

Из первого и второго условий следует, что графиком обоих уравнений является одна и та же прямая, и координаты любой ее точки являются решением системы (1) (черт. 93). Система (1) имеет бесчисленное множество решений.



Черт. 93.

Из рассмотрения всех трех случаев вытекает следующий графический прием решения системы двух уравнений с двумя неизвестными.

1. Строим прямые — графики каждого из данных уравнений — и определяем координаты точки их пересечения.

2. Если прямые пересекаются, то координаты точки пересечения являются единственным решением системы. Если прямые параллельны, то система не имеет решений. Если прямые совпадают, то система имеет бесчисленное множество решений — координаты любой точки графика.

Пример. Решить систему:

$$\begin{cases} ax+2y=4, \\ x+y=\dfrac{4}{a}. \end{cases}$$

Решение. Для параметра a допустимыми являются любые числа, кроме $a=0$. Для x и y допустимы любые числа.

Умножив второе уравнение на a, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} ax+2y=4, \\ ax+ay=4. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на a, второе на 2 и вычтя второе из первого, получим:

$$(a^2-2a)x=4a-8,$$

или

$$a(a-2)x=4(a-2).$$

Вычтя первое уравнение из второго, получим:

$$(a-2)y=0.$$

1) При $a=2$ последние два уравнения принимают вид: $0 \cdot x=0$ и $0 \cdot y=0$. Система имеет бесчисленное множество решений.

Подставив $a=2$ в заданные уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} 2x+2y=4, \\ x+y=2. \end{cases}$$

Первое уравнение получается из второго умножением на 2. Значит, фактически имеем здесь одно уравнение с двумя неизвестными.

2) При $a \neq 2$ после сокращения на $a-2$ получим:

$$x=\frac{4}{a}; \quad y=0.$$

Для каждого значения $a \neq 2$ имеем единственное решение. (Значение $a=0$ было исключено в самом начале решения.)

§ 138. Исследование квадратного трехчлена.

1. Задача. *С аэростата, находящегося на высоте* 1000 *м, сбросили вертикально вниз груз со скоростью* 20 *м в секунду. На каком расстоянии от земли этот груз будет через* 15 *сек.*? (Сопротивление воздуха в расчет не принимается.)

Решение. Путь, проходимый падающим телом, вычисляется по формуле

$$s=v_0t+\frac{gt^2}{2},$$

где v_0 — начальная скорость, а $g=9{,}8$ *м/сек*^{2} — ускорение силы тяжести. В данном случае $v_0=20$ *м/сек*, и формула примет вид:

$$s=20t+4{,}9t^2.$$

Такой путь пройдет падающий груз за t секунд. Значит, через t секунд он будет находиться на высоте

$$x=1000-20t-4{,}9t^2$$

метров от земли.

Чтобы определить x — высоту груза над землей через 15 сек., очевидно, достаточно в полученное равенство подставить $t=15$ и произвести вычисления. Получим:

$$x=1000-20 \cdot 15-4{,}9 \cdot 15^2=-402{,}5.$$

Отрицательное значение x здесь не имеет смысла, и, следовательно, наша задача не имеет решения. Почему так получилось? Чтобы ответить на этот вопрос, определим сначала, через сколько секунд сброшенный груз упадет на землю?

Очевидно, это произойдет в тот момент, когда груз пройдет путь, равный высоте, с которой он был сброшен, т. е. 1000 *м*.

Значит, мы должны иметь:

$$20t + 4{,}9t^2 = 1000,$$

или

$$4{,}9t^2 + 20t - 1000 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем $t \approx 12{,}4$ сек. с точностью до $\frac{1}{10}$. (Берем только положительный корень.) Значит, через 12,4 сек. груз уже упал на землю, а потому вопрос задачи не имеет смысла.

При каких же значениях t задача допускает вполне определенное решение? Очевидно, только для тех значений, при которых путь, пройденный грузом, меньше 1000 *м*, т. е. при условии, что

$$4{,}9t^2 + 20t < 1000,$$

или, что то же,

$$4{,}9t^2 + 20t - 1000 < 0.$$

Значит, задача имеет решение только при таких (положительных) значениях t, при которых трехчлен $4{,}9t^2 + 20t - 1000$ является отрицательным числом. Это будет при $t < 12{,}4$.

Во многих задачах, как и в приведенной выше, требуется определить для данного трехчлена, при каких значениях аргумента он является положительным и при каких отрицательным. В этом и заключается исследование квадратного трехчлена.

Пусть дан трехчлен:

$$y = ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b и c — любые числа ($a \neq 0$).

Рассмотрим три случая в зависимости от величины дискриминанта этого трехчлена.

1. $D = b^2 - 4ac > 0$.

Значит, трехчлен имеет действительные и различные корни. Обозначим эти корни через

$$x_1 \text{ и } x_2 \, (x_1 < x_2).$$

Тогда трехчлен может быть представлен в таком виде (§ 48):

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Исследуем, какие значения имеет этот трехчлен при различных значениях x.

1) Пусть $x < x_1$, а значит, $x < x_2$ (так как $x_1 < x_2$). Отсюда имеем:

$$x - x_1 < 0 \text{ и } x - x_2 < 0.$$

Следовательно, произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ будет числом положительным. Отсюда следует, что $a(x - x_1)(x - x_2)$ положительно, если a положительно, и отрицательно, если a отрицательно. Другими словами, при $x < x_1$ значение трехчлена $ax^2 + bx + c$ имеет тот же знак, что и коэффициент a.

2) Пусть $x > x_1$ и $x < x_2$.

Тогда $x - x_1 > 0$, а $x - x_2 < 0$.

Произведение $(x - x_1)(x - x_2)$, как произведение чисел с разными знаками, будет числом отрицательным. Отсюда следует, что произведение $a(x - x_1)(x - x_2)$ отрицательно при положительном a и положительно при отрицательном a.

Значит, в этом случае значения трехчлена имеют знак, противоположный знаку коэффициента a.

3) Пусть $x > x_2$; а значит, и $x > x_1$ (так как $x_2 > x_1$).

Тогда

$$x - x_2 > 0 \text{ и } x - x_1 > 0.$$

Произведение $(x - x_1)(x - x_2)$ будет положительным, а следовательно, произведение $a(x - x_1)(x - x_2)$ положительно при a положительном и отрицательно при a отрицательном. Значит, в этом случае числовое значение трехчлена имеет тот же знак, что и коэффициент a.

Объединяя все три случая, мы можем теперь сделать такой общий вывод:

Если дискриминант квадратного трехчлена положителен, то при значениях x, меньших меньшего из корней, и бóльших большего из корней, он имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2. При значениях x, заключенных между корнями трехчлена, он имеет знак, противоположный знаку коэффициента при x^2.

Примечание. Если условиться называть значения $x < x_1$ и $x > x_2$ значениями x вне промежутка между корнями, а значения $x_1 < x < x_2$ значениями x внутри промежутка между корнями, то этот вывод можно еще сформулировать так:

Если дискриминант квадратного трехчлена положителен, то при значениях x вне промежутка между корнями трехчлен имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2; при значениях x внутри промежутка между корнями трехчлена имеет знак, противоположный знаку коэффициента при x^2.

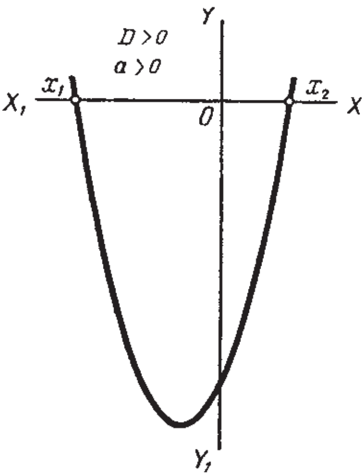
Посмотрим, какой геометрический смысл имеет этот вывод. Графиком квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

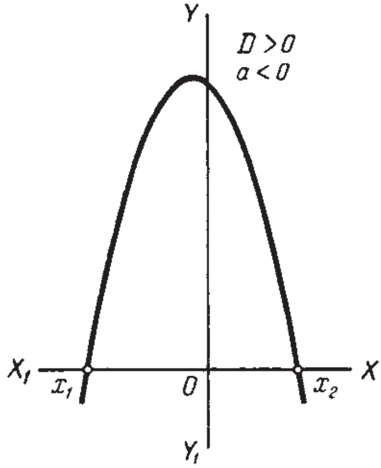
является парабола (§ 65). Если x_1 и x_2 являются корнями трехчлена, то при $x = x_1$ и при $x = x_2$ $y = 0$. В точках $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$ график пересекает ось абсцисс.

Пусть $a > 0$. При $x < x_1$ и при $x > x_2$ трехчлен (1) положителен. Значит, ординаты точек графика при этих значениях x положительны. График расположен выше оси абсцисс. Наоборот, при значениях x, заключенных в промежутке x_1 и x_2, знак трехчлена отрицателен, ординаты точек графика отрицательны; график расположен ниже оси абсцисс. В итоге график имеет такой вид (черт. 94).

2) Пусть $a < 0$. Аналогичными рассуждениями выводим, что график трехчлена (1) расположен ниже оси абсцисс при $x < x_1$ и $x > x_2$ и выше оси абсцисс при $x_1 < x < x_2$ (черт. 95).



Черт. 94.



Черт. 95.

2. $D = b^2 - 4ac = 0$.

В этом случае трехчлен имеет равные корни. Обозначив корень через x_1, представим трехчлен в таком виде:

$$y = a(x - x_1)(x - x_1),$$

или

$$y = a(x - x_1)^2.$$

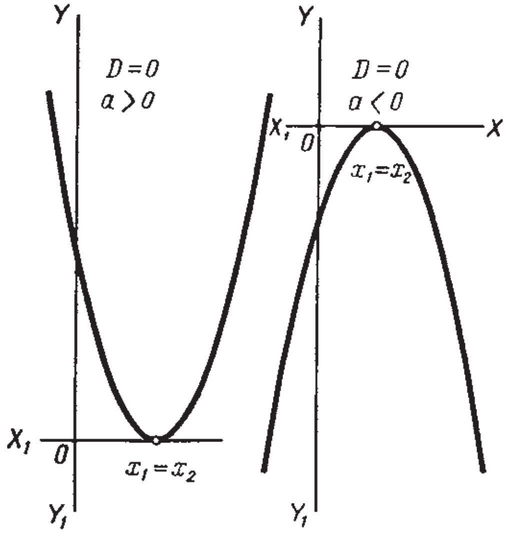
Отсюда заключаем: какова бы ни была разность $x - x_1$, если только она не равна нулю, квадрат этой разности является числом положительным. Значит, при положительном a произведение $a(x - x_1)^2$, а следовательно, и y будет числом положительным, а при отрицательном a — отрицательным. Таким образом, мы можем сделать вывод:

Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, то при всех значениях x, кроме значения, равного корню трехчлена, значения трехчлена имеют тот же знак, что коэффициент при x^2.

Графически это означает, что график трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ имеет с осью абсцисс одну общую точку, то есть касается ее и расположен выше оси абсцисс при $a > 0$ и ниже ее при $a < 0$ (черт. 96).

3. $D = b^2 - 4ac < 0$.

В этом случае трехчлен имеет мнимые корни.



Черт. 96.

Преобразуем трехчлен.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),$$

или

$$y = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right).$$

В выражении в скобках прибавим и вычтем по $\frac{b^2}{4a^2}$.

Получим:

$$y = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right),$$

или

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

При всех значениях x выражение $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ положительно или равно нулю $\left(\text{при } x = -\frac{b}{2a}\right)$. Посмотрим, какой знак имеет второе слагаемое $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$.

Так как $b^2 - 4ac < 0$, то противоположное ему число $4ac - b^2$ будет числом положительным.

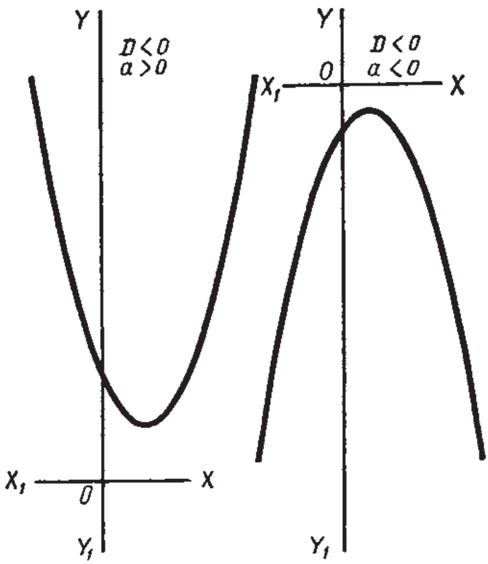
Знаменатель $4a^2$ — тоже число положительное. Следовательно, все выражение $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ является положительным числом. Итак, вся сумма, заключенная в квадратные скобки, является положительным числом при всех (действительных) значениях x.

Отсюда следует, что знак численной величины трехчлена зависит только от знака a; при a положительном трехчлен имеет положительные значения, при a отрицательном — отрицательные.

Итак, мы можем сделать вывод:

Если трехчлен имеет мнимые корни, то при всех значениях x его численная величина имеет тот же знак, что и коэффициент при x^2.

Графически этот вывод означает, что график трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ не имеет с осью абсцисс общих точек и расположен выше ее при $a > 0$ и ниже, при $a < 0$ (черт. 97).



Черт. 97.

Полученные результаты исследования трехчлена можно представить в виде следующей таблицы:

Дискриминант	Значения x	Знак $y = ax^2 + bx + c$	
		$a > 0$	$a < 0$
$b^2 - 4ac > 0$	$x_1 < x < x_2$	—	+
	$x < x_1$ $x > x_2$	+	—
$b^2 - 4ac = 0$	любое, кроме $x = x_1 = x_2$	+	—
$b^2 - 4ac < 0$	любое	+	—

Примеры.

1. $y = x^2 - 7x + 10$. Дискриминант: $b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9 > 0$; $a = 1 > 0$. Корни трехчлена: $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Следовательно, при $x < 2$ и при $x > 5$ трехчлен положителен, а при $2 < x < 5$ — отрицателен.

2. $y = -2x^2 + 6x + 80$. Дискриминант: $36 + 640 = 676 > 0$; $a = -2 < 0$. Корни трехчлена: $x_1 = -5$; $x_2 = 8$. Следовательно, при $-5 < x < 8$ трехчлен положителен; при $x < -5$ и при $x > 8$ отрицателен.

3. $y = -x^2 + 4x - 15$. Дискриминант: $16 - 4 \cdot 15 = -44 < 0$. $a = -1 < 0$. Следовательно, при всех значениях x трехчлен отрицателен.

4. $y = 5x^2 - 10x + 5$. Дискриминант: $10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 0$. Корень трехчлена $x_1 = x_2 = 1$; $a = 5 > 0$. Следовательно, при всех значениях x, кроме $x = 1$, трехчлен положителен.

§ 139. Неравенства второй степени.

Неравенствами второй степени с одним неизвестным называются неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0, \tag{2}$$

где a, b и c — любые действительные числа, причем $a \neq 0$.

Так как неравенство вида (2) всегда может быть приведено к виду (1) путем умножения его на -1, то мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением неравенств вида (1).

Решить неравенство — значит определить, при каких значениях x это неравенство справедливо.

Для неравенства (1) это значит, что мы должны найти те значения x, при которых трехчлен в левой части является числом положительным.

После того, что было изложено в предыдущих параграфах относительно знака квадратного трехчлена, ответ на этот вопрос не представляет затруднений.

Решим несколько примеров.

Пример 1. Пусть требуется решить неравенство:

$$2x^2 - 13x + 15 > 0.$$

Это значит, что нам нужно определить, при каких значениях x трехчлен $2x^2 - 13x + 15$ является числом положительным. Решение проведем в таком порядке:

Устанавливаем, что первый коэффициент положителен ($a = 2 > 0$).

Устанавливаем, что дискриминант трехчлена

$$b^2 - 4ac = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 > 0.$$

Отсюда заключаем (см. таблицу § 138), что данное неравенство справедливо при всех значениях x, больших большего, и при всех значениях x, меньших меньшего из корней трехчлена.

Чтобы определить эти значения, решаем уравнение:

$$2x^2 - 13x + 15 = 0.$$

Находим $x_1 = 1\frac{1}{2}$; $x_2 = 5$.

Следовательно, данное неравенство справедливо при значениях x, меньших $1\frac{1}{2}$, и при значениях x, бо́льших 5.

Пример 2. Решить неравенство:

$$-4x^2 + 4x - 1 < 0. \qquad (1)$$

Умножив обе части на -1, получим равносильное неравенство:

$$4x^2 - 4x + 1 > 0. \qquad (2)$$

Коэффициент $a = 4 > 0$. Дискриминант $4^2 - 4 \cdot 4 = 0$.

Следовательно, трехчлен имеет равные корни. В этом случае, как мы знаем (§ 138) трехчлен (2) имеет положительные значения при всех значениях x, кроме значения, равного корню трехчлена. Найдем этот корень, решив уравнение:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Получим $x = \frac{1}{2}$ Итак, данное неравенство (1) справедливо при всех значениях x, кроме $x = \frac{1}{2}$.

Пример 3. Решить неравенство:

$$3x^2 - 5x + 4 > 0.$$

Коэффициент $a = 3 > 0$. Дискриминант $5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -23 < 0$.

Отсюда сразу заключаем, что неравенство справедливо при любых значениях x.

Пример 4. Решить неравенство:

$$-3x^2 + 4x - 10 > 0.$$

Так как $a = -3 < 0$ и дискриминант $4^2 - 120 < 0$, то непосредственно заключаем, что неравенство решений не имеет.

Решенные примеры, а также рассмотрение таблицы (§ 138) приводят к следующему общему выводу для неравенства:

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

1. Если $b^2 - 4ac < 0$, то
при $a > 0$ неравенство справедливо при любых значениях x;
при $a < 0$ неравенство не имеет решений.

2. Если $b^2 - 4ac = 0$, то

при $a > 0$ неравенство справедливо при всех значениях x, кроме значения, равного корню трехчлена, стоящего в левой части;

при $a < 0$ не имеет решений.

3. Если $b^2 - 4ac > 0$, то:

при $a > 0$ неравенство справедливо при значениях x, больших большего, и при значениях x, меньших меньшего из корней трехчлена в левой части (или, как мы условились говорить короче: при значениях x вне промежутка между корнями трехчлена);

при $a < 0$ неравенство справедливо при значениях x, заключенных между корнями трехчлена в левой части (или при значениях x внутри промежутка между корнями).

Примечание. Во всех приведенных примерах мы проводили решение, полностью основываясь на результатах исследования квадратного трехчлена, данных в § 138.

Но, конечно, в каждом случае возможно и вполне самостоятельное исследование. Так, в примере 1, решив уравнение $2x^2 - 13x + 15 = 0$ и найдя $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = 5$, мы могли данное неравенство представить в виде:

$$2\left(x - 1\frac{1}{2}\right)(x - 5) > 0.$$

Теперь решение данного неравенства привелось к решению двух систем неравенств первой степени:

$$1)\ \begin{cases} x - 1\frac{1}{2} > 0, \\ x - 5 > 0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x - 1\frac{1}{2} < 0, \\ x - 5 < 0. \end{cases}$$

Первая система дает $x > 5$, вторая $x < 1\frac{1}{2}$. Значит, данное неравенство справедливо при значениях $x > 5$ и при значениях $x < 1\frac{1}{2}$.

Мы пришли к тому же результату, что и в первом примере, но гораздо более длинным путем.

Пример 5. Решить неравенство:

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} > 0.$$

Решение этого неравенства приводится к решению двух систем

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 > 0, & (1) \\ x - 3 > 0; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0, & (3) \\ x - 3 < 0. & (4) \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств. Так как $8^2 - 4 \cdot 7 = 36 > 0$, то трехчлен $x^2 - 8x + 7$ имеет действительные и различные корни. Решив уравнение $x^2 - 8x + 7 = 0$, найдем: $x_1 = 1$, $x_2 = 7$. В таком случае, как мы знаем (§ 138), неравенство (1) будет иметь место при $x < 1$ и при $x > 7$.

Но, решив неравенство (2), найдем $x > 3$. Значит, обоим неравенствам удовлетворяют лишь значения $x > 7$.

Решим вторую систему. Неравенство (3) будет справедливо при всех значениях x, заключающихся между 1 и 7, то есть при $1 < x < 7$ Но неравенство (4) дает $x < 3$. Следовательно, обоим неравенствам вместе удовлетворяют лишь значения x, заключенные между 1 и 3, то есть при $1 < x < 3$.

Теперь мы можем сделать общий вывод: данное неравенство справедливо

$$\text{при} \quad 1 < x < 3 \text{ и при } \quad x > 7.$$

Проверьте правильность решения подстановкой в данное неравенство значений x, равных —1; 0; 1; 2; 4: 6; 8; 10.

§ 140. Исследование квадратных уравнений.

Общий вид квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Его исследование сводится в основном:

1) к установлению — имеет ли уравнение действительные (различные или равные) или мнимые корни;

2) к установлению знаков корней и, если они имеют различные знаки, то к сравнению их по абсолютной величине. Оба эти вопроса рассмотрены в § 49.

Если уравнение содержит параметры, кроме упомянутых вопросов, могут быть поставлены и другие.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2 + (2a - 3)x + a = 0$$

имеет корни: 1) действительные различные; 2) действительные равные; 3) мнимые?

Находим дискриминант:

$$D = (2a - 3)^2 - 4a^2 = 9 - 12a.$$

Уравнение имеет корни:

1) действительные различные при $9 - 12a > 0$, то есть при

$$a < \frac{3}{4};$$

2) действительные равные при $a = \frac{3}{4}$;

3) мнимые при $a > \frac{3}{4}$.

Пример 2. При каких целых значениях параметра a уравнение

$$(a+1)x^2-(2a+5)x+6=0 \quad (a \neq -1)$$

будет иметь два целых корня?

Находим дискриминант:

$$D=(2a+5)^2-4\cdot 6(a+1)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2.$$

При a целом $D>0$ и, значит, уравнение имеет два действительных различных корня.

Решив уравнение, найдем корни:

$$x_1=\frac{2a+5+2a-1}{2(a+1)}=\frac{4a+4}{2(a+1)}=2.$$

$$x_2=\frac{2a+5-2a+1}{2(a+1)}=\frac{3}{a+1}.$$

Так как x_1 — целое при любом a, то остается определить при каких значениях a будет целым выражение $\frac{3}{a+1}$.

Число 3 делится нацело только на ± 1 и ± 3. Отсюда четыре решения.

$a+1$	a	Уравнение	Корни
1	0	$x^2-5x+6=0$	2 и 3
-1	-2	$-x^2-x+6=0$	2 и -3
3	2	$3x^2-9x+6=0$	1 и 2
-3	-4	$-3x^2+3x+6=0$	-1 и 2

Пример решения с исследованием задачи, приводящей к квадратному уравнению, был дан в § 138.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I.

Извлечение квадратного корня из чисел.

Глава II.

Действительные числа.

Глава III.

Возведение в целую степень.

Глава IV.

Тождественные преобразования иррациональных выражений

Глава V.

Квадратные уравнения и уравнения, приводимые к ним.

Глава VI.

Функции и графики.

Глава VII.

Система уравнений второй степени.

Глава VIII.

Пределы.

Глава IX.

Прогрессии.

Глава X.

Логарифмы.

Глава XI.

Функции и их исследование. Производная.

Глава XII.

Комплексные числа.

Глава XIII.

Неравенства. Исследование уравнений и систем уравнений.

Барсуков Александр Николаевич

АЛГЕБРА, ч. II. УЧЕБНИК ДЛЯ 8—10 КЛАССОВ

Редактор *Н. И. Лепешкина*
Обложка художника *М. Л. Компанеец*
Художественный редактор *Н. А. Володина*
Технический редактор *А. Ф. Федотова*
Корректор *М. В. Голубева*

Логарифмическая линейка

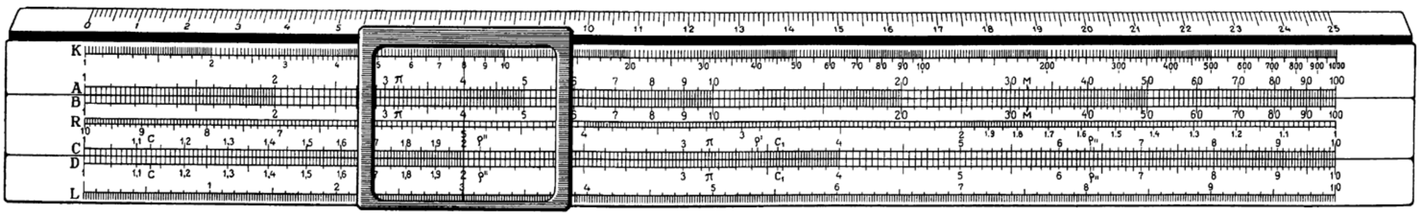


Рис. 54.